حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الأول

الاشتقاق الجزئي PARTIAL DIFFERENTIATION

- مقدمــــة
- الـــدوال في عـــدة مـــتغيرات
- النـــهايات والاتـــصال
- الاشـــتقاق الجزئـــي
- قاعدة السلسلة
- القيم العظمى والصغرى لدوال في عدة متغيرات

(١–٦–١) تعريف

أ) لتكن (x_0, y_0) نقطة في المستوى xy ، نعرّف القرص المفتوح الذي مركزه (x_0, y_0) ونصف قطره العدد الموجب r والذي نرمز له بالرمز $B\big((x_0, y_0); r\big)$ بأنه :

$$B\big((x_0, y_0); r\big) = \left\{(x, y); \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\}$$

كما نعرّف القرص المغلق الذي مركزه (x_0, y_0) ونصف قطره $r > 0$ والذي نرمـــز لـــه بـــالرمز $\bar{B}\big((x_0, y_0); r\big)$ بأنه :

$$\bar{B}\big((x_0, y_0); r\big) = \left\{(x, y); \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le r\right\}$$

ب) لتكن (x_0, y_0, z_0) نقطة في الفضاء الثلاثي . نعّرف الكرة المفتوحة التي مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها $r > 0$ بالمجموعة الآتية :

$$B\left((x_0, y_0, z_0); r\right) = \left\{(x, y, z); \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\right\}$$

أما الكرة المغلقة التي مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها $r > 0$ فهي :

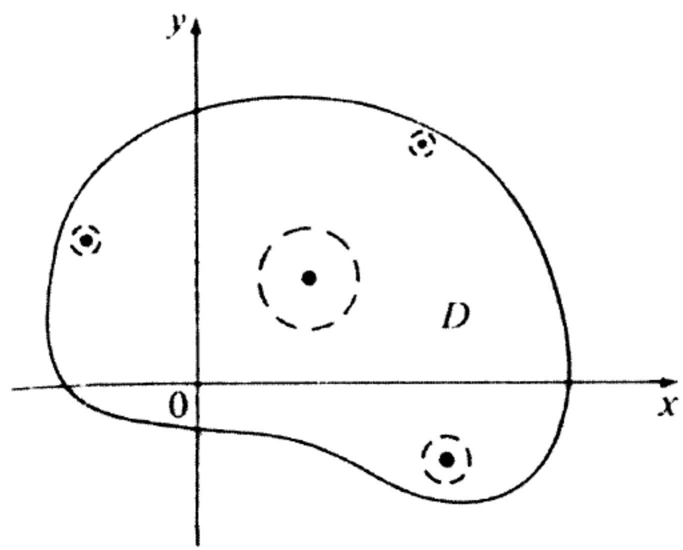
$$\bar{B}\left((x_0, y_0, z_0); r\right) = \left\{(x, y, z); \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \leq r\right\}$$

(١–٦–٢) تعريف

لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$

(أ) نقول إن (x_0, y_0) هي نقطة داخلية للمجموعة D إذا وجد عدد موجب r بحيث يكون :

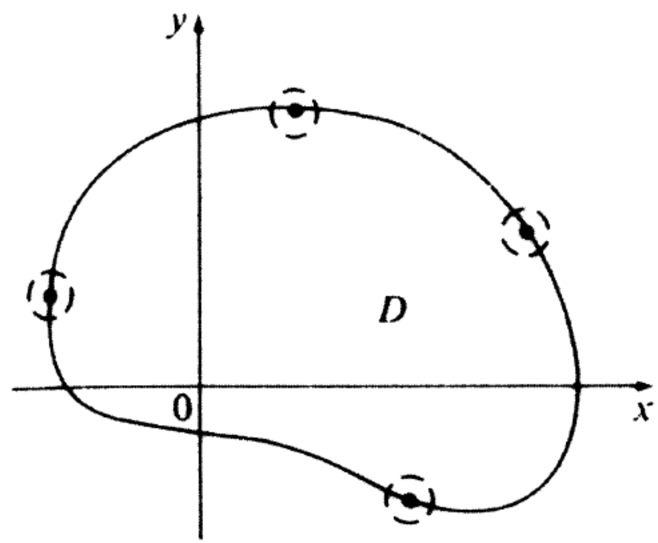
$B\left((x_0, y_0); r\right) \subset D$. انظر الشكل (أ).



أ

(ب) نقول إن (a,b) هي نقطة حد للمجموعة D إذا كان أي قرص مفتوح مركزه (a,b) يحوي نقاط تنتمي إلى D ويحوي أيضاً نقاطاً لا تنتمي إلى D، نرمز لمجموعة نقاط الحد بالرمز ∂D .

انظر الشكل ب .

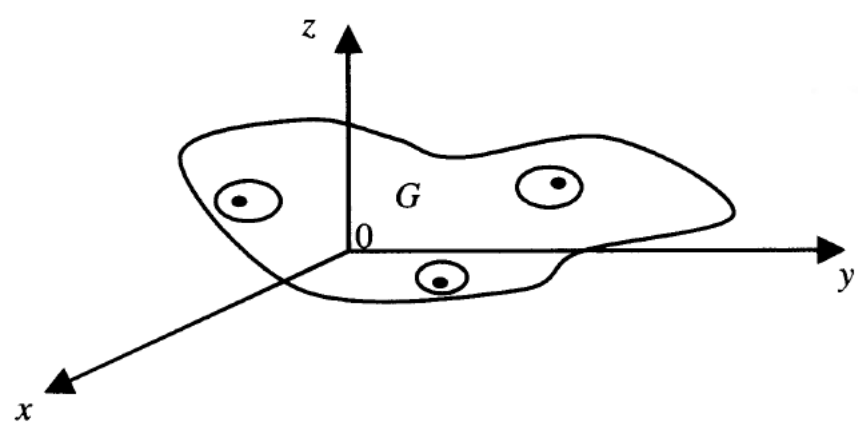


ب

بالمثل نعرف النقاط الداخلية ونقاط الحد لمجموعة جزئية D من $\mathbb{R}^3$ على النحو التالي:

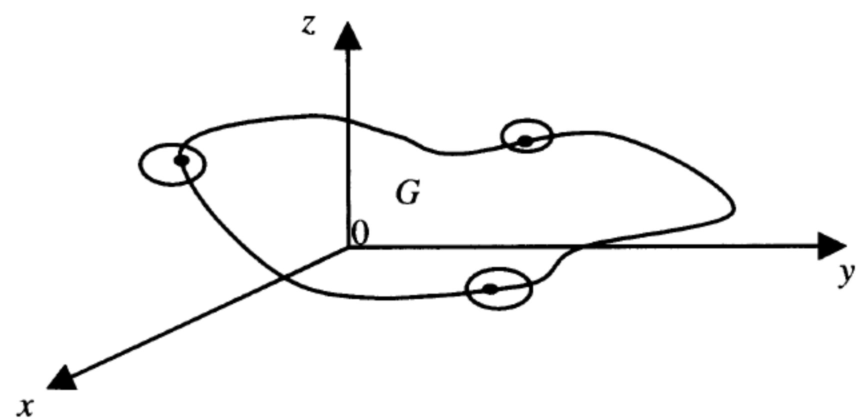
نقول إن (x_0, y_0, z_0) هي نقطة داخلية للمجموعة D إذا وجدت كرة مفتوحة $B((x_0, y_0, z_0); r)$ مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها $r > 0$ بحيث يكون :

$$B((x_0, y_0, z_0); r) \subset D$$



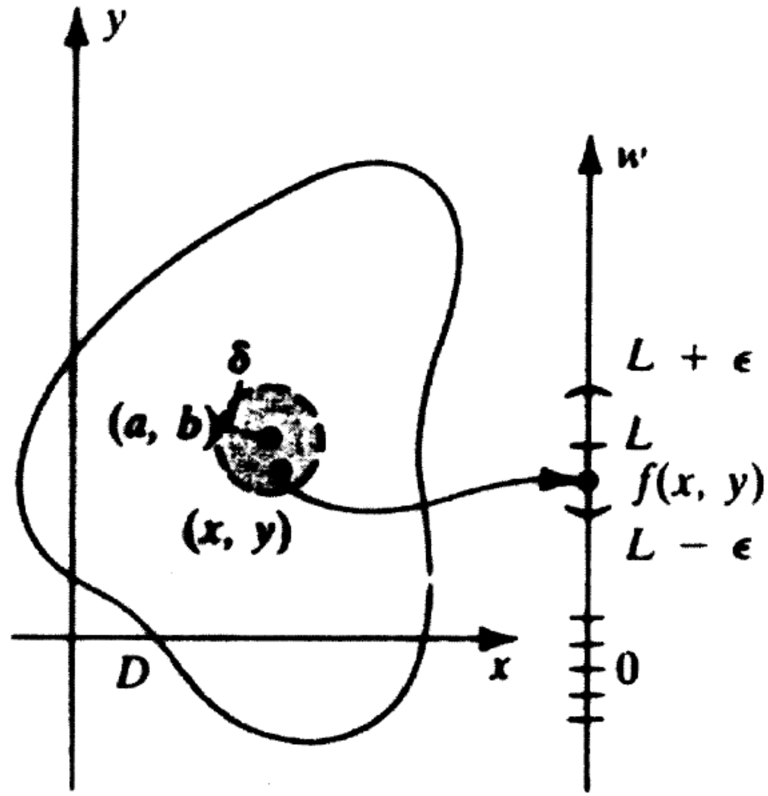
نقول إن (a,b,c) هي نقطة حد للمجموعة D إذا كانـــت أي كرة مفتوحة مركزها (a,b,c) تحتوي على نقاط تنتمي إلى D وتحتوي أيضاً على نقاط لا تنتمي إلى D،

نرمز لمجموعة نقاط الحد بالرمز ∂D .



(١–٦–٣) تعريف

لتكن f دالة في متغيرين ، معرّفة على قرص مفتوح D مركزه (a,b) باستثناء النقطة (a,b) التي قد لا تكون الدالة معرفة عندها، فإننا نقول إن العدد الحقيقي L هو نهاية للدالة f عندما تقترب (x,y) من (a,b) ونكتب : $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$. إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ فإن $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.



أما الكتابة : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ فهي تكافئ إحدى الكتابتين الآتيتين :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L$$ أو $f(x,y)\to L$ عندما $(x,y)\to(a,b)$

(١-٦-٤) تعريف

لتكن f دالة في ثلاثة متغيرات (x,y,z) ، معرّفة على كـــرة مفتوحـــة B مركزهـــا (a,b,c) باستثناء النقطة (a,b,c) التي قد لا تكون الدالة معرفة عندها، فإننا نقول إن العدد الحقيقي L هو نهاية للدالة f عندما (x,y,z) تقترب من (a,b,c) ونكتب :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ z\to c}} f(x,y,z)=L \quad \text{أو} \quad \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=L$$

إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<\delta$ فإن $|f(x,y,z)-L|<\varepsilon$.

مثال باستخدام التعريف، اثبت أن

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y)=11$$

الحل :

نثبت أنه لكل $0 < \varepsilon$ يوجد عدد حقيقي $0 < \delta$ بحيث إذا كان $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<\delta$ فإن $|2x+3y-11|<\varepsilon$. لدينا الآن

$$|f(x,y)-11|=|2x+3y-2-9|=2(x-1)+3(y-3)|\le 2|x-1|+3|y-3|$$

لما كان

$$|x-1|\le\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

$$|y-3|\le\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

$$\left|f(x,y)-11\right|\le 5\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<5\delta$$

وهنا نختار $\delta\le\frac{\varepsilon}{5}$ ، وبالتالي إذا كان $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<\delta$ فإن $|2x+3y-11|<\varepsilon$. أي أن

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y)=11$$

(١-٦-٥) نظرية

لتكن f دالة في المتغيرين x و y إذا كانت $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,,y)=L$ حيث $L\in\mathbb{R}$.

عندئذ فإن L عدد وحيد .

(١-٦-٦) نتيجة

إذا كانت $f(x,y)\to L_1$ عندما $(x,y)\to(a,b)$ على المسار C_1 وكانت $f(x,y)\to L_2$ عندما $(x,y)\to(a,b)$ على المسار C_2 ، حيث $L_1\neq L_2$ فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ غير موجودة.

مثال

إذا كانت $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. اثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .

الحل

إن الدالة f معرّفة على جميع نقاط المستوى xy باستثناء النقطة $(0,0)$ لنأخذ المسار الأول المحور x ،

الذي معادلته $y=0$ عندئذ على هذا المسار لدينا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}(0)=0$$

ولنأخذ المسار الثاني المستقيم $y=x$ فيكون لدينا على هذا المسار

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

وحسب النتيجة (١-٦-٦) نستنتج أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .

تنويه: نتوه هنا إلى أمرين. الأول إن طريقة المسارات لا تستخدم لإثبات وجود النهاية وإنما لإثبات عدم وجود النهاية. والأمر الثاني أنه عند اختيار أي مسار يجب التأكد من أن هذا المسار يمر بالنقطة المراد دراسة النهاية عندها.

مثال

بين ما إذا كانت النهاية الآتية موجودة :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4}$$

الحل

لنأخذ المسار $y = x$ ، فيكون لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{7x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{7x^2} = +\infty$$

نستنتج مباشرة أن النهاية غير موجودة لأنه إذا كانت النهاية موجودة لكانت قيمتها تساوي إلى عدد حقيقي L .

(١-٦-٧) نظرية

لتكن f و g دالتين في المتغيرين x و y معرّفتين على مجموعة D في المستوى xy . لنفرض أن (a,b) نقطة داخلية في D . فإذا كانت :

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ وكانت $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$ ، حيث $L,M \in \mathbb{R}$ فإن

(١) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) + g(x,y) \right] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

(٢) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) - g(x,y) \right] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

(٣) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y).g(x,y) \right] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y). \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$= L.M$$

٤) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (Cf)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} C \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = CL$

حيث C عدد ثابت .

أما إذا فرضنا أن D_1 نطاق $\frac{f}{g}$ ، وأن (a,b) هي نقطة داخلية في D_1 وكانت :

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ ، $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$ ، حيث $M \neq 0$ ، فإن

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} = \frac{L}{M} \quad (٥)$$

مثال

باستخدام خواص النهايات في النظرية (١-٦-٧) احسب النهايات الآتية :

$$\lim_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2) \quad \text{(أ)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{3x^2 + xy + x^2y^2}{x^3 + x^2y + y^2x + 1} \quad \text{(ب)}$$

الحل :

(أ)
$$\lim_{(x,y)\to(-1,4)} 5x^2 = 5 \,, \quad \lim_{(x,y)\to(-1,4)} -2xy = 8 \,, \quad \lim_{(x,y)\to(-1,4)} y^2 = 16$$

واعتماداً على الخاصة (١) نجد أن :

$$\lim_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2) = \lim_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2) + \lim_{(x,y)\to(-1,4)} (-2xy) + \lim_{(x,y)\to(-1,4)} y^2$$

$$= 5 + 8 + 16 = 29$$

(ب) أيضاً نستخدم الخاصيتين (١) و (٣) :

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(3x^2+xy+x^2y^2)=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(3x^2)+\lim_{(x,y)\to 1,-1)}(x.y)+\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x^2y^2)$$

$$=3-1+1=3$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x^3+x^2y+y^2x+1)=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x^3)+\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x^2y)$$

$$+\lim_{(x,y)\to(1,-1)}y^2x+\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(1)=1-1+1+1=2$$

وحسب الخاصية (٥) فإن لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{3x^2+xy+x^2y^2}{x^3+x^2y+y^2x+1}=\frac{\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(3x^2+xy+x^2y^2)}{\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x^3+x^2y+y^2x+1)}=\frac{3}{2}$$

(١–٦–٨) **ملاحظة** : إذا كانت P كثيرة حدود في المتغيرين x و y وكانت (a,b) نقطـــة في المستوى xy . فبالاستفادة من خواص النهايات في النظرية (١–٦–٧) يمكن البرهنة على أن :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x,y) = P(a,b)$$

أما إذا كانت $h(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ دالة كسرية وكانت (a,b) نقطة في المستوى xy بحيـــث يكون $g(a,b) \neq 0$ ، فباستخدام خواص النهايات في النظرية (١–٦–٧) نستطيع البرهنة على أن

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = h(a,b)$$

(١-٦-٩) نظرية (نظرية الحصر)

لتكن f ، g ، h دوال في متغيرين ، معّرفة على قرص مفتوح D مركزه (a,b) ونصف قطره r باستثناء النقطة (a,b). إذا كانت :

$$g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$$

لكل $(x,y) \in D$ باستثناء النقطة (a,b) ، وكانت :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$$

فإن $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

مثال أثبت أن : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

الحل :

نعلم أن $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ و $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

وبالتالي فإن

$$0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|.|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|$$

لكل $(x,y) \neq (0,0)$ وبما أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$$

وحسب النظرية (١-٦-٩) ، نستنتج أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ومنه فإن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

مثال لتكن f دالة معّرفة بالشكل الآتي :

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

برهن على أن $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0$

الحل :
نعلم أن

$$|yz|\leq y^2+z^2+x^2$$

وبالتالي فإن $0\leq|f(x,y,z)|=3\dfrac{|x|.|y|.|z|}{x^2+y^2+z^2}\leq 3|x|$ لكل $(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0=0 \quad , \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x|=0$$

إذاً وحسب نظرية الحصر، والملاحظة (١-٦-١٠) نجد أن $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0$

(١-٦-١١) تعريف

لتكن f دالة في متغيرين x, y ، معرّفة على منطقة D . ولتكن (a,b) نقطة داخليـــة في D . نقول إن f دالة متصلة عند النقطة (a,b) إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيـــث إذا كان $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ فإن $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$، كما ويمكـــن أن نعطـــي تعريفا آخرا مكافئا وهو أن f تكون متصلة عند (a,b) إذا تحققت الشروط الآتية :

١) f معرّفة عند (a,b) .　　　٢) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجودة .

٣) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

أما إذا كان إحدى هذه الشروط غير محقق ، فنقول إن f غير متصلة عند (a,b) . كما نقـــول إن f متصلة على النقاط الداخلية في D ، إذا كانت متصلة عند كل نقطة داخلية في D .

(١–٦–١٢) تعريف

لتكن f دالة في ثلاثة متغيرات x ، y ، z ، معرّفة على منطقة D ، ولتكن (a,b,c) نقطة داخلية في D نقول إن f دالة متصلة عند النقطة (a,b,c) إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} < \delta$ فإن $|f(x,y,z) - f(a,b,c)| < \varepsilon$.

إن هذا التعريف يكافئ التعريف الآتي :

تكون f متصلة عند (a,b,c) إذا تحققت الشروط التالية :

١) f معرّفة عند (a,b,c) .

٢) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)$ موجودة .

٣) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$

مثال

ابحث اتصال الدالة الآتية

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

عند النقطة $(0,0)$.

الحل :

نبدأ باختبار وجود هذه النهاية عن طريــق المسارات ولتكن $y=mx$ وهي مجموعة من المستقيمات المارة بنقطة الأصل ، لدينا إذاً :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{m^2x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{m^2+x^2}=0$$

لكن هذا لا يعني أن النهاية موجودة وتساوي صفرا . بالفعل هناك عدد غير منته من المسارات المارة بالنقطة $(0,0)$ غير المستقيمات المذكورة . من تعريف الدالة f نستطيع اختيار مـــسارات أخـــرى مارة بنقطة الأصل قد تبرهن أن قيمة النهاية غير موجودة . لنأخذ المسار $y = x^2$ وهو قطع مكافئ يمر بالنقطة $(0,0)$ ويكون لدينا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{x^4+x^4}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ومنه فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .

لذلك فإن الدالة f غير متصلة عنـــد $(0,0)$.

مثال

ابحث اتصال الدالة

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

عند النقطة $(0,0,0)$

الحل :

لكل $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ فإن

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\leq 1 \quad ، \quad \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\leq 1 \quad ، \quad \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\leq 1$$

وأن

$$|f(x,y,z)|\leq \frac{x^2|x|}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2|y|}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2|z|}{x^2+y^2+z^2}$$

وحيث إن

$$|f(0,0,0)|=0\le|x|+|y|+|z|$$

وبالتالي فإن $0\le|f(x,y,z)|\le|x|+|y|+|z|\,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$

وحسب نظرية الحصر (١-٦-٩) فإن لدينا :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0=f(0,0,0)$$

لأن $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}(|x|+|y|+|z|)=0$ ، $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}(0)=0$ أي أن f متصلة عند النقطة $(0,0,0)$.

(١-٦-١٣) نظرية

إذا كانت g دالة في المتغيرين x و y ، ولتكن $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=b$ وإذا كانت f دالة في متغير واحد ، متصلة عند b فإن

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f\Big(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\Big)$$ إذا وفقط إذا كانت

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\circ g)(x,y) = f(b)$$

(١-٦-١٤) **نتيجة**

إذا كانت g دالة في متغيرين x و y ، ولنفرض أن g متصلة عند (x_0,y_0). فإذا كانت f دالة في متغير واحد متصلة عند $g(x_0,y_0)$ فإن $f\circ g$ متصلة عند (x_0,y_0) .

نظرية (١-٦-١٥)

إذا كانت g دالة في ثلاثة متغيرات x ، y و z ، ولتكن

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} g(x,y,z)=b$$

وإذا كانت f دالة في متغير واحد متصلة عند b فإن

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} (f\circ g)(x,y,z)=f(b)$$

إذا وفقط إذا

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(g(x,y,z))=f(\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} g(x,y,z))$$

مثال

أ) $h(x,y)=e^{x^2+5xy+y^2}$

ب) $h(x,y)=\sin\left(\sqrt{y-4x^2}\right)$

الحل :

أ) نطاق الدالة h هو $\mathbb{R}^2$. نضع $g(x,y)=x^2+5xy+y^3$ ، $f(t)=e^t$. بما أن $g(x,y)$ كثيرة حدود في x و y ، إذاً فهي متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ ، وذلك حسب الملاحظة (١–٦–٨) أما الدالة f فهي أيضاً متصلة على $\mathbb{R}$ ، إذا وحسب النتيجة (١–٦–١٤) نجد $h(x,y)=(f\circ g)(x,y)$ متصلة عند كل نقطة $(x,y)\in\mathbb{R}$.

ب) نفرض $g(x,y)=y-4x^2$ ، $f(t)=\sin(\sqrt{t})$ نعلم أن g كثيرة حدود ، وبالتالي فهي متصلة على $\mathbb{R}^2$ ، ولكن الدالة f متصلة فقط لكل t ، حيث $t\geq 0$. لذلك :

$$h(x,y)=(f\circ g)(x,y)=\sin\left(\sqrt{y-4x^2}\right)$$

متصلة عند كل نقطة $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ، حيث إن $t=g(a,b)\geq 0$ ، أي أن h متـــصلة عنـــد أي نقطة $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ، بحيث أن $b\geq 4a^2$.

(١-٦-١٦) نظرية

إذا كانت f ، g دالتين في المتغيرين x ، y ، متصلتين عند النقطة (a,b) فإن :

١) $f+g$ متصلة عند (a,b) .

٢) $f-g$ متصلة عند (a,b) .

٣) $f.g$ متصلة عند (a,b) .

٤) $\frac{f}{g}$ متصلة عند (a,b) بشرط أن يكون $g(a,b)\neq 0$.

يوجد نص مماثل للنظرية (١-٦-١٦) ، في حالة دوال في ثلاثة متغيرات .

مثال

ادرس اتصال الدالتين الآتيين :

١- $f(x,y,z)=\dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$

٢- $f(x,y)=e^{xy}\sin^{-1}(x^2+y^2)$

الحل :

١- إن f عبارة عن حاصل قسمة دالتين $g(x,y,z)=xz$ ، $h(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$. أما الدالة g فهي متصلة على $\mathbb{R}^3$ ، وأما الدالة h فهي متصلة عند كل نقطة $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ باستثناء النقاط (x,y,z) التي من أجلها تكون $x^2+y^2+z^2<1$. إذاً وحسب النظرية (١-٦-١٦) تكون f متصلة عند كل نقطة $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ماعدا النقاط (x,y,z) التي تحقق المتباينة $x^2+y^2+z^2\leq 1$ ، وبتعبير آخر تكون f متصلة على $\mathbb{R}^3$ باستثناء النقاط الواقعة داخل وعلى سطح الكرة التي مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1 .

٢- إن الدالة f عبارة عن حاصل ضرب دالـــتين $g(x,y)=\sin^{-1}(x^2+y^2)$ ، $h(x,y)=e^{xy}$ من النتيجة (١-٦-١٥) ، لدينا h دالة متصلة على $\mathbb{R}^2$ ، وان الدالة g متصلة أيضاً عند كل نقطة $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، بحيث أن $x^2+y^2\le 1$. وحسب النظرية (١-٦-١٦) تكون f متصلة عنـــد النقاط الواقعة داخل وعلى محيط الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1 .

تـــمـــاريـن

في التمارين من ١–٣ استخدم التعريف لإثبات النهاية: ١

١- $\lim_{(x,y)\to(2,4)} (6x-3y)=0$

٢- $\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2)=2$

٣- $\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,0)} (xz+y^2+3z)=1$

في التمارين من ٤–١٩ اختبر وجود النهايات الآتية ، واحسب قيمة النهاية في حالة وجودها:

٤- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

٥- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+1}}$

٦- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\dfrac{x-y}{2x+y}}$

٧- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x+y}{xy+1}$

٨- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{3x^2+xy^2-3xy-y^3}{x^2-y^2}$

٩- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,2,0)} \dfrac{x^2y^2+y^2z^2}{x^2+z^2}$

١٠- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

١١- $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-2)} ln(x+y)$

١٢- $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^4 + yx^3 + z^2x^2}{x^4 + y^4 + z^4}$$

١٣- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{x^2+y^2}$$

١٤- $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(e^x + e^y + e^z)^2}{e^{2x} + e^{2y} + e^{2z}}$$

١٥- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^2}{x^2+y^2}$$

١٦- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

١٧- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

١٨- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ، حيث :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

١٩- $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ ، حيث :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

في التمارين من ٢١-٢٨ ابحث اتصال الدوال الآتية :

-٢٠
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

-٢١
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

-٢٢
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

-٢٣ $f(x,y)=\ln(2x+3y)$

-٢٤ $f(x,y)=\tan(x^4-y^4)$

-٢٥ $f(x,y)=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$

-٢٦ $f(x,y,z)=\sqrt{xy}\cot z$

-٢٧ $f(x,y,z)=y\ln(x.z)$

٢٩- أوجد قيمة r التي تجعل الدالة :

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{(x+y+z)^r}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

متصلة عند $(0,0,0)$.