المحتويات

الباب الأول

الاشتقاق الجزئي

PARTIAL DIFFERENTIATION

• مقدمة • الدوال في عدة متغيرات • السطوح من الدرجة الثانية

• النهايات والاتصال • الاشتقاق الجزئي • التزايدات والتفاضلات

• قاعدة السلسلة • القيم العظمى والصغرى لدوال في عدة متغيرات

(١-١)

● مـــقـــدمـــة

Introduction

قد يجد صاحب مصنع أن تكلفة إنتاج السلعة C تعتمد على نوعية المـــادة الخـــام المستخدمة، أجور العمال، نوعية الآلات المستخدمة، أجور الصيانة وتكاليف عينية أخرى. في هـــذه الحالة نقول أن C دالة في خمسة متغيرات، لأنها تعتمد على خمسة كميات مختلفة. نـــدرس في هـــذا الباب هذه الدوال. في الفصل (١-٢) نعطي تعريفا لدالة في متغيرين وثلاثة مـــتغيرات بالإضـــافة إلى تقديم العديد من الأمثلة والتي توضح كيفية إيجاد مجال هذه الدوال.سنورد في هذا الفصل أيضا كيفية رسم سطح الدالة $z = f(x, y)$ وذلك بالاستعانة بما يسمى أثر سطح الدالـــة بمـــستويات موازيـــة للمستويات الإحداثية أو المنحنيات الاسقاطية. كان من الممكن إعطاء تعريف الدالة في عدة متغيرات في الحالة العامة ، أي عندما يكون لدينا n متغير، لكن وجدنا أن الحالة العامة قد تجعل المقرر أكثـــر تجريداً وهذا ليس هدفنا في هذا الكتاب ، وإنما هدفنا هو إعطاء هذه المفاهيم بأسلوب بسيط لكـــي تكون مفهومة لدى القارئ. خصص الفصل (١-٣) لدراسة بعض السطوح من الدرجة الثانية والتي قد تساعد على فهم الدوال في عدة متغيرات كما أنها ستساعدنا في دراسة التكاملات الثنائية والثلاثية في الباب التالي. في الفصل (١-٤) نعمم المفاهيم لدالة في متغير واحد كالنهايات والاتصال للدوال في متغيرين وثلاث متغيرات، ونظراً لأهمية هذه المفاهيم فقد أوردنا العديد من الأمثلة التوضيحية، وعلى وجه الخصوص لدوال في متغيرين. أما في الفصل (١-٥) نعمم مفهوم المشتقة لدالة في متغير واحد، ولكن لن نتطرق للمشتقة الكلية لدالة في أكثر من متغير وبدلا من ذلك سندرس الاشتقاق الجزئـــي وهنا تم توضيح هذا المفهوم من الناحية الرياضية والناحية الفيزيائية والهندسية بالإضافة إلى العديد من الأمثلة . كما أسلفنا آنفا فلن نتعرض إلى دراسة المشتقة الكلية لدوال في عدة متغيرات وبـــدلا مـــن ذلك سنكتفي بدراسة قابلية التفاضل لمثل هذه الدوال، وقد خصص الفصل (١-٦) لهذا الغرض. في الفصل (١-٧) ندرس قاعدة السلسلة مع العديد من الأمثلة التي توضح هذه القاعدة . نختـــتم هـــذا الباب بدراسة بعض التطبيقات على المشتقات الجزئية. ندرس في الفصل (١-٨) القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة لدوال في عدة متغيرات وكيفية تعيينها وحرصنا في هذه الفصل على تقـــديم بعض الأمثلة ذات الصبغة التطبيقية.

(١-٢)

● الدوال في عدة متغيرات

Functions Of Several Variables

في كثير من المجالات مثل الفيزياء ، الكيمياء ، الاقتصاد ، الاجتماع ، ومجالات أخرى ، نصادف عدداً من المسائل العلمية ، حيث كل مسألة عادة ، تتعلق بعدة عوامل وبتعبير آخر ، كل مسألة تتعلق بدالة في عدة متغيرات .

إن أمثلة الدوال في عدة متغيرات كثيرة ، نذكر منها على سبيل المثال : حجم الاسطوانة الدائرية V الذي يتعلق بنصف القطر r والارتفاع h ، وكما نعلم فإن : $V=\pi r^2h$. نقول عندئذ أن V دالة في r و h ونكتب

$$V(r,h)=\pi r^2h$$

سوف نقتصر في دراستنا للدوال في عدة متغيرات على دوال في متغيرين ونورد أحياناً بعض الأمثلة لدوال في ثلاثة متغيرات .

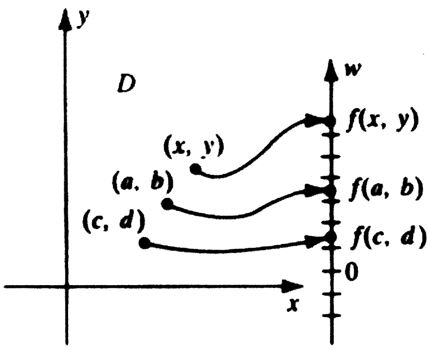
(١-٢-١) تعريف

لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$. نعّرف دالة حقيقية f من D إلى $\mathbb{R}$ ونكتب : $f:D\to\mathbb{R}$ على النحو التالي :

لكل عنصر (x,y) في D يوجد عنصر واحد وواحد فقط z في $\mathbb{R}$ بحيث إن : $z=f(x,y)$.

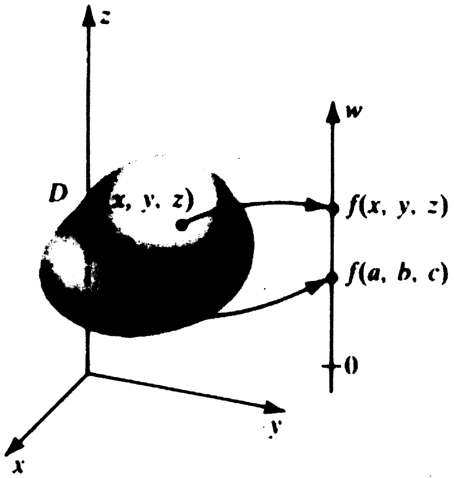
نسمي D بنطاق أو مجال الدالة f ، أما المجموعة $\{z=f(x,y);(x,y)\in D\}$ فهي تدعى مدى الدالة f .

إن هذا التعريف يمكن توضيحه بالشكل التالي:



الشكل (١-١)

إن التعريف (١-٢-١) يمكن تعميمه لدوال في أكثر من متغيرين ، فإذا كانت مثلاً D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ ، فإننا نعّرف دالة حقيقية f من D إلى $\mathbb{R}$ ، ونكتب : $f:D\to\mathbb{R}$ كما يلي: لكل عنصر $(x, y.z)$ في D يوجد عنصر واحد وواحد فقط w في $\mathbb{R}$ ، بحيث أن $w=f(x,y,z)$ ، كما هو موضح بالشكل التالي :



الشكل (١-٢)

مثال (١)

إذا كانت $f(x,y)=\dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$ فعين نطاق f .

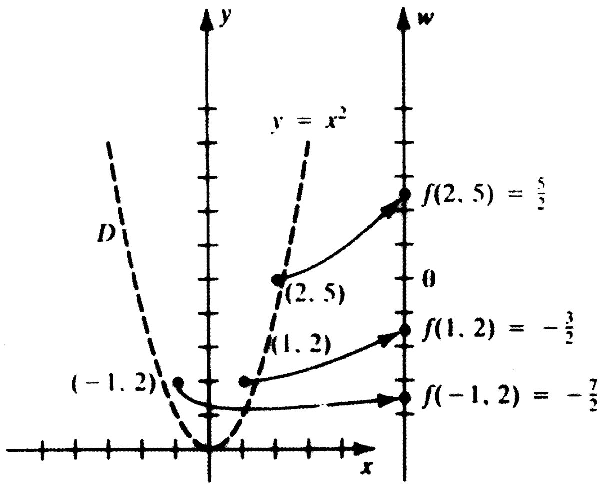
الحل

لكي تكون f معّرفة ، فإنه يتعين أن تحقق (x,y) المتباينة الآتية : $0<y-x^2$ أو $y-x^2>0$ أو $y>x^2$

ومنه فإن نطاق f هو

$$D=\left\{(x,y);\, y>x^2\right\}$$

أي أن D هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ ، وهي عبارة عن جميع النقاط (x,y) الواقعة داخل القطع المكافئ : $y=x^2$ كما هو موضح بالشكل التالي :



الشكل (١-٣)

مثال (٢) عيّن نطاق الدالة $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

الحل

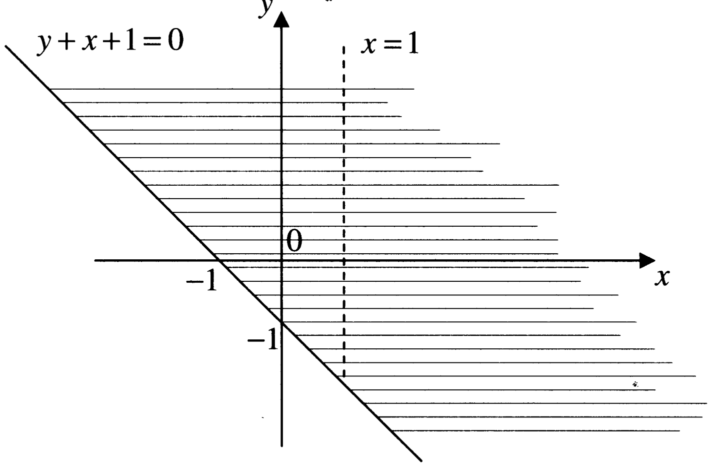
إن نطاق f هو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ والمؤلف من النقاط (x,y) والتي تحقق

$$x \neq 1 \;,\; x+y+1 \geq 0 \,.$$

بعبارة أخرى نطاق f هو جميع النقاط (x,y) الواقعة على أو فوق المستقيم $y=-x-1$ باستثناء النقاط الواقعة على المستقيم $x=1$. ومنه فإن

$$D=\{(x,y): x+y+1 \geq 0 \,,\, x \neq 1\}$$

أي أن D هي المنطقة المظللة والموضحة بالشكل التالي :



الشكل (١-٤)

مثال (٣)

عين نطاق الدالة $w = f(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$

الحل

من الواضح ، وحسب تعريف الدالة اللوغاريتمية أن نطاق الدالة f هو

$$D = \{(x, y, z) : x > 0 \,, \; y > 0 \;, z > 0\}$$

(١-٢-٢) الخواص الجبرية وتحصيل الدوال في عدة متغيرات :

إن مجموع ، حاصل ضرب أو خارج قسمة دالتين f و g في عدة متغيرات تعرّف تماماً كما في حالة الدوال في متغير واحد . فإذا كانت f و g دالتين في المتغيرين x و y معرّفتين على D فإن

١- $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$

٢- $(f . g)(x, y) = f(x, y) g(x, y)$

٣- $(cf)(x, y) = cf(x, y); c \in \Re$

٤- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$

بشرط أن تكون : $g(x, y) \neq 0$ لكل (x, y) في D . وبنفس الطريقة تماماً نعرّف هذه الخواص بالنسبة لدوال في أكثر من متغيرين .

الآن إذا كانت f دالة في المتغيرين y, x وكانت g دالة في متغير واحد ، ولنفرض أن D هو نطاق f وأن $f(x, y)$ يقع في نطاق g لكل (x, y) في D ، فإننا نستطيع تعريف تحصيل f و g ونرمز له بالرمز $g \circ f$ كما يلي :

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$$

وبطريقة مماثلة نستطيع تعريف تحصيل دالة في اكثر من متغيرين ودالة في متغير واحد .

مثال (٤)

إذا كانت $F(x, y) = \sqrt{\ln(4 - x^2 - y^2)}$ فبرهن على أنه توجد دالة f في متغيرين ودالة g في متغير واحد بحيث أن $F = g \circ f$ ثم أوجد نطاق F .

الحل

لنكتب $f(x,y)=\ln(4-x^2-y^2)$ و $g(t)=\sqrt{t}$ ، ومنه فإن

$$(g\circ f)(x,y)=F(x,y)$$

أما نطاق F فهو مؤلف من جميع النقاط (x,y) التي تحقق المتباينتين :

$$4-x^2-y^2>0 \quad ، \quad \ln(4-x^2-y^2)\geq 0$$

وحتى يكون $\ln(-x^2-y^2+4)\geq 0$ يجب أن يتحقق الشرط $4-x^2-y^2\geq 1$ وحينئذ فإن نطاق f هو مجموعة كل النقاط (x,y) الواقعة داخل وعلى محيط دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

(١-٢-٣) تعريف

(أ) نقول إن الدالة f في المتغيرين x,y هي كثيرة حدود في x و y إذا كانت $f(x,y)$ عبارة عن مجموع منته لدوال من الشكل $c_{n,m}x^n y^m$ ، حيث $c_{n,m}$ عدد حقيقي كما أن n و m أعداد صحيحة غير سالبة . أما درجة كثيرة الحدود فهي تعيّن بأكبر مجموع لقوى x و y التي تظهر في أي مقدار $c_{n,m}x^n y^m$ من كثيرة الحدود .

(ب) نقول إن الدالة g في المتغيرين x,y هي دالة كسرية إذا كانت خارج قسمة كثيرتي حدود.

بطريقة مماثلة نستطيع تعريف كثيرة حدود في ثلاثة متغيرات والدالة الكسرية في ثلاثة متغيرات .

مثال (٥)

أ) الدالة $f(x,y)=x^3+2x^2y^2-y^3$ هي كثيرة حدود من الدرجة الرابعة ، لأن أعلى درجة في حدود f هي درجة $2x^2y^2$.

ب) الدالة $g(x,y)=6x^3y^2-5xy^3+7x^2y-2x^2+4$ هي كثيرة حدود من الدرجة 5.

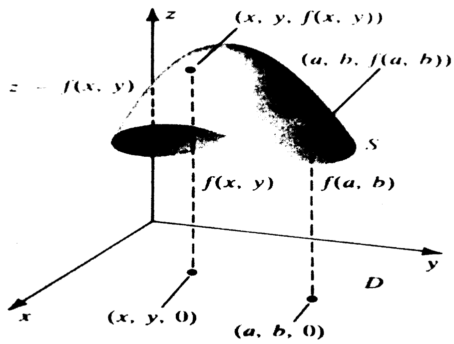
ج) الدالة $h(x,y,z)=x^2y+zxy^2+xz^3+xy+3z$ هي كثيرة حدود من الدرجة 4 .

د) الدالتان $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$ و $h(x,y,z)=\dfrac{xy-x+1}{x^2+y^2+z^2+1}$ هما دالتان كسريتان.

(١-٢-٤) تعريف

نعرّف منحنى دالة f في متغيرين بأنه مجموعة كل النقاط (x,y,z) في $\mathbb{R}^3$ بحيث أن (x,y) تقع في نطاق f ، وان $z=f(x,y)$. ونسمي منحنى الدالة في متغيرين بالسطح .

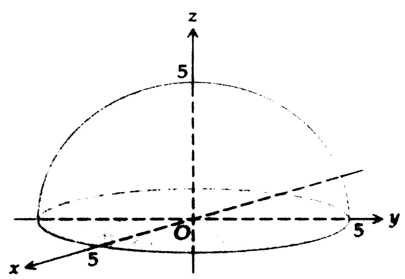
الشكل التالي يوضح تعريف منحنى دالة في متغيرين :



الشكل (١-٥)

مثال (٦)

الدالة $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ تمثل النصف العلوي لسطح كرة مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 5 ، كما هو موضح بالشكل (١-٦) .



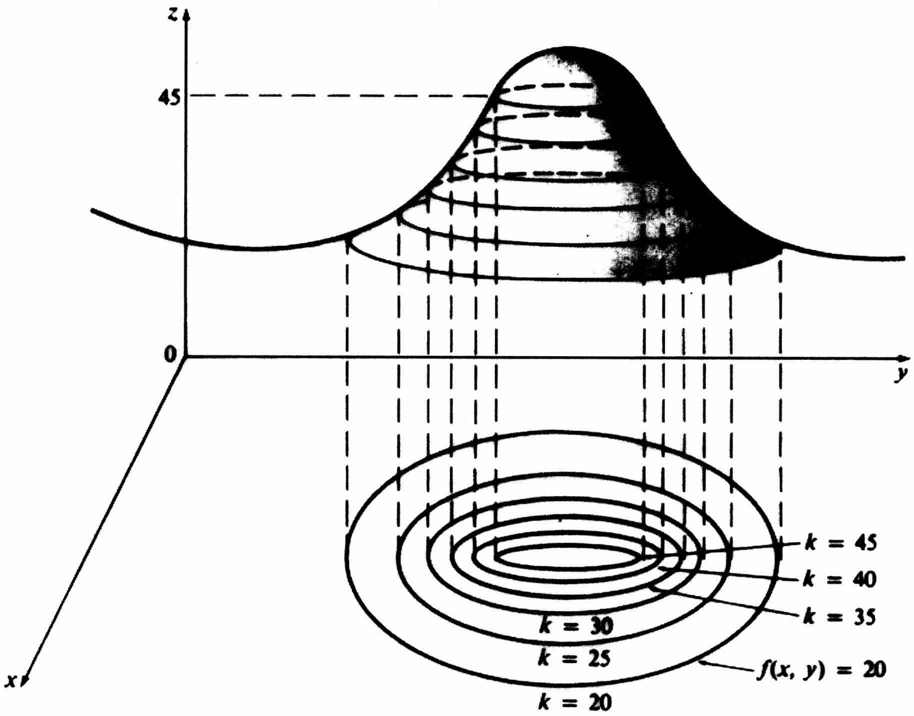
الشكل (١-٦)

(١-٢-٥) تعريف

(أ) لتكن f دالة في المتغيرين x,y نسمي تقاطع منحنى الدالة f مع المستوي $z=k$ أثر منحنى الدالة f في المستوي $z=k$ حيث k عدد حقيقي . وهكذا فإن أثر (Trace) الدالة f في المستوي $z=k$ ، هو منحنى يقع في المستوي $z=k$ ، أي هو منحنى في الفضاء الثلاثي ، ومؤلف من النقاط (x,y,k) ، حيث $k=f(x,y)$.

(ب) لتكن f دالة في المتغيرين x, y ، نعرّف المنحنى الإســقاطي (Level curve) بأنه مجموعة النقاط (x, y) في المستوي xy بحيث إن $f(x, y) = k$ وبتعبير آخــر المنحنى الإسقاطي هو إسقاط أثر منحنى الدالة f في المستوي $z = k$ على المــستوي xy.

الشكل التالي يوضح هذا التعريف.



الشكل (١-٧)

وهكذا فإن المنحنى الإسقاطي $f(x, y) = k$ هو مجموعة النقاط (x, y) التي تأخذ قيماً ثابتة وفق الدالة f وتساوي k .

لتوضيح تعريف المنحنى الإسقاطي، نفرض أن درجة الحرارة t لأي نقطة في صفيحة معدنية تعطى بالدالة f ، أي أن t تمثل قياس درجة حرارة نقطة (x, y) من الصفيحة وليكن $t = f(x, y)$. عندئذ فإن المنحنيات المعطاة بالعلاقة $f(x, y) = k$ ، حيث k ثابت ، هي منحنيات لها درجة حرارة ثابتة ، وهذه هي المنحنيات الإسقاطية للدالة f وتدعى بالعوازل الحرارية (Isothermals) . لنأخذ مثالاً آخر ، حيث نفرض v مقياس الجهد الكهربائي عند أي نقطة (x, y) في المستوي xy وان $v = f(x, y)$. أما المنحنيات الإسقاطية للدالة فهي تدعى المنحنيات

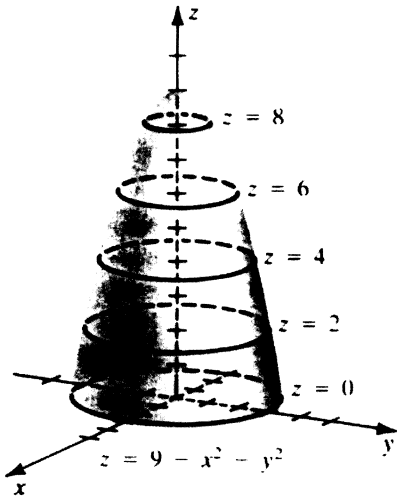
متوازنة الجهد (Equipotential curves) لأن الجهد الكهربائي عند كل نقطة (x, y) من المنحنى $f(x, y)=k$ يساوي عدداً ثابتاً k . الأمثلة الآتية ، توضح كيفية الاستفادة من المنحنيات الإسقاطية في رسم سطوح الدوال في متغيرين.

مثال (٧)

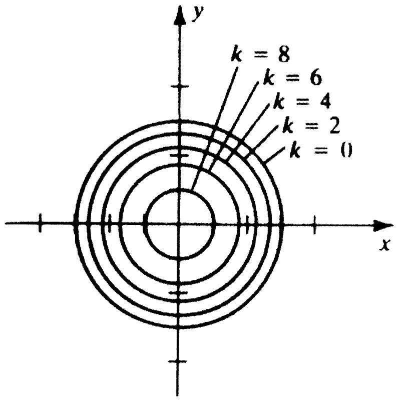
ارسم سطح الدالة $f(x, y)=9-x^2-y^2$ على المنطقة $D=\{(x, y); x^2+y^2 \leq 9\}$ موضحا أثر السطح في المستويات : $z=8$, $z=6$, $z=4$, $z=2$, $z=0$.

الحل

إن D تمثل جميع النقاط الواقعة داخل وعلى محيط الدائرة $x^2+y^2=9$ في المستوي xy لإيجاد أثر السطح في المستوي $z=k$ ، نعتبر المعادلة $k=9-x^2-y^2$. بالتالي $x^2+y^2=9-k$ وبوضع $k=0,2,4,6,8$ نحصل على دوائر أنصاف أقطارها على الترتيب $3, \sqrt{7}, \sqrt{5}, \sqrt{3}, 1$. فعندما $k=0$ نحصل على دائرة تقع في



الشكل(١-٨) (ب)



الشكل(١-٨) (أ)

المستوي xy معادلتها : $x^2+y^2=9$ ، مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 3 . أما عندما $k=2$ فإن الأثر : $x^2+y^2=7$ وهي معادلة دائرة تقع في المستوي $z=2$ مركزها $(0,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{7}$ وهكذا بالنسبة لقيم k الأخرى الشكلان (١-٨)أ و (١-٨)ب يوضحان تماماً أثر السطح في المستويات $z=0,2,4,6,8$ ، والمنحنيات الإسقاطية . كما يوضح الشكل (١-٨) أ فائدة أثر السطح في المستويات $z=k$ حيث $k=0, 2, 4, 6, 8$ في إعطاء فكرة جيدة

عن شكل السطح في الفضاء الثلاثي.

مثال (٨)

ارسم سطح الدالة $f(x,y)=8-x^2-2y$ موضحا أثر السطح في المستويات $z=f(x,y)$ في المستويات: $z=10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4,\ -6,\ -8$. ثم استفد من المنحنيات الإسقاطية في رسم هذا السطح .

الحل

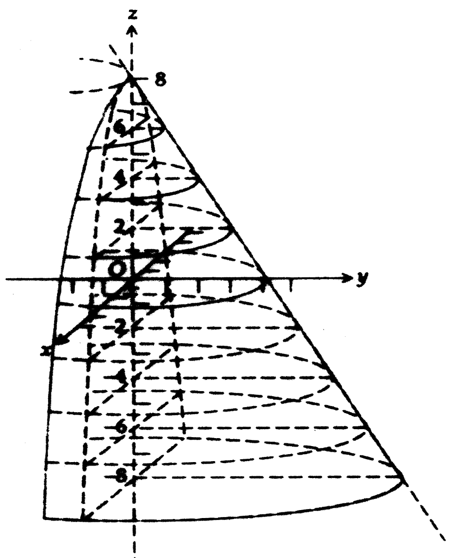
إن أثر السطح في المستوي $z=k$ هو المنحنى المعطى بالعلاقة الآتية : $x^2=-2(y-4+\frac{1}{2}k)$

إن هذه العلاقة تمثل مجموعة من القطوع المكافئة ، وهي أيضاً المنحنيات الإسقاطية للدالة f ، والشكل (١-٩)ب ، يوضح رسم المنحنيات الإسقاطية للدالة f المرافقة للقيم :

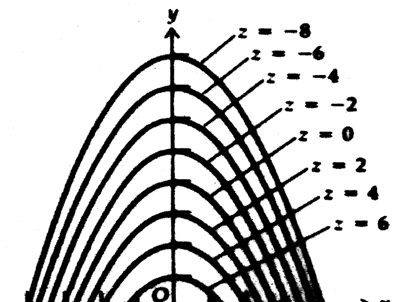
$$k=10,\ \ 8,\ \ 6,\ \ 4,\ \ 2,\ \ 0,\ \ -2,\ \ -4,\ \ -6,\ \ -8$$

أما أثر السطح في المستوي xz فهو المنحنى $z=8-x^2$ وبما أن معادلة المستوي xz هي $y=0$ ، لذا فإن أثر السطح في المستوي xz هو عبارة عن قطع مكافئ معادلته $z=8-x^2$.

الشكل (١-٩)أ يوضح المنحنيات الإسقاطية للدالة f على المستوي xy وهي عبارة عن قطوع مكافئة ، مفتوحة إلى اليسار ، ورؤوسها تقطع على المستقيم $2y+z=8$.



الشكل (١-٩) أ



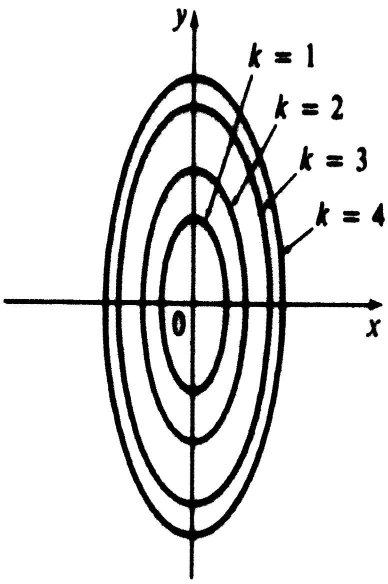
الشكل (١-٩) ب

مثال (٩)

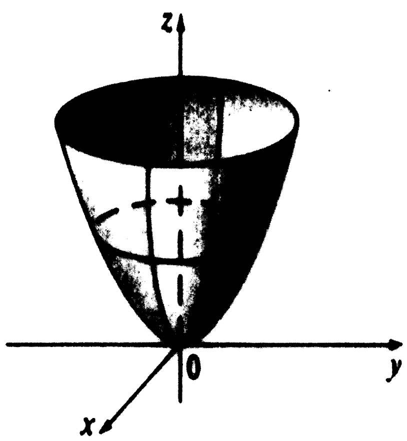
ارسم المنحنى $z = 4x^2 + y^2$ وعين عددا من المنحنيات الإسقاطية لهذا المنحنى .

الحل

بما أن $z = 4x^2 + y^2 \geq 0$ لكل (x, y) في $\mathbb{R}^2$ فإن أثر هذا السطح في المستوي $z = k$ يكون موجوداً عندما يكون $k \geq 0$ فإن كان $k = 0$ فإن الأثر هو النقطة $(0,0)$ ، أما إذا كان $k > 0$ فإن الأثر هو المنحنى المعطى بالعلاقة $\dfrac{x^2}{k/4} + \dfrac{y^2}{k} = 1$ وهي معادلة قطع ناقص ، أنـــصاف أقطـــاره $\dfrac{\sqrt{k}}{2}$ و $\sqrt{k}$ والشكل (١-١٠)ب يوضح المنحنيات الإسقاطية للمنحنى من اجل القيم $k = 1,2,3,4$ ، واعتماداً على المنحنيات الإسقاطية فإن رسم المنحنى يكون موضحاً في الشكل (١-١٠)أ .



الشكل (١-١٠) ب



الشكل (١-١٠) أ

(١-٣) تـــمـــاريـــن

١) إذا كانت $g(x, y) = \ln(xy + y - 1)$ فأوجد

$g(e,1), g(x,1), g(x+h, y), g(x, y+k)$.

٢) إذا كانت $w = f(x,y,z) = \dfrac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$

فاحسب $f(2, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}), f(\frac{-2}{x}, \frac{2}{x}, -1), f(x+2, 1, x-2)$

في التمارين من ٣ – ٨ أوجد نطاق الدوال الآتية :

٣) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$

٤) $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

٥) $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$

٦) $f(x,y,z) = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z$

٧) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x + 2y}$

٨) $f(x,y,z) = \dfrac{xe^y + \sqrt{z^2 + 1}}{xy \sin z}$

في التمارين من ٩ – ١١ أوجد $h(x,y)$،إذا كانت $h = f \circ g$ ثم أوجد نطاق h.

٩) $f(t) = \sin^{-1} t, g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

١٠) $f(t) = \sqrt{t}, g(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$

١١) $f(t) = e^t, g(x,y) = y \ln x$

في التمارين من ١٢– ١٧ أوجد بعض المنحنيات الإسقاطية ثم ارسم سطوح الدوال المعطاة

١٢) $z = f(x,y) = 4x^2 + y^2$

١٣) $z = f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$

١٤) $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

١٥) $z = f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

١٦) $z = f(x,y) = xy$

١٧) $z = f(x,y) = x + y + 1$

(١-٤)

• السطوح من الدرجة الثانية

Quadratic Surfaces

إن السطح من الدرجة الثانية هو منحني لمعادلة من الدرجة الثانية في ثلاثة متغيرات y,x و z . أما الشكل العام لمثل هذه المعادلة فهو :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0 \qquad (١)$$

حيث ، A,B,C,D,E,F,G,H,I,J أعداد حقيقية . لكن بواسطة انسحاب و دوران المحاور الإحداثية نستطيع كتابة هذه المعادلة على إحدى الصيغتين الآتيتين :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+J=0 \qquad (٢)$$

$$Ax^2+By^2+Iz=0 \qquad (٣)$$

ولكي نستطيع رسم السطح من الدرجة الثانية ، أو أي سطح ، فإن من المفيد تحديد أثر السطح من مستويات توازي المستويات الإحداثية ولنأخذ الآن بعض الأشكال الخاصة للمعادلتين (٢) و (٣) .

(١-٤-١) السطح الناقصي Ellipsoid

إن معادلة السطح الناقص تعطى بالعلاقة الآتية :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (١)$$

حيث إن a,b,c اعداد موجبة أما أثر السطح الناقصي في المستوي $z=k$ حيث $-c<k<c$ ، فهو عبارة عن قطع ناقص معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2} \qquad (٢)$$

وكحالة خاصة ، أثر السطح (١) في المستوي xy هو

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

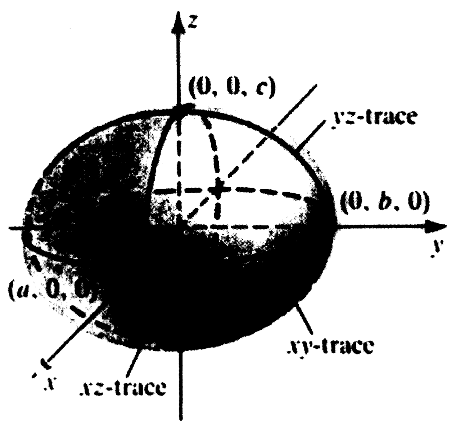
إن أثر السطح (١) في المستوي $x=0$ هو :

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

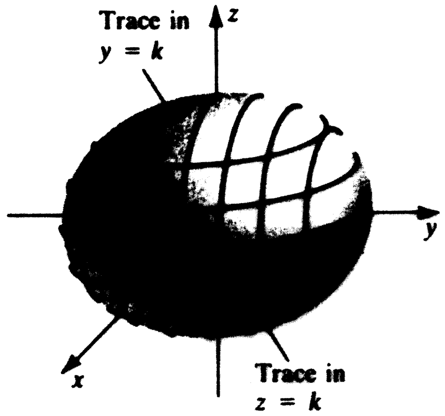
وكذلك فإن اثر السطح (١) في المستوي $y=0$ هو $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ كما يتقاطع السطح (١) مع المحاور الإحداثية بالنقاط الآتية :

$$(\mp a,0,0) \quad , \quad (0,\mp b,0) \quad , \quad (0,0,\mp c)$$

أيضاً السطح (١) محتوى في داخل العلبة المستطيلة : $|z|\le c$, $|y|\le b$, $|x|\le a$ وهو متناظر بالنسبة للمستويات الإحداثية والشكل (١-١١) يوضح صفات السطح (١)



الشكل (١-١١) أ



الشكل (١-١١) ب

عندما يكون $a=b=c$ فإن المعادلة (١) تصبح

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (٣)$$

وهي معادلة سطح كرة مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها a .

(١-٤-٢) السطح الزائدي Hyperbolic

أ) إن معادلة السطح الزائدي ذو القطعة الواحدة هي :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (٤)$$

إن هذا السطح متناظر بالنسبة للمستويات الاحداثية ، أما أثر السطح (٤) في أي مستوي $z=k$ هو عبارة عن منحنى قطع ناقص معادلته :

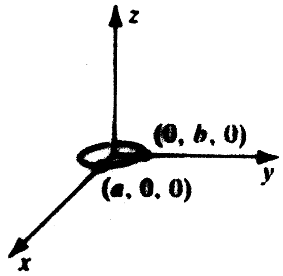
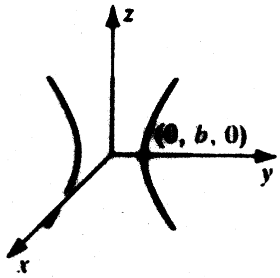
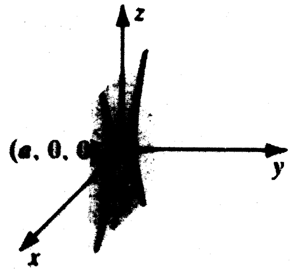
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$

حيث c,b,a أعداد حقيقية موجبة .

إن أثر السطح (٤) في المستوي xz هو : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ وهي معادلة قطع زائد ، كذلك اثر السطح (٤) في المستوي yz هو أيضاً قطع زائد معادلته : $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

إذا كانت $a=b$ فإن السطح (٤) يصبح سطحاً زائدياً دورانياً ناتج من دوران قطع زائد حول المحور z . إن الجدول التالي يوضح أثر السطح (٤) في المستويات الإحداثية :

رسم معادلة الأثر	وصف معادلة الأثر	معادلة الأثر	الأثر
	قطع ناقص	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	أثر السطح في المستوي xy

			
	قطع زائد	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	أثر السطح في المستوي yz
	قطع زائد	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	أثر السطح في المستوي xz

ب) إن معادلة السطح الزائدي ذو قطعتين هي :

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (٥)$$

حيث b,a و c أعداد حقيقية موجبة .

إن أثر السطح (٥) في المستويات الاحداثية xz و yz على التوالي هو :

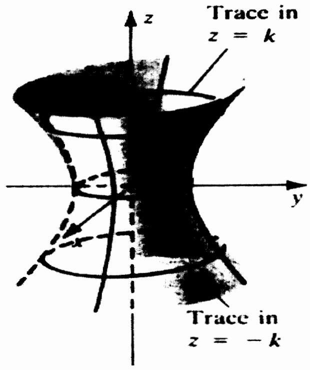
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad ، \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

وهما قطعان زائدان . أما إذا كانت $|k|>c$ فإن أثر السطح (٥) في المستوي $z=k$ هو قطع ناقص معادلته :

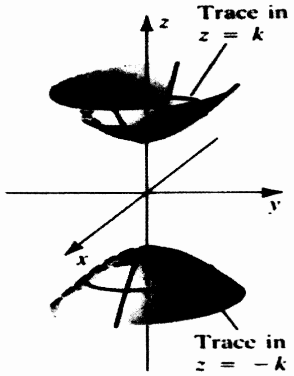
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$$

وإذا كانت $|k|<c$ فإن أثر السطح (٥) في المستوي $z=k$ غير موجود لان هذا السطح لا يتقاطع مع المستوي $z=k$.

وهكذا يتكون السطح (٥) من قطعتين ، الأولى تقع فوق المستوي $z=c$ والثانية تقع تحت المستوي $z=-c$. لهذا السبب يدعى السطح (٥) بالسطح الزائدي ذي القطعتين، والشكلين (١-١٢) ، (١-١٣) يوضحان ، على الترتيب السطحين (٤) ، (٥) :

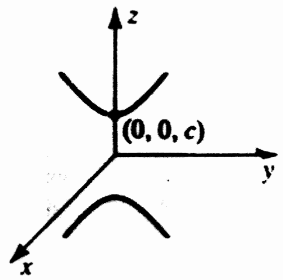
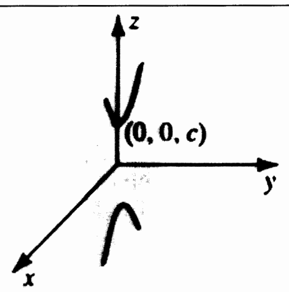


الشكل (١-١٢)



الشكل (١-١٣)

أما الجدول التالي فهو يوضح أثر السطح (٥) في المستويات الإحداثية :

رسم معادلة الأثر	وصف معادلة الأثر	معادلة الأثر	الأثر
لا يوجد رسم لمعادلة الأثر	المعادلة غير موجودة	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	أثر السطح في المستوي xy
	قطع زائد	$\frac{-y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	أثر السطح في المستوي yz
	قطع زائد	$\frac{-x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	أثر السطح في المستوي xz

(١-٤-٣) السطح المخروطي الناقصي المزدوج **The elliptic cone**

إن معادلة السطح المخروطي الناقصي المزدوج تعطى بالعلاقة الآتية :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \qquad (٦)$$

حيث b,a و c أعداد حقيقية موجبة .

إن أثر السطح (٦) في المستوى $z=k$ ، حيث $k\neq 0$ هو قطع ناقص معادلته هي :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$$

اما أثر السطح (٦) في المستوي xy فهو نقطة الأصل $(0,0,0)$.

عندما $a=b$ فإن السطح (٦) يدعى بالسطح المخروطي الدوراني ، لكن أثر هذا السطح في المستوي $x=k$ ، حيث $k\neq 0$ هو قطع زائد معادلته

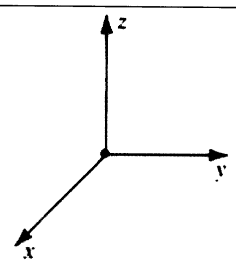
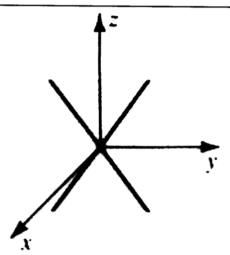
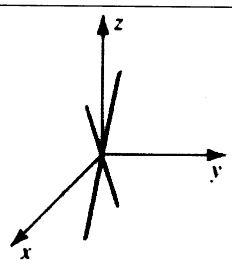
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}$$

أيضاً أثر السطح (٦) في المستوي $y=k$ ، $k\neq 0$ هو قطع زائد معادلته

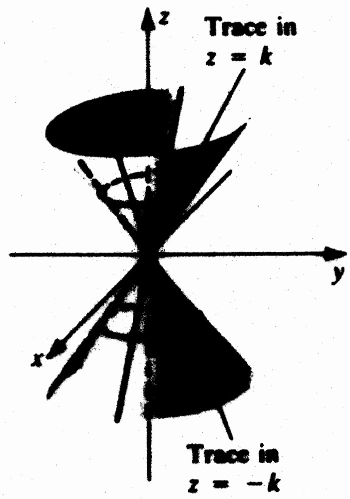
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{b^2}$$

للسطح (٦) قطعتين. الأولى تقع فوق المستوي $z=0$ والثانية تقع تحت المستوي $z=0$. أخيراً أثر السطح في المستويين $x=0$ و $y=0$ على الترتيب . المستقيمات الآتية : $z=\mp\frac{c}{b}y$ ، $z=\mp\frac{c}{a}x$

إن الجدول التالي يوضح أثر السطح (٦) في المستويات الإحداثية :

رسم معادلة الأثر	وصف معادلة الأثر	معادلة الأثر	الأثر
	نقطة الأصل	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	أثر السطح في المستوي xy
	مستقيمان يمران من نقطة الأصل	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	أثر السطح في المستوي yz
	مستقيمان يمران من نقطة الأصل	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	أثر السطح في المستوي xz

وأما الشكل (١-١٤) فهو يوضح وبالتفصيل رسم السطح (٦) :



الشكل (١-١٤)

(١-٤-٤) السطح المكافئ الناقصي The elliptical praboloid

إن الشكل العام لمعادلة السطح المكافئ الناقصي يعطى بالعلاقة الآتية :

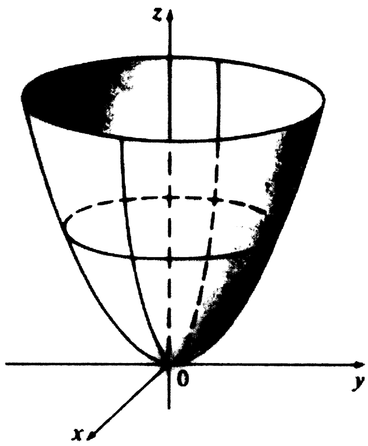
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c.z \qquad (٧)$$

حيث إن b,a عددان حقيقيان موجبان. أما c فهو عدد حقيقي لا يساوي الصفر. فإذا فرضنا أن $c>0$ فإن أثر السطح (٧) في المستوي $z=k$ هو المنحنى :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c.k \qquad (٨)$$

عندما $k=0$ فإن المعادلة (٨) تصبح : $b^2x^2+a^2y^2=0$ ومنه فإن أثر السطح (٧) في المستوي $z=0$ هو نقطة الأصل . أما إذا كانت $k\neq 0$ فإن المعادلة (٨) تمثل قطعاً ناقصاً ، أنصاف أقطاره تتزايد بتزايد $|k|$ إذا كانت إشارة k من إشارة c . أما إذا كانت إشارة العدد c تختلف عن إشارة k فإنه لا يوجد أثر للسطح في المستوي $z=k$.

إن أثر السطح (٧) في المستويين $x=k$ و $y=k$ هما قطعان مكافئان فإذا أردنا مثلاً إيجاد أثر السطح (٧) في المستوي $x=k$ فإن معادلته $\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ تمثل قطعاً مكافئاً يقع في المستوي $x=k$ والموازي للمستوي yz والذي يبعد عنه مسافة $|k|$. هكذا يكون السطح المكافئ الناقصي مقعراً ومفتوحاً إلى الأعلى إذا كانت $c>o$ كما هو موضح بالشكل (١-١٥) ويكون السطح (٧) مقعراً ومفتوحاً إلى الأسفل عندما يكون $c>0$. أخيراً عندما يكون $a=b$ فإن السطح (٧) يصبح سطحاً مكافئاً دورانياً وبالتالي يصبح أثر السطح (٧) في المستوي $z=k$ $(k\neq 0)$ عبارة عن دائرة مركزها يقع على المحور z .



الشكل (١-١٥)

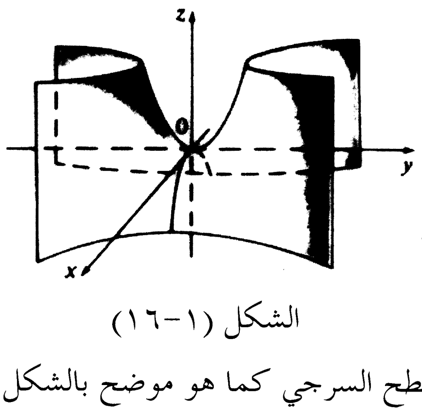
(١-٤-٥) السطح المكافئ الزائدي The hyperbolic paraboloid

إن معادلة السطح المكافئ الزائدي هي :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz \qquad (٩)$$

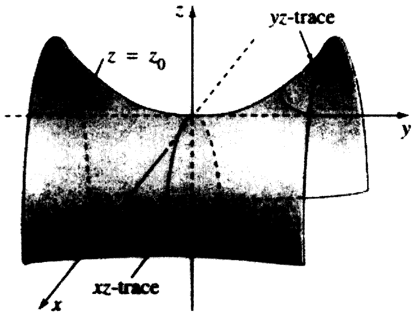
حيث إن a و b عددان حقيقيان وأما c فهو عدد لا يساوي الصفر . عندما $c>0$ فـإن أثـر السطح (٩) في المستوي $z=k$ $(k\neq 0)$ ، عبارة عن قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=c.k$ ، أما أثر السطح (٩) في المستوي $z=0$ فهو عبارة عن مستقيمين يمران بنقطة الأصل معادلتهما $y=\mp\frac{b}{a}x$.

إن أثر السطح (٩) في المستوي xz هو أيضا قطعاً مكافئ معادلته $z=\frac{x^2}{ca^2}$ وأخـيراً أثـر هـذا السطح في المستوي yz هو أيضا قطع مكافئ معادلته $z=-\frac{y^2}{cb^2}$ الشكل (١-١٦) يوضح رسم السطح (٩) عندما يكون $c<0$.



الشكل (١-١٦)

ويسمى أيضا السطح (٩) بالسطح السرجي كما هو موضح بالشكل (١-١٧)



الشكل (١-١٧)

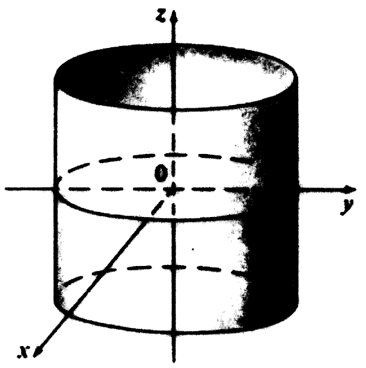
(١-٤-٦) السطح الأسطواني Quadric cylinders

أ) الاسطوانة الناقصية Elliptic cylinder

إن معادلة الاسطوانة الناقصية تعطى بالعلاقة الآتية :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (١٠)$$

إن هذا السطح يمكن اعتباره ناتجاً من دوران مستقيم موازي للمحور z ومتحرك على المنحنى $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ والموجود في المستوي xy كما هو موضح بالشكل (١-١٨)



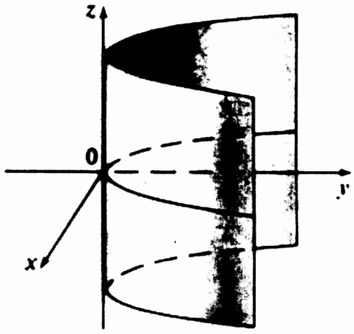
الشكل (١-١٨)

ب) الاسطوانة المكافئة Parabolic cylinder

إن معادلة الاسطوانة المكافئة تعطى بالعلاقة التالية :

$$y=ax^2 \qquad (١١)$$

حيث $a\in\Re$ و $a\neq 0$. إن السطح (١١) يمكن اعتباره مولّداً من دوران مستقيم موازي للمحور z ومتحرك على المنحنى $y=ax^2$ والموجود في المستوي xy كما هو موضح بالشكل (١-١٩) .
بنفس الطريقة تماماً يمكن اعتبار المعادلة $y^2=ax$ ، $(a\neq 0)$ على أنها تمثل أسطوانة مكافئة .



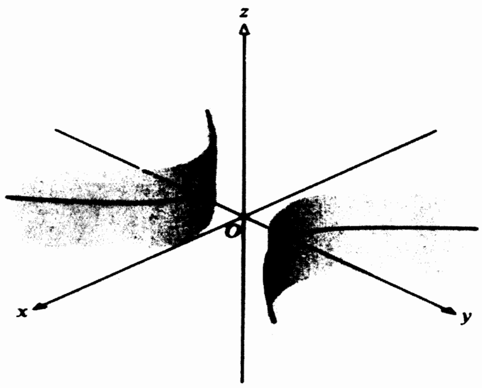
الشكل (١-١٩)

ج) الاسطوانة الزائدية Hyperbolic cylinder

معادلتها تعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (١٢)$$

يمكن اعتبار هذا السطح على أنه موّلد من دوران مستقيم موازي للمحور z ومتحرك على القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ والموجود في المستوى xy كما هو موضح بالشكل (١-٢٠) .



الشكل (١-٢٠)

مثال (١)

عين نوع كل سطح من السطوح الآتية :

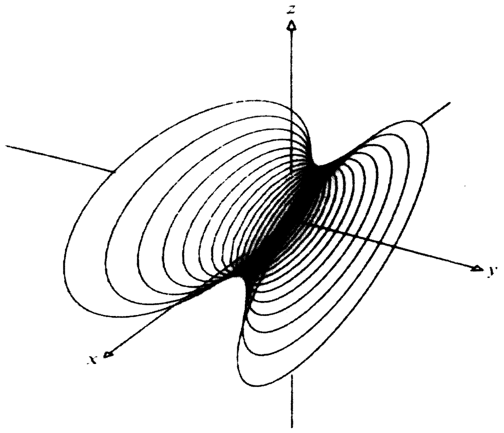
أ) $4x^2-18y^2+9z^2=36$ ب) $4y^2+9z^2-36x=0$ ج) $x^2+z^2-4x=0$

الحل

أ) يمكن كتابة المعادلة على الصيغة : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ وهذه المعادلة تمثل سطحاً زائدياً ذو قطعة واحدة محوره هو المحور y .

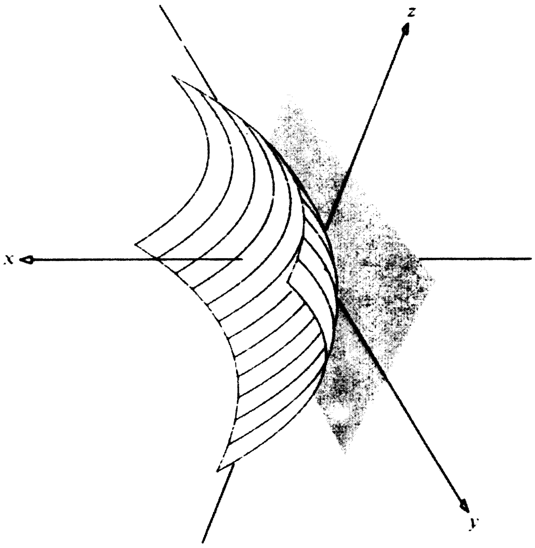
ب) يمكن كتابة المعادلة على الصيغة : $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=x$ ، وحسب الفقرة (١-٣-٤) نجد أن هـذه المعادلة تمثل سطحاً مكافئاً ناقصياً محوره هو المحور x كما أنه مقعر ومفتوح باتجاه المحور x .

ج) بإكمال المربع نجد أن $(x-2)^2 + z^2 = 4$ وهي معادلة اسطوانة دائرية ، محورها يوازي المحـــور oy و يمر من النقطة $(2,0,0)$ ، ونصف قطر الدائرة 2 ، كما أن هذا السطح يتعامد مع المـــستوى xz . ولتوضيح هذه السطوح انظر إلى الأشكال الآتية :



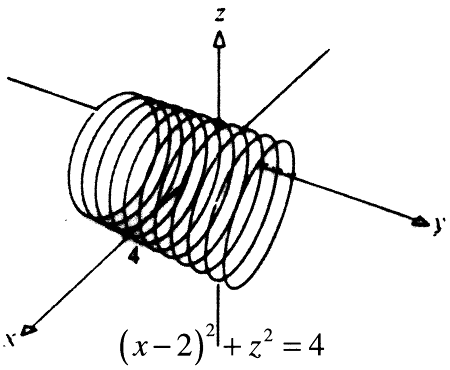
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$$

الشكل (١-٢١) أ



$$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=x$$

الشكل (١-٢١) ب



$$(x-2)^2+z^2=4$$

الشكل (١-٢١) جـ

مثال (٢)

حدد نوعية السطح الذي معادلته معطاة بالعلاقة الآتية : $4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$

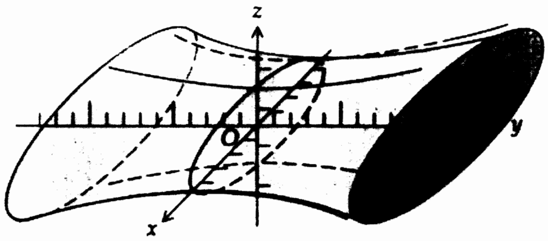
ثم ارسم هذا السطح .

الحل

لدينا المعادلة

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{100}+\frac{z^2}{4}=1$$

إن هذه المعادلة تشبه شكل المعادلة (٤) ، ومنه فإن هذا السطح هو سطح زائدي ذو قطعة واحـــدة ، وأن محور هذا السطح هو المحور y ، وأن أثـــر هـــذا الـــسطح بالمـــستوي $x=k$ هـــو المـــنحنى $\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{100}=1-\frac{k^2}{25}$ وهي معادلة قطع زائد . أما أثر السطح بالمستوي $z=k$ فهـــو المـــنحنى $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{100}=1-\frac{k^2}{4}$ وهي أيضاً معادلة قطع زائد ، وهكذا يكون رسم هـــذا الـــسطح معطـــى بالشكل (١-٢٢) .



الشكل (١-٢٢)

مثال (٣)

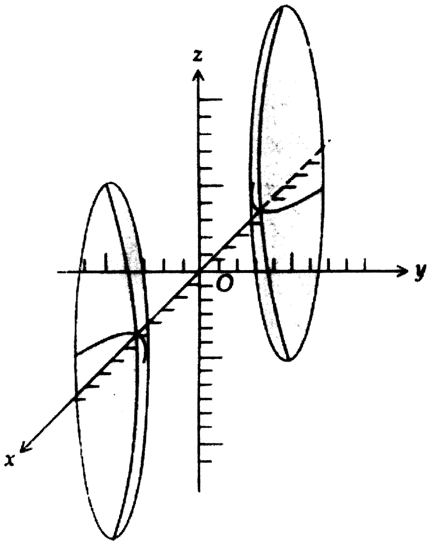
حدّد نوعية السطح الذي معادلته $4x^2-25y^2-z^2=100$ ثم ارسم هذا السطح .

الحل

لدينا المعادلة $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{100}=1$

وهذه المعادلة تشبه شكل المعادلة (٥) ، إذاً هذه المعادلة تمثل سطح زائدي ذو قطعتين ، وأن محور هذا السطح هو المحور x ، وأن اثر هذا السطح في المستوي $x=k$ ، حيـــث $|k|>5$ ، هـــو المـــنحنى $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{100}=\frac{k^2}{25}-1$ وهي معادلة قطع ناقص. بينما لا يوجد أثر للسطح في المستوي $x=k$ ، إذا كانت $|k|<5$. أما أثر السطح في المستوي $y=k$ فهو المـــنحنى $\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{100}=1+\frac{k^2}{4}$ وهـــي معادلة قطع زائد ، وكذلك أثر السطح في المستوي $z=k$ هو المنحنى $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1+\frac{k^2}{100}$ ، وهي معادلة قطع زائد أيضاً .

وهكذا فإن رسم هذا السطح موضح بالشكل (١-٢٣) .



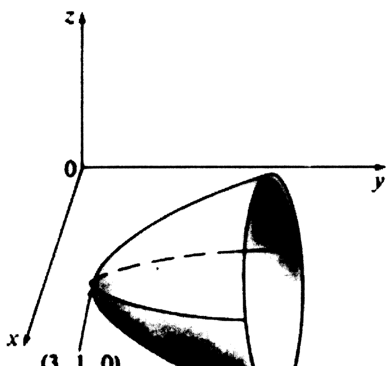
الشكل (١-٢٣)

مثال (٤)

حدد نوع السطح الذي معادلته $x^2+2z^2-6x-y+10=0$

الحل

يمكن كتابة المعادلة على الصيغة : $(y-1)=(x-3)^2+2z^2$.بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلــة (٧) ، نجد أن هذا السطح يمثل سطحاً مكافئاً ناقصياً ، ومحور هذا السطح يوازي المحور y ، ورأسه النقطة $(3,1,0)$ وأثره في المستوي $y=k$ ، حيث $k>1$. هو المــنحنى $(x-3)^2+2z^2=k-1$ وهــي معادلة قطع ناقص ، أما أثر السطح في المستوي xy فهو المنحنى $y=1+(x-3)^2$ وهذا المنحنى هو قطع مكافئ ، كما أن رسم هذا السطح معطى بالشكل (١-٢٤) .



الشكل (١-٢٤)

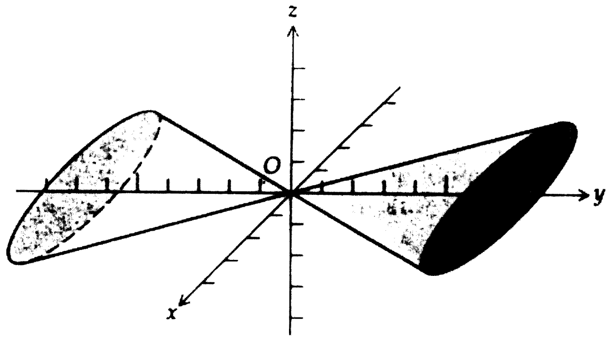
مثال (٥)

عين نوع السطح الذي معادلته $4x^2-y^2+25z^2=0$ ثم ارسمه .

الحل

لدينا المعادلة $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{100}+\frac{z^2}{4}=0$ بالمقارنة مع المعادلة (٦) ، في الفقرة (١-٣-٣) ، نجد أن هذا السطح هو سطح مخروطي ناقصي ، ولكن محوره هو المحور y . أما أثر هذا السطح في المستوي yz فهو $y=\mp 5z$ ، وأما أثر السطح في المستوي xy فهو أيضا المستقيمان $y=\mp 2x$ وأخيراً أثر السطح في المستوي $y=k$ ، حيث $k\neq 0$ هو قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{4}=\frac{k^2}{100}$.

يترك للقارئ للتأكد من أن أثر السطح في المستويين $x=k$ ، $y=k$ حيث $k\neq 0$ هما قطعان زائدان والشكل (١-٢٥) يوضح رسم هذا السطح .



الشكل (١-٢٥)

(١-٥) تمارين

أ) في التمارين من ١ - ١٤ حدد نوع كل سطح من السطوح الآتية ثم ارسمه.

١) $3y^2+12z^2=16x$ ٢) $4x^2-9y^2-z^2=16$

٣) $x^2=y^2+z^2$ ٤) $x^2-y^2+z^2=1$

٥) $4x^2+9y^2+36z^2=36$ ٦) $x=y^2+z^2$

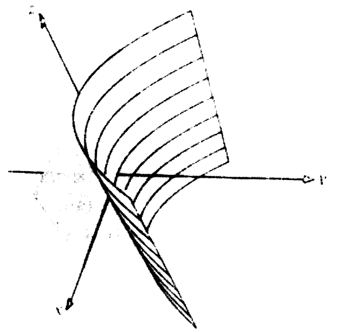
٧) $z=y^2$ ٨) $z=x^2+y^2+1$

٩) $x^2+4z^2-y=0$ ١٠) $qx^2+y^2-z^2-2y+2z=0$

١١) $yz=1$ ١٢) $y=4x^2-z^2$ (سطح سرجي)

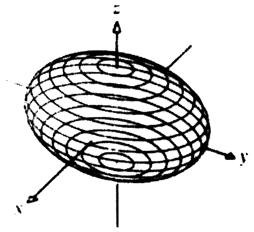
١٣) $z=9-x^2-y^2$ ١٤) $x^2+z^2=1$

ب) ليكن لدينا السطوح الموضحة بالأشكال الآتية :



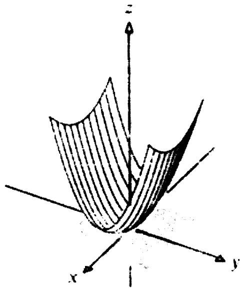
$y^2 = 4x$

الشكل (١-٢٦) أ



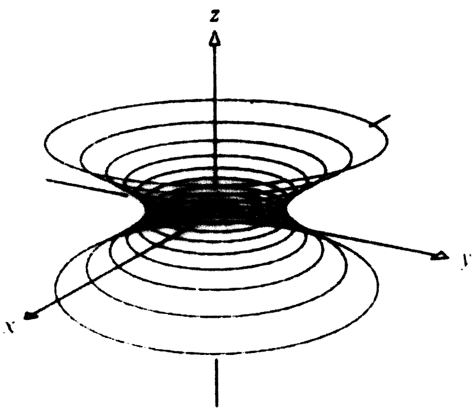
$2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$

الشكل (١-٢٦)ب



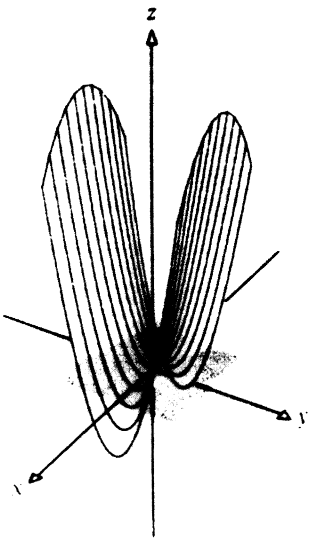
$2z = x^2 + 4y^2$

الشكل (١-٢٦) جـ



$2x^2 + y^2 - z^2 = 1$

الشكل (١-٢٦) د



$z^2 = 4y^2 - x^2$

الشكل (١-٢٦) هـ

أعطِ اسم كل سطح من السطوح الآتية :

١) $y^2 = 4x$

٢) $z = 4y^2 - x^2$

٣) $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$

٤) $2z = x^2 + 4y^2$

٥) $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$

(١-٦)

• النهايات والاتصال

Limits And Continuity

لتكن f دالة في متغيرين x و y، ولتكن D مجال الدالة. ما نريد دراسته في هذا الفصل مقدار التغير في قيم الدالة $f(x,y)$ وذلك عندما تتغير (x,y) في مجال الدالة f. وكتوضيح فيزيائي لنفرض أن لدينا صفيحة معدنية لها شكل المنطقة D كما هو موضح بالشكل (١-٣٠). كل نقطة (x,y) في الصفيحة يقابلها قيمة في درجة الحرارة $f(x,y)$ والتي يمكن تسجيلها على المحور w، فعندما تتحرك النقطة (x,y) على الصفيحة، فإن درجة الحرارة $f(x,y)$ قد تتزايد أو تتناقص أو تبقى ثابتة؛ بالتالي فإن النقطة $f(x,y)$ على محور w سوف تتحرك بالاتجاه الموجب أو السالب أو تبقى ثابتة على الترتيب. إذا ما اقتربت درجة الحرارة $f(x,y)$ من قيمة ثابتة ولتكن L، وذلك عندما تقترب (x,y) من نقطة ثابتة (a,b)، ونعبر عن ذلك بالكتابة

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

وتقرأ على أن نهاية $f(x,y)$ عندما (x,y) تقترب من (a,b) هي L.

قبل إعطاء التعريف الرياضي لمفهوم نهاية دالة في متغيرين أو ثلاثة متغيرات، نحتاج لتعريف القرص المفتوح والمغلق في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ وهذا ما يوضحه التعريفين التاليين.

(١-٦-١) تعريف

أ) لتكن (x_0,y_0) نقطة في المستوى xy، نعرّف القرص المفتوح الذي مركزه (x_0,y_0) ونصف قطره العدد الموجب r والذي نرمز له بالرمز $B((x_0,y_0);r)$ بأنه :

$$B((x_0,y_0);r)=\left\{(x,y);\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\right\}$$

كما نعرّف القرص المغلق الذي مركزه (x_0,y_0) ونصف قطره $r>0$ والذي نرمز له بالرمز $\bar{B}((x_0,y_0);r)$ بأنه :

$$\bar{B}((x_0,y_0);r)=\left\{(x,y);\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le r\right\}$$

ب) لتكن (x_0,y_0,z_0) نقطة في الفضاء الثلاثي. نعّرف الكرة المفتوحة التي مركزها (x_0,y_0,z_0) ونصف قطرها $r>0$ بالمجموعة الآتية :

$$B((x_0,y_0,z_0);r)=\left\{(x,y,z);\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<r\right\}$$

أما الكرة المغلقة التي مركزها (x_0,y_0,z_0) ونصف قطرها $r>0$ فهي :

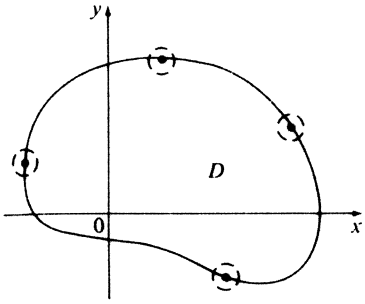
$$\bar{B}((x_0,y_0,z_0);r)=\left\{(x,y,z);\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\le r\right\}$$

(١-٦-٢) تعريف

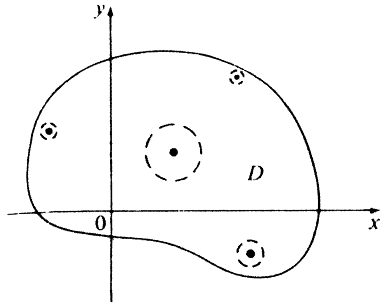
لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$

(أ) نقول إن (x_0, y_0) هي نقطة داخلية للمجموعة D إذا وجد عدد موجب r بحيث يكون : $B((x_0, y_0); r) \subset D$. انظر الشكل (١-٢٧) (أ).

(ب) نقول إن (a,b) هي نقطة حد للمجموعة D إذا كان أي قرص مفتوح مركزه (a,b) يحوي نقاط تنتمي إلى D ويحوي أيضاً نقاطاً لا تنتمي إلى D، نرمز لمجموعة نقاط الحد بالرمز ∂D . انظر الشكل (١-٢٧) ب .

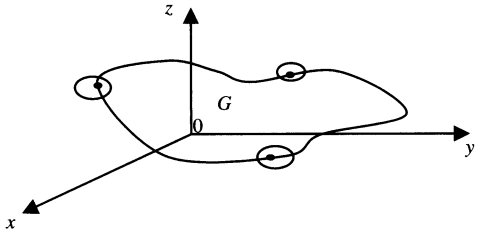


الشكل (١-٢٧) ب

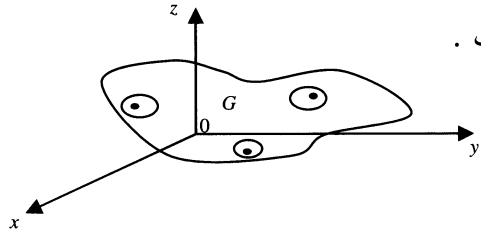


الشكل (١-٢٧) أ

بالمثل نعرف النقاط الداخلية ونقاط الحد لمجموعة جزئية D من $\mathbb{R}^3$ على النحو التالي: نقول إن (x_0, y_0, z_0) هي نقطة داخلية للمجموعة D إذا وجدت كرة مفتوحة $B((x_0, y_0, z_0); r)$ مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها $r > 0$ بحيث يكون : $B((x_0, y_0, z_0); r) \subset D$. ونقول إن (a,b,c) هي نقطة حد للمجموعة D إذا كانت أي كرة مفتوحة مركزها (a,b,c) تحتوي على نقاط تنتمي إلى D وتحتوي أيضاً على نقاط لا تنتمي إلى D، نرمز لمجموعة نقاط الحد بالرمز ∂D . كما هو موضح بالشكلين (١-٢٨) أ ، (١-٢٨) ب .



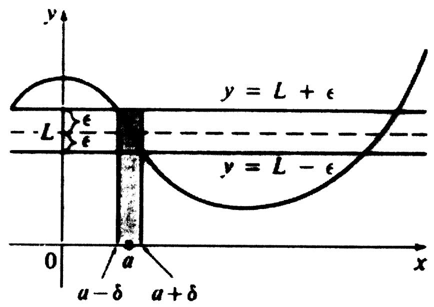
الشكل (١-٢٨) ب



الشكل (١-٢٨) أ

قبل أن نعطي تعريف نهاية دالة لأكثر من متغيّر، لنتذكر تعريف نهاية دالة في متغير واحد، لأن تعريف نهاية دالة لمتغير واحد ، يعتبر أساساً في إعطاء تعريف نهاية دالة لأكثر من متغير. لنفرض أن f دالة في متغير واحد ، معرّفة على فترة مفتوحة I تحتوي a ؛ ليس ضروريا أن تكون f معرّفة عند a؛ نقول إن الدالة f لها النهاية العدد الحقيقي L ، عندما x تقترب من a ،

ونكتب: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث إذا كانت $0<|x-a|<\delta$ فإن $|f(x)-L|<\varepsilon$.



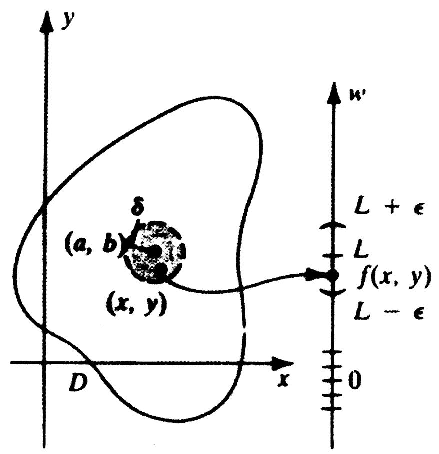
الشكل (١-٢٩)

من هذا التعريف نلاحظ أن المجموعة $0<|x-a|<\delta$ تمثل فترة مفتوحة مركزها a ، باستثناء النقطة a ، كما أن هناك طريقان لكي تقترب x من a وهو إما أن تقترب x من على يمين a أو تقترب x من على يسار a .

(١-٦-٣) تعريف

لتكن f دالة في متغيرين ، معرّفة على قرص مفتوح D مركزه (a,b) باستثناء النقطة (a,b) التي قد لا تكون الدالة معرفة عندها، فإننا نقول إن العدد الحقيقي L هو نهاية للدالة f عندما تقترب (x,y) من (a,b) ونكتب : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$. إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ فإن $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

الشكل (١-٣٠) يوضح التعريف السابق.

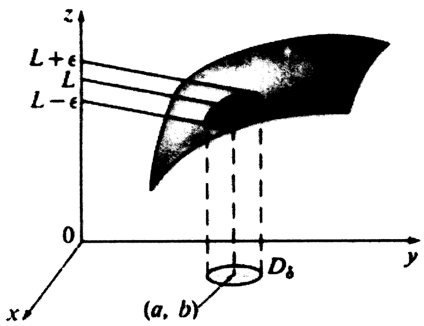


الشكل (١-٣٠)

أما الكتابة : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ فهي تكافئ إحدى الكتابتين الآتيتين :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L \quad \text{أو} \quad f(x,y)\to L \quad \text{عندما} \quad (x,y)\to(a,b)$$

إن التعريف (١-٦-٣) يعني أن المسافة بين $f(x,y)$ و L يمكن جعلها وبشكل اختياري، صغيرة صغرا كافيا وذلك بجعل المسافة بين (x,y) و (a,b) صغيرة صغرا كافيا (ولكن غير مساوية للصفر) . والشكل (١-٣١) ، يوضح التعريف (١-٦-٣) في الفضاء الثلاثي.



الشكل (١-٣١)

كما يمكن توضيح التعريف (١-٦-٣) بشكل آخر ، فهو يعني أنه لكل فترة مفتوحة $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ تحوي L نستطيع إيجاد قرص مفتوح D_δ مركزه (a,b) ، ونصف قطره $\delta>0$ المعتمد على ε و (a,b) بحيث إذا كان $(x,y)\in D_\delta \setminus \{(a,b)\}$ فإن $f(x,y)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. إن النقطة (a,b) الموجودة في التعريف (١-٦-٣) هي نقطة داخلية قد تكون موجودة في نطاق f .

(١-٦-٤) تعريف

لتكن f دالة في ثلاثة متغيرات (x,y,z) ، معرّفة على كرة مفتوحة B مركزها (a,b,c) باستثناء النقطة (a,b,c) التي قد لا تكون الدالة معرفة عندها، فإننا نقول إن العدد الحقيقي L هو نهاية للدالة f عندما (x,y,z) تقترب من (a,b,c) ونكتب :

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=L \quad \text{أو} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ z\to c}} f(x,y,z)=L$$

إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث إذا كان

$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<\delta$ فإن $|f(x,y,z)-L|<\varepsilon$.

إن هذا التعريف يعني أنه لكل فترة مفتوحة $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ مركزها L ، نستطيع إيجاد كرة مفتوحة B_δ مركزها (a,b,c) ، ونصف قطرها δ بحيث أنه لكل $(x,y,z)\in B_\delta \setminus \{(a,b,c)\}$ فإن $f(x,y,z)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. هكذا نلاحظ أن تعريف

نهاية دالة في عدة متغيرات ، هو امتداد طبيعي لتعريف نهاية دالة في متغير واحد والشيء الذي تغيّر هو تعريف جوار النقطة المراد دراسة النهاية عندها، فبدلا من الفترة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها δ ، أصبحت قرصا مفتوحا مركزه (a,b) ونصف قطره δ في حالة متغيرين ، وكرة مفتوحة مركزها (a,b,c) ونصف قطرها δ في حالة ثلاثة متغيرات.

نورد فيما يلي بعض الأمثلة التي توضح كيفية حساب نهايات الدوال في أكثر من متغير ، وستكون معظم الأمثلة لدوال في متغيرين .

مثال (١) :

باستخدام التعريف اثبت أن :

أ) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x=a$ لكل $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y=b$ لكل $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

الحل

أ) نثبت أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث إذا كان

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \text{ فإن } |x-a|<\varepsilon$$

بما أن $f(x,y)=x$ فإن

$$|f(x,y)-a|=|x-a|=\sqrt{(x-a)^2}\le\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$$

وهنا نختار $\delta\le\varepsilon$. وبالتالي إذا كان $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ فإن $|x-a|<\varepsilon$.

بالمثل نبرهن (ب).

مثال (٢)

باستخدام التعريف، اثبت أن

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)}(2x+3y)=11$$

الحل :

نثبت أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<\delta$ فإن $|2x+3y-11|<\varepsilon$. لدينا الآن

$$|f(x,y)-11|=|2x+3y-2-9|=2(x-1)+3(y-3)|\le 2|x-1|+3|y-3|$$

لما كان

$$|x-1|\le\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

$$|y-3|\le\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

فإن

$$|f(x,y)-11| \le 5\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} < 5\delta$$

وهنـــا نختـــار $\delta \le \frac{\varepsilon}{5}$ ، وبالتـــالي إذا كـــان $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<\delta$ فـــإن $|2x+3y-11|<\varepsilon$. أي أن

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y) = 11$$

مثال (٣)

اثبت أن

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

الحل

نلاحظ أن الدالة

$$f(x,y,z) = \frac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2}$$

معرّفة على $\mathbb{R}^3$ باستثناء $(0,0,0)$. ليكن $\varepsilon>0$، ولنوجد $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta$ فإن $|f(x,y,z)|<\varepsilon$.

الآن لكل $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ لدينا :

$$|f(x,y,z)| \le \frac{|y^3|+|x|z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{|y|y^2+|x|z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

وبما أن $|y| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ، $|x| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

فإن

$$|f(x,y,z)| \le \frac{|y|y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{|x|z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

وحيث إن $\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} \le 1$ ، $\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} \le 1$

لذا فإن $|f(x,y,z)| \le |y|+|x| \le 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} < 2\delta$

وهنا نختار $\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$، فإذا كان $0<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta$ فإن $|f(x,y,z)|<\varepsilon$.

مثال (٤) اثبت أن : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin(xy) = 0$.

الحل

ليكن $0<\varepsilon$ ولنوجد $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ فإن :

$$|f(x,y)-0|=|xy\sin(xy)|<\varepsilon$$

ولكن بما أن $(|x|-|y|)^2\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ لذا فإن :

$$|x|^2+|y|^2=x^2+y^2\geq 2|x||y|$$

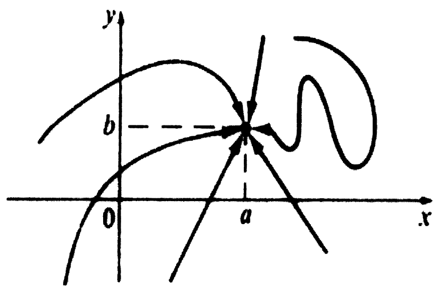
وعندئذ يكون لدينا $|xy\sin(xy)|\leq |x||y|\leq x^2+y^2$

وذلـــك لأن $|\sin(xy)|\leq 1$. إذا كـــان $x^2+y^2<\delta^2$ ، نختـــار $\delta\leq\sqrt{\varepsilon}$ ، فـــإذا كـــان $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ فإن $|xy\sin(xy)|<\varepsilon$.

لنعود مرة ثانية إلى الدالة f في متغير واحد ، نعلم أنه إذا كانت

$$\lim_{x\to a^+} f(x)\neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$

فإن $\lim_{x\to a} f(x)$ غير موجودة . وسبب ذلك أنه يوجد مساران يمران من a ، وهما مسارا من على يمين a ، ومسارا آخر من على يسار a ونهاية الدالة على كل منهما غير متساوية. لكـــن عنـــدما تكون f دالة في متغيرين فالأمر يختلف تماماً ، حيث إن جوار (a,b) هو قرص مفتـــوح مركـــزه (a,b) وبالتالي يوجد عدد غير منته من المسارات التي تمر من (a,b) ، ومن هنا تظهـــر صـــعوبة حساب نهايات الدوال في عدة متغيرات . والشكل (١-٣٢) يوضح هذه الملاحظة الأساسية .



الشكل (١-٣٢)

(١-٦-٥) نظرية

لتكن f دالة في المتغيرين x و y إذا كانت $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,,y)=L$ حيـــث $L\in\mathbb{R}$.

عندئذ فإن L عدد وحيد .

البرهان

نفرض أن $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L_1$ وأن $L\neq L_1$ ، حيث $L_1\in\mathbb{R}$ ولنبرهن أن هـــذا غـــير ممكـــن . لنفـــرض الآن أن $\varepsilon=|L-L_1|/2$ ، عندئـــذ يوجـــد $\delta>0$ بحيـــث إذا كـــان

$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ فـــإن $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ وان $|f(x,y)-L_1|<\varepsilon$.

ومنه، فإن

$$\begin{aligned}|L-L_1| &= |L-f(x,y)+f(x,y)-L_1| \\ &\le |L-f(x,y)|+|L_1-f(x,y)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

وهذا يقتضي أن $|L-L_1|<|L-L_1|$. لكن هذا مستحيل ، أي أن L عدد وحيد .

(١-٦-٦) نتيجة

إذا كانت $f(x,y)\to L_1$ عندما $(x,y)\to(a,b)$ على المسار C_1 وكانت $f(x,y)\to L_2$ عندما $(x,y)\to(a,b)$ على المسار C_2 ، حيث $L_1\ne L_2$ فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ غـــير موجودة.

وهكذا نلاحظ أنه إذا كانت $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ فإن قيمة هذه النهاية غير متعلقـــة بالمسارات التي تسلكها (x,y) عندما تقترب من (a,b) . بنفس الطريقة تماماً نبرهن صحة النظريـــة (١-٦-٥) من أجل دالة في ثلاثة متغيرات، كما أن لدينا نتيجة مشابهة للنتيجة (١-٦-٦).

مثال (٥)

إذا كانت $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. اثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .

الحل

إن الدالة f معرّفة على جميع نقاط المستوى xy باستثناء النقطة $(0,0)$ لنأخذ المسار الأول المحور x ، الذي معادلته $y=0$ عندئذ على هذا المسار لدينا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}(0)=0$$

ولنأخذ المسار الثاني المستقيم $y=x$ فيكون لدينا على هذا المسار

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

وحسب النتيجة (١-٦-٦) نستنتج أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .

تنويه: ننوه هنا إلى أمرين. الأول إن طريقة المسارات لا تستخدم لإثبات وجود النهاية وإنما لإثبات عدم وجود النهاية. والأمر الثاني أنه عند اختيار أي مسار يجب التأكد من أن هذا المسار يمر بالنقطـــة المراد دراسة النهاية عندها.

يمكن حل المثال (٥) بطريقة ثانية ، وذلك باستخدام الإحداثيات القطبية وهي :

$x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ وبالتالي فإنه إذا كان $(x,y) \to (0,0)$ فإن $(r\sin\theta, r\sin\theta) \to (0,0)$ تعني أن $r \to 0$ لأي قيمة للزاوية θ ، وبالتالي لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ 0\le\theta\le 2\pi}} \left(\frac{r^2 \sin\theta\cos\theta}{r^2}\right) = \lim_{\substack{r\to 0\\ o\le\theta\le 2\pi}} (\sin\theta\cos\theta) = \sin\theta\cos\theta$$

وحيث إن قيمة هذه النهاية تعتمد على قيم الزاوية θ ، إذاً فإن النهاية غير موجودة .

(١-٦-٧) نظرية

لتكن f و g دالتين في المتغيرين x و y معرّفتين على مجموعة D في المستوى xy . لنفرض أن (a,b) نقطة داخلية في D . فإذا كانت :

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ وكانت $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$ ، حيث $L,M \in \mathbb{R}$ فإن

(١) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)+g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

(٢) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)-g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

(٣) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y).g(x,y)] = \underbrace{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).}_{=L.M} \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

(٤ $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (Cf)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} C \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = CL$$

حيث C عدد ثابت .

أما إذا فرضنا أن D_1 نطاق $\frac{f}{g}$ ، وأن (a,b) هي نقطة داخلية في D_1 وكانت :

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ ، $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$ ، حيث $M \neq 0$ ، فإن

(٥) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

وتجدر الإشارة إلى أن هذه الخواص تبقى صحيحة في حالة دوال في ثلاثة متغيرات .

البرهان

نبرهن فقط الخاصية (٣) ونترك بقية الخواص كتمرين .

برهان الخاصة (٣) : نبرهن أولاً إذا كانت h دالة في المتغيرين x و y معرّفة على D ، وكانت

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = 0$ فإن $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).h(x,y) = 0$

بالفعل .بما أن $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ إذاً من أجل $\varepsilon=1$ يوجد $\delta_1>0$ بحيث إذا كان $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta_1$ فإن $|f(x,y)-L|<1$. إذاً لدينا

$$|f(x,y)|=|f(x,y)-L+L|\le|f(x,y)-L|+|L|<1+|L|$$

وبما أن $\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)=0$ إذاً من أجل $\frac{\varepsilon}{1+|L|}$ ، حيث $\varepsilon>0$ ، يوجد $\delta_2>0$ بحيث إذا كان $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta_2$ فإن $|h(x,y)|<\frac{\varepsilon}{1+|L|}$.

نختار الآن $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$ ، وبالتالي إذا كان $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ فإن $|f(x,y).h(x,y)|<(1+|L|)|h(x,y)|<\varepsilon$ ، وهذا يبرهن على أن

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).h(x,y)=0$$

الآن لدينا العلاقة الآتية

$$f(x,y).g(x,y)-L.M=f(x,y)[g(x,y)-M]+M[f(x,y)-L]$$

وبما أن
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (g(x,y)-M)=0$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y)-L)=0$$

مما سبق نستنتج أن
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\big[g(x,y)-M\big]=0$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} M\big(f(x,y)-L\big)=0$$

وبالتالي
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y).g(x,y)-L.M]=0$$

وهذا يكافئ تماماً

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).g(x,y)=L.M$$

وفي هذا البرهان استخدمنا صحة الخاصية (١) .

تنويه: ننوه هنا إلى أن نظرية (١-٦-٧) يمكن تعميمها لعدد منته من الدوال.

مثال (٦)

(ا) إذا كانت $f(x,y)=x^n$. اثبت أن $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^n=a^n$.

(ب) إذا كانت $f(x,y)=y^n$. اثبت أن $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y^n=b^n$.

(جـ) (أ) إذا كانت $f(x,y)=x^n y^m$. اثبت أن $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^n y^m=a^n b^m$.

حيث n ، m أعدادا صحيحة موجبة.

الحل

يتبع مباشرة من مثال (١) ونظرية (١-٦-٧).

مثال (٧)

باستخدام خواص النهايات في النظرية (١-٦-٧) احسب النهايات الآتية :

(أ) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2)$

(ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{3x^2 + xy + x^2y^2}{x^3 + x^2y + y^2x + 1}$

الحل : (أ) لدينا حسب المثال (٦) أن :

$$\lim_{(x,y)\to(-1,4)} 5x^2 = 5\ ,\quad \lim_{(x,y)\to(-1,4)} -2xy = 8\ ,\quad \lim_{(x,y)\to(-1,4)} y^2 = 16$$

إن هذه النهايات يمكن حسابها باستخدام التعريف (١-٦-٣) واعتماداً على الخاصة (١) نجد أن :

$$\lim_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2) = \lim_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2) + \lim_{(x,y)\to(-1,4)} (-2xy) + \lim_{(x,y)\to(-1,4)} y^2$$

$$= 5 + 8 + 16 = 29$$

(ب) أيضاً نستخدم الخاصيتين (١) و (٣) :

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} (3x^2 + xy + x^2y^2) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (3x^2) + \lim_{(x,y)\to1,-1)} (x.y) + \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x^2y^2)$$

$$= 3 - 1 + 1 = 3$$

وح

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x^3 + x^2y + y^2x + 1) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x^3) + \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (x^2y)$$

$$+ \lim_{(x,y)\to(1,-1)} y^2x + \lim_{(x,y)\to(1,-1)} (1) = 1 - 1 + 1 + 1 = 2$$

وحسب الخاصية (٥) فإن لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{3x^2 + xy + x^2y^2}{x^3 + x^2y + y^2x + 1} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (3x^2 + xy + x^2y^2)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (x^3 + x^2y + y^2x + 1)} = \frac{3}{2}$$

(١-٦-٨) ملاحظة : إذا كانت P كثيرة حدود في المتغيرين x و y وكانت (a,b) نقطة في المستوى xy . فبالاستفادة من خواص النهايات في النظرية (١-٦-٧) يمكن البرهنة على أن :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x,y) = P(a,b)$$

أما إذا كانت $h(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ دالة كسرية وكانت (a,b) نقطة في المستوى xy بحيث يكون $g(a,b) \neq 0$ ، فباستخدام خواص النهايات في النظرية (١-٦-٧) نستطيع البرهنة على أن

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = h(a,b)$$

وتجدر الإشارة إلى أن هذه الملاحظات يمكن تعميمها إلى دالة في ثلاثة متغيرات .

مثال (٨)

إذا كانت $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ فاختبر وجود النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

الحل

في هذا المثال لا نستطيع استخدام خواص النهايات . إذاً نبدأ باختبار وجود هذه النهاية عن طريق المسارات ولتكن $y=mx$ وهي مجموعة من المستقيمات المارة بنقطة الأصل ، لدينا إذاً :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{m^2x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{m^2+x^2}=0$$

لكن هذا لا يعني أن النهاية موجودة وتساوي صفرا . بالفعل هناك عدد غير منته من المسارات المارة بالنقطة $(0,0)$ غير المستقيمات المذكورة . من تعريف الدالة f نستطيع اختيار مسارات أخرى مارة بنقطة الأصل قد تبرهن أن قيمة النهاية غير موجودة . لنأخذ المسار $y=x^2$ وهو قطع مكافئ يمر بالنقطة $(0,0)$ ويكون لدينا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{x^4+x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

ومنه فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .

مثال (٩)

احسب $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x-y^4}{x^3-y^4}$ إن وجدت.

الحل

أيضاً لا نستطيع استخدام خواص النهايات ، لذلك نبدأ باختبار مسارات بسيطة تمر بالنقطة $(1,1)$ ولتكن $x=1$ ويكون لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=\lim_{y\to 1} f(1,y)=\lim_{y\to 1}\frac{1-y^4}{1-y^4}=1$$

الآن نأخذ مساراً آخر $y=1$ ويكون لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x,y)=\lim_{x\to 1} f(x,1)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}$$

ومنه فإن النهاية غير موجودة .

مثال (١٠)

احسب $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$ إن وجدت.

الحل

أيضاً لا نستطيع استخدام خواص النهايات ولكن نلاحظ أن :

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(y-2)(x-1)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

فإذا أخذنا أحد المسارين $x=1$ ، $y=2$ فإن قيمة النهاية تساوي صفرا. إن فكرة حل هذا المثال تشبه إلى حد كبير المثال (٥) . في هذا المثال نختار مسار يمر بالنقطة $(1,2)$ وليكن $y-2=m(x-1)$ وعلى هذا المسار يكون لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \lim_{x\to1} \frac{m(x-1)^2}{(x-1)^2+m^2(x-1)^2} = \lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1+m^2}\right) = \frac{m}{m^2+1}$$

وحيث إن النهاية تعتمد على ميل المستقيم m إذاً فإن قيمة النهاية غير موجودة. تجدر الملاحظة هنا إلى أن المسار الأخير تم استنتاجه من طبيعة الدالة :

$$f(x,y) = \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

مثال (١١)

بين ما إذا كانت النهاية الآتية موجودة :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4}$$

الحل

لنأخذ المسار $y=x$ ، فيكون لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4} = \lim_{x\to0} \frac{3x^2}{7x^4} = \lim_{x\to0} \frac{3}{7x^2} = +\infty$$

نستنتج مباشرة أن النهاية غير موجودة لأنه إذا كانت النهاية موجودة لكانت قيمتها تساوي إلى عدد حقيقي L .

مثال (١٢)

احسب $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2}$ إن وجدت.

الحل

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x(x^2+y^2)-2y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(3x-2y)}{x^2+y^2}$$

ولكن $x^2+y^2 \neq 0$ لان $(x,y)\to(0,0)$ ومنه :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x-2y)=0$$

تجدر الملاحظة إلى أنه يوجد العديد من خواص النهايات لم يتم إعطاؤها وهي تشبه تماماً خواص النهايات لدوال في متغير واحد ، وسوف نستخدم جزء منها في الأمثلة القادمة .

مثال (١٣)

احسب النهاية الآتية ، إن وجدت :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$$

الحل

لنأخذ أحد المحاور الإحداثية ، وليكن المحور x ، كمسار يمر من النقطة $(0,0,0)$ ، فعلى هذا المسار لدينا

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{x\to0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=0$$

لنأخذ الآن مساراً آخر يمر بالنقطة $(0,0,0)$ وهو عبارة عن مستقيم في الفضاء الثلاثي ، معطى بالمعادلات الوسيطية

$$x=y=z=t$$

وعلى هذا المسار لدينا

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{t\to0}\frac{3t^2}{3t^2}=1$$

ومنه فإن النهاية غير موجودة .

حتى الآن لا يوجد لدينا سوى استخدام التعريف لإثبات وجود نهاية دالة في عدة متغيرات.

النظرية التالية والتي تعرف باسم نظرية الحصر تساعد كثيرا في إثبات وجود النهاية.

(١-٦-٩) نظرية (نظرية الحصر)

لتكن f ، g ، h دوال في متغيرين ، معرّفة على قرص مفتوح D مركزه (a,b) ونصف قطره r باستثناء النقطة (a,b). إذا كانت :

$$g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$$

لكل $(x,y) \in D$ باستثناء النقطة (a,b) ، وكانت :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$$

فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

البرهان

ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$. إذاً يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث إذا كان

$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta_1$ فإن $|h(x,y) - L| < \varepsilon$.

بما أن $\lim\limits_{(x,y)\in(a,b)} g(x,y) = L$ إذاً يوجد $\delta_2 > 0$ بحيث إذا كان

$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta_2$ فإن $|g(x,y) - L| \varepsilon$.

الآن نختار $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$، فنجد أنه إذا كان $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ ، فإن

$L - \varepsilon < g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y) < L + \varepsilon$،

ومنه فإن $L - \varepsilon < f(x,y) < L + \varepsilon$ أو $|f(x,y) - L| < \varepsilon$. إذاً $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

تجدر الإشارة إلى أن هناك نصاً مماثلاً للنظرية (١-٦-٩) في حالة دوال في ثلاثة متغيرات .

الأمثلة التالية توضح فائدة استخدام نظرية الحصر في إيجاد نهاية دالة في عدة متغيرات.

مثال (١٤)

أثبت أن : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

الحل

نعلم أن $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$ و $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$

وبالتالي فإن

$$0 \le \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x|.|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x|$$

لكل $(x,y) \ne (0,0)$ وبما أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$$

وحسب النظرية (١-٦-٩) ، نستنتج أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ومنه فإن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

(١-٦-١٠) ملاحظة:

في المثال (١٦) استخدمنا الحقيقة التالية :

إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y فـإن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ إذا وفقـط إذا كانـت $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)|=0$. إن هذه الحقيقة تبقى صحيحة أيضاً لدالة في ثلاثة متغيرات. أمـا برهان هذه الحقيقة فهو ينتج من استخدام تعريف نهاية الدالة ، ويترك للقارئ التأكد من ذلك .

مثال (١٥)

اثبت أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

الحل

لدينا

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|.x^2+|y|.y^2}{x^2+y^2} = \frac{|x|x^2}{x^2+y^2} + \frac{|y|.y^2}{x^2+y^2}$$

وحيث إن $x^2 \le x^2+y^2 \quad , \quad y^2 \le x^2+y^2$

لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ لذلك فإن

$$0 \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le |x|+|y|$$

لكل $(x,y)\ne(0,0)$. وبما أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0$$

إذاً وحسب النظرية (١-٦-٩) ، نجد أن : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$ ومنه

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$

من الممكن أيضاً حساب النهاية في المثال (١٧) باستخدام الإحداثيات القطبية . فإذا كتبنا

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^3}$$

فإن
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{r^2}$$

أما $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \to 0$ فهي تعني أن $r \to 0$ لأي قيمة للمتغير θ وعندئذ :
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ 0\le\theta\le 2\pi}} r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$$

وحيث أن $0 \le |r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)| \le 2r$ لكل θ وحسب النظرية (١-٦-٩) نجد أن :
$$\lim_{\substack{r\to 0\\ 0\le\theta\le 2\pi}} r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 0$$

مثال (١٦)

لتكن f دالة معرّفة بالشكل الآتي :
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z) \ne (0,0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

برهن على أن $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$

الحل

نعلم أن
$$|yz| \le y^2 + z^2 + x^2$$

وبالتالي فإن $0 \le |f(x,y,z)| = 3\dfrac{|x|.|y|.|z|}{x^2+y^2+z^2} \le 3|x|$ لكل $(x,y,z) \ne (0,0,0)$.
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x| = 0$$

إذاً وحسب نظرية الحصر، والملاحظة (١-٦-١٠) نجد أن $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$

مثال (١٧)

برهن أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2) = 0$

الحل

لدينا
$$0 \le |xy\ln(x^2+y^2)| \le (x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|$$

وحيث إن $x^2+y^2 \to 0$ إذاً $|\ln(x^2+y^2)| = -\ln(x^2+y^2)$

فإذا فرضنا $u = x^2+y^2$ فإن :
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{u\to 0} -(u\ln u) = 0$$

وحسب نظرية الحصر نجد أن : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=0$

يمكن أيضاً استخدام الإحداثيات القطبية . بالفعل لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=\lim_{\substack{r\to 0\\ 0\le\theta\le 2\pi}} 2r^2\cos\theta\sin\theta\ln r=0$$

(١-٦-١١) تعريف

لتكن f دالة في متغيرين x, y ، معرّفة على منطقة D . ولتكن (a,b) نقطة داخلية في D . نقول إن f دالة متصلة عند النقطة (a,b) إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث إذا كان $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ فإن $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$، كما ويمكن أن نعطي تعريفا آخرا مكافئا وهو أن f تكون متصلة عند (a,b) إذا تحققت الشروط الآتية :

١) f معرّفة عند (a,b) .

٢) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجودة .

٣) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$

أما إذا كان إحدى هذه الشروط غير محقق ، فنقول إن f غير متصلة عند (a,b) . كما نقول إن f متصلة على النقاط الداخلية في D ، إذا كانت متصلة عند كل نقطة داخلية في D .

(١-٦-١٢) تعريف

لتكن f دالة في ثلاثة متغيرات x ، y ، z ، معرّفة على منطقة D ، ولتكن (a,b,c) نقطة داخلية في D نقول إن f دالة متصلة عند النقطة (a,b,c) إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث إذا كان

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<\delta$ فإن $|f(x,y,z)-f(a,b,c)|<\varepsilon$.

إن هذا التعريف يكافئ التعريف الآتي :

تكون f متصلة عند (a,b,c) إذا تحققت الشروط التالية :

١) f معرّفة عند (a,b,c) .

٢) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)$ موجودة .

٣) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=f(a,b,c)$

أما إذا كان إحدى هذه الشروط غير محقق ، فنقول إن f غير متصلة عند (a,b,c) . كذلك نقول إن f متصلة على النقاط الداخلية في D إذا كانت متصلة عند كل نقطة داخلية في D.

الآن نعطي عدة أمثلة لتوضيح مفهوم اتصال الدوال في عدة متغيرات .

مثال (١٨)

ادرس اتصال الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل

الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}^2$ ، أي أن نطاق f هو كل نقاط المستوي xy ، لذلك يجب أن نبحث اتصال هذه الدالة عند كل نقطة $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

فإذا كانت $(a,b)\neq(0,0)$ فإن $a^2+b^2\neq 0$ ، ومن الخاصة (٥) ، نظرية (١-٦-٧) ، يكون لدينا

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}=f(a,b)$$

وبالتالي فإن f متصلة عند (a,b) ، وحيث أن (a,b) نقطة اختيارية ، لذا فإن f متصلة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

نبحث الآن اتصال الدالة عند $(0,0)$. قد برهنا في المثال (١٥) أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$$

وحيث إن $f(0,0)=0$. لذا فإن الدالة f أيضا متصلة عند $(0,0)$ وبالتالي f متصلة على $\mathbb{R}^2$.

مثال (١٩)

ابحث اتصال الدالة الآتية

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

عند النقطة $(0,0)$.

الحل

وجدنا في مثال (٨) أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة. لذلك فإن الدالة f غير متصلة عند $(0,0)$.

مثال (٢٠)

ابحث اتصال الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & ; \quad y=x^2+1\\ 0 & ; \quad y\neq x^2+1\end{cases}$$

عند النقطة $(0,0)$.

الحل

إن نطاق الدالة هو جميع نقاط المستوي xy . نريد إثبات أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث إذا كان $\delta>\sqrt{x^2+y^2}>0$ فإن $|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$. ليكن D قرص مفتوح مركزه نقطة الأصل ونصف قطره $\delta\leq 1$. بما إن $D\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2+1\}=\phi$ فإن $f(x,y)=0$ لكل $(x,y)\in D$. بالتالي إذا كان $\delta>\sqrt{x^2+y^2}>0$ فإن

$$|f(x,y)-f(0,0)|=|0-0|=0<\varepsilon$$

بالتالي $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. وعليه الدالة متصلة عند $(0,0)$.

مثال (٢١)

ابحث اتصال الدالة

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

عند النقطة $(0,0,0)$

الحل

لكل $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ فإن

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\leq 1 \ ، \quad \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\leq 1 \ ، \quad \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\leq 1$$

وأن

$$|f(x,y,z)|\leq\frac{x^2|x|}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2|y|}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2|z|}{x^2+y^2+z^2}$$

وحيث إن

$$|f(0,0,0)|=0\leq|x|+|y|+|z|$$

وبالتالي فإن $0\leq|f(x,y,z)|\leq|x|+|y|+|z|\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$

وحسب نظرية الحصر (١-٦-٩) فإن لدينا :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0=f(0,0,0)$$

لأن $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (|x|+|y|+|z|)=0$ ، $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (0)=0$ أي أن f متصلة عند النقطة $(0,0,0)$.

مثال (٢٢)

ابحث اتصال الدالة

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

، عند النقطة $(0,0,0)$.

الحل

على المسار $y=z=0$ لدينا

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{0}{x^2}\right)=0$$

أما على المسار : $x=t$ ، $y=t$ ، $z=2t$ (وهو مستقيم في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$ معطى بالمعادلات الوسيطية ، حيث t وسيط) المار بالنقطة $(0,0,0)$ لدينا :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=\lim_{t\to 0} f(t,t,2t)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{5t^2}=\frac{1}{5}$$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ غير موجودة ، ومنه فإن f غير متصلة عند $(0,0,0)$

(١-٦-١٣) نظرية

إذا كانت g دالة في المتغيرين x و y ، ولتكن $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=b$ وإذا كانت f دالة في متغير واحد ، متصلة عند b فإن

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y))=f\Big(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\Big)$$ **إذا وفقط إذا كانت**

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\circ g)(x,y)=f(b)$$

البرهان

بما أن f متصلة عند b إذاً لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_1>0$ بحيث إذا كانت $|u-b|<\delta_1$ فإن $|f(u)-f(b)|<\varepsilon$. بما أن

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=b$$

إذاً من أجل $0 < \delta_1$ يوجد $0 < \delta_2$ بحيث إذا كان $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta_2$

فإن $|g(x,y)-b| < \delta_1$ وبوضع $u = g(x,y)$ نجد $|u-b| = |g(x,y)-b| < \delta_1$ وعندئذ

إذا كان $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta_2$ فإن $|f(g(x,y)) - f(b)| < \varepsilon$

أي إن $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f \circ g)(x,y) = f(b)$.

(١-٦-١٤) نتيجة

إذا كانت g دالة في متغيرين x و y ، ولنفرض أن g متصلة عند (x_0, y_0). فإذا كانت f دالة في متغير واحد متصلة عند $g(x_0, y_0)$ فإن $f \circ g$ متصلة عند (x_0, y_0) .

بنفس طريقة برهان هذه النظرية السابقة نستطيع برهان النظرية الآتية

(١-٦-١٥) نظرية

إذا كانت g دالة في ثلاثة متغيرات x ، y و z ، ولتكن

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} g(x,y,z) = b$$

وإذا كانت f دالة في متغير واحد متصلة عند b فإن

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} (f \circ g)(x,y,z) = f(b)$$

إذا وفقط إذا

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(g(x,y,z)) = f\Big(\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} g(x,y,z)\Big)$$

وكنتيجة لهذه النظرية إذا كانت g دالة في ثلاثة متغيرات x ، y و z ، متصلة عند (x_0, y_0, z_0) وإذا كانت f دالة في متغير واحد متصلة عند $g(x_0, y_0, z_0)$ فإن $f \circ g$ متصلة عند (x_0, y_0, z_0) .

مثال (٢٣)

ادرس اتصال الدول الآتية :

أ) $h(x,y) = e^{x^2+5xy+y^2}$ ب) $h(x,y) = \sin\left(\sqrt{y-4x^2}\right)$

ج) $h(x,y,z) = \ln(36 - 4x^2 - y^2 - 9z^2)$

الحل

أ) نطاق الدالة h هو $\mathbb{R}^2$. نضع $g(x,y) = x^2 + 5xy + y^3$ ، $f(t) = e^t$ . . بما أن $g(x,y)$ كثيرة حدود في x و y ، إذاً فهي متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ ، وذلك حسب الملاحظة (١-٦-٨) أما الدالة f فهي أيضاً متصلة على $\mathbb{R}$ ، إذا وحسب النتيجة (١-٦-١٤) نجد $h(x,y) = (f \circ g)(x,y)$ متصلة عند كل نقطة $(x,y) \in \mathbb{R}$.

ب) نفرض $g(x,y)=y-4x^2$ ، $f(t)=\sin(\sqrt{t})$ نعلم أن g كثيرة حدود ، وبالتالي فهي متصلة على $\mathbb{R}^2$ ، ولكن الدالة f متصلة فقط لكل t ، حيث $t\geq 0$. لذلك :

$$h(x,y)=(f\circ g)(x,y)=\sin\left(\sqrt{y-4x^2}\right)$$

متصلة عند كل نقطة $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ، حيث إن $t=g(a,b)\geq 0$ ، أي أن h متصلة عند أي نقطة $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ، بحيث أن $b\geq 4a^2$.

ج) نفرض $g(x,y,z)=36-4x^2-y^2-9z^2$ ، $f(t)=\ln t$ نعلم أن g كثيرة حدود وبالتالي فهي متصلة على $\mathbb{R}^3$ ، وأن الدالة f متصلة لكل t ، حيث $t>0$. بما أن :

$$h(x,y)=(f\mathrm{o}g)(x,y,z)=\ln(36-4x^2-y^2-9z^2)$$

إذاً h تكون متصلة عند كل نقطة $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ ، حيث إن $t=g(a,b,c)>0$. أي أن h تكون متصلة عند كل نقطة $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ حيث إن $36-4a^2-b^2-9c^2>0$. هكذا فإن h متصلة عند كل نقطة داخلية من نقاط السطح الناقصي الذي معادلته : $4x^2+y^2+9z^2=36$ وأن h غير متصلة عند النقاط الواقعة على السطح الناقصي أو عند النقاط الواقعة خارج السطح الناقصي.

باستخدام تعريف الاتصال (١-٦-١١) ، وطريقة برهان النظرية (١-٦-٧) ، نستنتج برهان النظرية التالية :

(١-٦-١٦) نظرية

إذا كانت f ، g دالتين في المتغيرين x ، y ، متصلتين عند النقطة (a,b) فإن :

١) $f+g$ متصلة عند (a,b) .

٢) $f-g$ متصلة عند (a,b) .

٣) $f.g$ متصلة عند (a,b) .

٤) $\dfrac{f}{g}$ متصلة عند (a,b) بشرط أن يكون $g(a,b)\neq 0$.

يوجد نص مماثل للنظرية (١-٦-١٦) ، في حالة دوال في ثلاثة متغيرات .

مثال (٢٣) : ادرس اتصال الدالتين الآتيين :

١- $f(x,y,z)=\dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$

٢- $f(x,y)=e^{xy}\sin^{-1}(x^2+y^2)$

الحل

١- إن f عبارة عن حاصل قسمة دالتين $g(x,y,z)=xz$ ، $h(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$. أما الدالة g فهي متصلة على $\mathbb{R}^3$ ، وأما الدالة h فهي متصلة عند كل نقطة $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ باستثناء النقاط (x,y,z) التي من أجلها تكون $x^2+y^2+z^2<1$. إذاً وحسب النظرية (١-٦-١٦) تكون f متصلة عند كل نقطة $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ماعدا النقاط (x,y,z) التي تحقق المتباينة $x^2+y^2+z^2\le 1$ ، وبتعبير آخر تكون f متصلة على $\mathbb{R}^3$ باستثناء النقاط الواقعة داخل وعلى سطح الكرة التي مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1 .

٢- إن الدالة f عبارة عن حاصل ضرب دالتين $g(x,y)=\sin^{-1}(x^2+y^2)$ ، $h(x,y)=e^{xy}$ من النتيجة (١-٦-١٥) ، لدينا h دالة متصلة على $\mathbb{R}^2$ ، وان الدالة g متصلة أيضاً عند كل نقطة $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، بحيث أن $x^2+y^2\le 1$. وحسب النظرية (١-٦-١٦) تكون f متصلة عند النقاط الواقعة داخل وعلى محيط الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1 .

(١-٦-١٧) ملاحظة : بالاستفادة من النظرية (١-٦-١٦) ، يمكن البرهان بسهولة على أن كثيرات الحدود في متغيرين متصلة على $\mathbb{R}^2$ ، وأن كثيرات الحدود في ثلاثة متغيرات أيضاً متصلة على $\mathbb{R}^3$. وأيضا الدوال الكسرية في عدة متغيرات متصلة عند كل نقطة في مجالها.

(١-٧) تمارين :

في التمارين من ١-٣ استخدم التعريف لإثبات النهاية: ١

١- $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)}(6x-3y)=0$ ٢- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+y^2)=2$

٣- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,0)}(xz+y^2+3z)=1$

في التمارين من ٤-١٩ اختبر وجود النهايات الآتية ، واحسب قيمة النهاية في حالة وجودها:

٤- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ ٥- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+1}}$

٦- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{\dfrac{x-y}{2x+y}}$ ٧- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}\dfrac{x+y}{xy+1}$

٨- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{3x^2+xy^2-3xy-y^3}{x^2-y^2}$ ٩- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,2,0)}\dfrac{x^2y^2+y^2z^2}{x^2+z^2}$

١٠- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{xy+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ١١- $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-2)}\ln(x+y)$

١٢- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^4 + yx^3 + z^2x^2}{x^4 + y^4 + z^4}$

١٣- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-2y}{x^2+y^2}$

١٤- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{(e^x + e^y + e^z)^2}{e^{2x} + e^{2y} + e^{2z}}$

١٥- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^2}{x^2+y^2}$

١٦- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

١٧- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

١٨- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ، حيث :
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

١٩- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ ، حيث :
$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2+z^2} & ; \ (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & ; \ (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

في التمارين من ٢١-٢٨ ابحث اتصال الدوال الآتية :

٢٠- $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

٢١- $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & ; \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

٢٢- $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{6x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

٢٣- $f(x,y)=\ln(2x+3y)$

٢٤- $f(x,y)=\tan(x^4-y^4)$

٢٥- $f(x,y)=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$

٢٦- $f(x,y,z)=\sqrt{xy}\cot z$

٢٧- $f(x,y,z)=y\ln(x.z)$

٢٩- أوجد قيمة r التي تجعل الدالة :

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{(x+y+z)^r}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

متصلة عند $(0,0,0)$.

(١-٨)

• الاشتقاق الجزئي

Partial Differentiation

لتكن f دالة في متغير واحد x نعلم أن f تكون قابلة للاشتقاق عند x إذا كانت النهاية $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ موجودة. لكن عندما تكون f دالة في عدة متغيرات فإن الأمر يختلف، حيث يوجد مشتقة للدالة f بالنسبة لأحد المتغيرات ، وتدعى هذه المشتقة بالمشتقة الجزئية، ولهذا يوجد مشتقة عادية في حالة دالة في متغير واحد ، ويوجد مشتقات جزئية في حالة دالة في عدة متغيرات .

(١-٨-١) تعريف

لتكن f دالة في المتغيرين x و y ، ولتكن (x,y) نقطة في نطاق الدالة f . نعّرف المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة لكل من المتغيرين x و y عند (x,y) كما يلي :

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

على الترتيب، بشرط أن النهاية موجودة.

نسمي كل من $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$ المشتقة الجزئية الأولى للدالة f بالنسبة للمتغيرين x و y على الترتيب، ونكتب

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad , \quad f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

نلاحظ في تعريف $f_x(x,y)$ أن المتغير y يكون ثابتاً ، ولهذا لإيجاد $f_x(x,y)$ نعتبر y ثابتاً ونشتق الدالة f بالنسبة للمتغير x . أما في تعريف $f_y(x,y)$ فإن المتغير x يكون ثابتاً وبالتالي لحساب $f_y(x,y)$ نعتبر x ثابتاً ، ونشتق الدالة f بالنسبة للمتغير y .

مثال (١)

أوجد باستخدام التعريف، كلاً من $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ للدالة التالية :

$$f(x,y)=3x^2-2xy+y^2$$

الحل

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3(x+h)^2-2y(x+h)+y^2-(3x^2-2xy+y^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2+3h^2+6xh-2xy-2yh+y^2-3x^2+2xy-y^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{6xh+3h^2-2yh}{h}=\lim_{h\to0}(6x+3h-2y)$$

$$=6x-2y$$

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2-2x(y+h)+(y+h)^2-(3x^2-2xy+y^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2-2xy-2xh+y^2+h^2+2hy-3x^2+2xy-y^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-2xh+h^2+2hy}{h}=\lim_{h\to0}(-2x+h+2y)=-2x+2y$$

نلاحظ في هذا المثال أنه عندما نثبت المتغير y ، فإن f تصبح دالة في متغير واحد x وبالتالي نستطيع استخدام قواعد الاشتقاق للدالة في متغير واحد ونحصل مباشرة على $f_x(x,y)=6x-2y$ وبالمثل ، عندما نثبت المتغير x ، فإن f تصبح دالة في متغير واحد y ومباشرة نجد $f_y(x,y)=-2x-2y$. فإذا أردنا حساب $f_x(3,-2)$ فإنه يكفي أن نعّوض $x=3$ ، $y=-2$ في العلاقة $f_x(x,y)=6x-2y$ لنجد $f_x(3,-2)=18+4=22$.

مثال (٢)

أوجد باستخدام التعريف كلا من $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$ للدالة

$$f(x,y)=\cos(xy)$$

الحل

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cos((x+h)y)-\cos(xy)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(xy)\cos(hy) - \sin(xy)\sin(hy) - \cos(xy)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos(xy)\frac{\cos(hy)-1}{h} - \sin(xy)\frac{\sin(hy)}{h}\right]$$

وبفرض $y \neq 0$ يكون لدينا

$$f_x(x,y) = y\cos(xy)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(hy)-1}{(hy)} - y\sin(xy).\lim_{h\to 0}\frac{\sin(hy)}{hy}$$

$$= y\cos(xy)(0) - y\sin(xy) = -y\sin(xy)$$

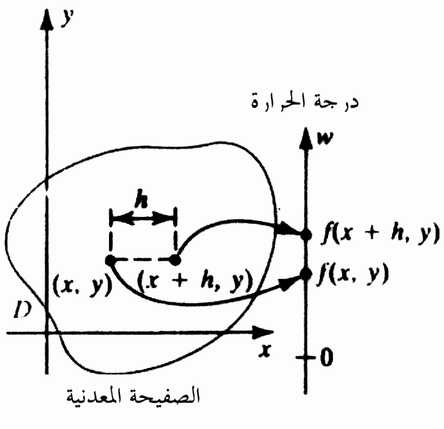
أما عندما $y = 0$ ، لدينا :

$$f_x(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1-1}{h}\right) = 0$$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

وهكذا نجد أن $f_x(x,y) = -y\sin(xy)$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

بالمثل نجد أن $f_y(x,y) = -x\sin(xy)$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

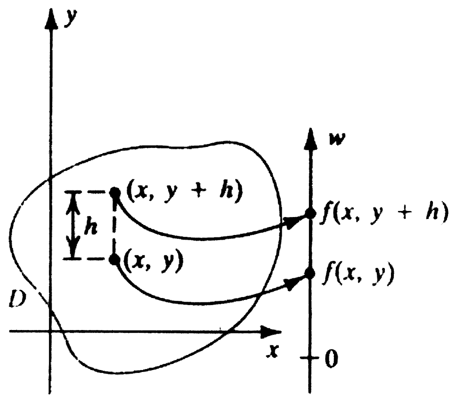
(١-٨-٢) **التفسير الفيزيائي والهندسي للمشتقات الجزئية** : لتكن D صفيحة معدنية رقيقة ولتكن $f(x,y)$ تمثل درجة حرارة الصفيحة عند النقطة $(x,y) \in D$. ولنفرض أن $(x+h,y) \in D$ ، عندئذ تقع النقطتان (x,y) ، $(x+h,y)$ على خط أفقي كما هو موضح بالشكل (١-٣٣) .



شكل (١-٣٣)

أما الفرق $f(x+h,y) - f(x,y)$ فهو يمثل مقدار التغير في درجة حرارة الصفيحة عندما تتحرك النقطة من (x,y) إلى $(x+h,y)$. أما النسبة $\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$ فهي تمثل متوسط معدّل التغير في درجة الحرارة . فعلى سبيل المثال ، إذا كان مقدار التغير في درجة الحرارة 4 درجات وكانت $h = 8$ فإن متوسط معدّل التغير هو $\frac{1}{2}$ درجة لكل وحدة مسافة أما

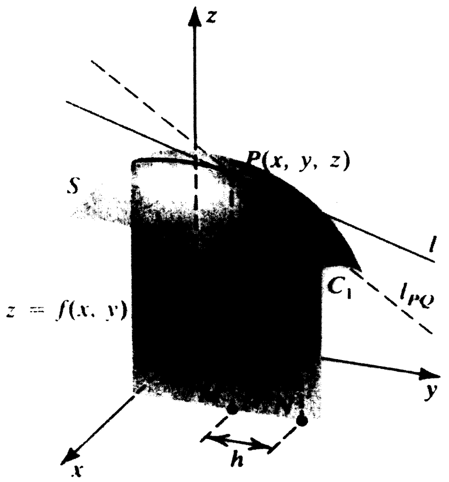
النهاية $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ فهي تمثل معدّل التغير (اللحظي) في درجة الحرارة بالنسبة للمسافة عندما تتحرك النقطة (x,y) في اتجاه أفقي . بالمثل فإن $f_y(x,y)$.يمثـل معـدّل التغير (اللحظي) في درجة الحرارة بالنسبة للمسافة عندما تتحرك النقطة (x,y) في اتجاه عمودي كما هـو موضح بالشكل (١-٣٤).



الشكل (١-٣٤)

لنأخذ الآن توضيحاً آخر . لنفرض أن D تمثل سطح بحيرة وأن $f(x,y)$ تمثل عمق البحيرة عنـد النقطة (x,y) عندئذ فإن $f_x(x,y)$ تمثل معدّل التغير في عمق البحيرة عندما تتحـرك (x,y) في اتجاه موازي لمحور السينات (المحور x) وبالمثل $f_y(x,y)$ تمثل معدّل التغير في عمق البحيرة عندما تتحرك (x,y) في اتجاه موازي لمحور الصادات (المحور y) .

أما الآن لنوضح التفسير الهندسي للمشتقات الجزئية . لنأخـذ النقطـتين $M(x,y,0)$ و $N(x,y+h,0)$ ، وليكن L هو المستوي الموازي للمستوي yz المار بالنقطتين M و N . إن المستوي L يتقاطع مع السطح $z=f(x,y)$ بالمنحنى C_1 ولتكن P ، Q هما النقطتين الواقعتين على المنحنى C بحيث إن مسقط P على المستوي xy هو M ، ومسقط Q على المـستوي xy هو N والشكل (١-٣٥) يوضح ذلك .



الشكل (١-٣٥)

عندئذ يكون ميل القاطع l_{PQ} المار بالنقطتين P و Q والواقع في المستوي L هو $m_{PQ}=\dfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$ وعندما $h\to 0$ فإن $f_y(x,y)=\lim\limits_{h\to 0} m_{PQ}$ تمثل ميل المماس للمنحنى C عند P . بالمثل ، إذا كان C' هو أثر السطح $z=f(x,y)$ في المستوى الموازي للمستوي xz والمار بالنقطة M ، فإن $f_x(x,y)$ هي ميل المماس للمنحنى C' عند النقطة P .

(١-٨-٣) تعريف

لتكن f دالة في ثلاثة متغيرات (x,y,z) . نعرّف $f_x(x,y,z)$ على النحو التالي :

$$f_x(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة .

وهنا نلاحظ أن عند حساب $f_x(x,y,z)$ افترضنا أن y و z ثابتان وبالتالي حصلنا على دالة في متغير واحد x مع تثبيت y و z . وبالمثل نعرّف المشتقين الجزئيين $f_y(x,y,z)$ ، $f_z(x,y,z)$ على النحو الآتي

$$f_y(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h}$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h}$$

بشرط أن تكون هاتان النهايتين موجودتين .

من الناحية التطبيقية ، نفرض أن $f(x,y,z)$ تمثل درجة الحرارة عند النقطة $P(x,y,z)$. إن المشتقة الجزئية $f_z(x,y,z)$ تعني معدّل تغير درجة الحرارة بالنسبة للمسافة الممتدة على مستقيم مار بالنقطة P والموازي للمحور z وبنفس الطريقة ، فإن $f_x(x,y,z)$ ، $f_y(x,y,z)$ تمثل معدل الحرارة باتجاهي المحورين x و y على الترتيب .

(١-٨-٤) القواعد الجبرية في الاشتقاق الجزئي :

إن قواعد الاشتقاق والتي تمت دراستها في حالة دوال في متغير واحد يمكن استخدامها في حالة المشتقات الجزئية لدوال في عدة متغيرات ، ولنذكر بعض هذه القواعد . فإذا كانت f و g دالتين في المتغيرين x و y ، وكانت المشتقات الجزئية الأولى لكل من f و g موجودة عند (x, y) فإن :

(١) $$\frac{\partial}{\partial x}(f+g)(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

(٢) $$\frac{\partial}{\partial x}(f-g)(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

(٣) $$\frac{\partial}{\partial y}(f.g)(x,y)=g(x,y).\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+f(x,y).\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

(٤) $$\frac{\partial}{\partial y}(f/g)(x,y)=\frac{g(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{(g(x,y))^2}$$

بشرط أن يكون $g(x,y)\neq 0$.

(٥) $$\frac{\partial}{\partial x}(Cf)(x,y)=C\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

لأي عدد ثابت C .

(٦) $\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y))^m=m\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y))^{m-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ لكل عدد كسري m ، بشرط أن يكون لطرفي العلاقة الأخيرة معنى .

بالمثل إذا كانت f و g دالتين في ثلاثة متغيرات وكانت مشتقاتها الجزئية الأولى موجودة عند (x, y, z) ، فإن لدينا قواعد مماثلة للقواعد (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٥) ، (٦) .

مثال (٣)

إذا كانت $f(x,y)=xe^{y^2}+\ln(x^2+y^2+1)$

أوجد $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

الحل

$$f_x(x,y)=e^{y^2}+\frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad ، \quad f_y(x,y)=2xye^{y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

مثال (٤)

إذا كانت f دالة في متغيرين x و y معرّفة وفق ما يلي :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن على أن $f_x(0,y)=-y$ لكل $y\in\mathbb{R}$ وعلى أن $f_y(x,0)=x$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

الحل

أ) إذا كانت $y\neq 0$ فإن $(x,y)\neq 0$ لكل $x\in\mathbb{R}$. وعندئذ لحساب $f_x(x,y)$ نشتق الدالة

$$f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\frac{x^3y-y^3x}{x^2+y^2}$$

بالنسبة للمتغير x مع اعتبار y ثابتاً فنجد :

$$f_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-y^3x)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{3x^4y-y^3x^2+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

لكل $x\in\mathbb{R}$ ومنه نجد أن : $f_x(0,y)=\dfrac{-y^5}{y^4}=-y$ ، حيث $y\neq 0$

يمكن أن نحسب $f_x(0,y)$ ، عندما $y\neq 0$ باستخدام التعريف (١-٨-١) فنجد

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hy\left(\dfrac{h^2-y^2}{h^2+y^2}\right)-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2}=\frac{-y^3}{y^2}=-y$$

أما عندما $y=0$ فإن لدينا :

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0$$

ومنه فإن :

$$f_x(0,y)=-y \quad \text{لكل } y\in\mathbb{R}$$

ب) لنفرض أن $x\neq 0$ ، لدينا عندئذ

$$f_y(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{xh(x^2-h^2)}{x^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x(x^2-h^2)}{x^2+h^2} = x$$

ولكن

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right) = 0$$

وبالتالي فإن $f_y(x,0) = x$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

مثال (٥)

إذا كانت $w = f(x,y,z) = x\sin(y+3z)$. أوجد كلا من f_x و f_y و f_z .

الحل

لحساب f_x ، نشتق f بالنسبة للمتغير x على اعتبار أن y و z ثابتان فنجد أن $f_x(x,y,z) = \sin(y+3z)$ وبالمثل نحسب f_y ، وذلك باشتقاق f بالنسبة للمتغير x مع تثبيت كل من x و y فنجد أن : $f_y(x,y,z) = x\cos(y+3z)$ وبالمثل نحسب f_z التي تنتج من اشتقاق f بالنسبة للمتغير z مع تثبيت كل من x و y ويكون لدينا :

$$f_z(x,y,z) = 3x\cos(y+3z)$$

مثال (٦)

لتكن $f(x,y,z) = x\ln(xy) + e^{xyz}$. أوجد المشتقات الجزئية للدالة f .

الحل

$$f_x(x,y,z) = \ln(xy) + 1 + yze^{xyz} \text{ ، } f_y(x,y,z) = \frac{x}{y} + xze^{xyz} \text{ ، }$$

$$f_z(x,y,z) = xye^{xyz}$$

مثال (٧)

أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة $f(x,y,z) = \dfrac{x^2-y^2}{2+\sin(4z)}$

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x(2+\sin(4z)) - 0(x^2-y^2)}{(2+\sin(4z))^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{2+\sin(4z)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{-2y(2+\sin(4z) - 0(x^2-y^2)}{(2+\sin(4z))^2} = \frac{-2y}{2+\sin(4z)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{0.(2+\sin(4z))-4\cos(4z)(x^2-y^2)}{(2+\sin(4z))^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{-4(x^2-y^2)\cos(4z)}{(2+\sin(4z))^2}$$

مثال (٨)

أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة $f(x,y)=(x^2+y^2+1)^{x+y}$

الحل

نضع $w=(x^2+y^2+1)^{x+y}$

ومنه فإن $\ln w=(x+y)\ln(x^2+y^2+1)$

إذاً باشتقاق الطرفين جزئياً بالنسبة للمتغير x نجد أن :

$$\frac{w_x}{w}(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2x(x+y)}{x^2+y^2+1}$$

ومنه فإن

$$w_x(x,y,z)=(x^2+y^2+1)^{x+y}\left[\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2x(x+y)}{x^2+y^2+1}\right]$$

وبنفس الطريقة نبرهن على أن

$$w_x(x,y,z)=(x^2+y^2+1)^{x+y}\left[\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2y(x+y)}{x^2+y^2+1}\right]$$

(١-٨-٥) المشتقات الجزئية من رتب عليا :

إذا كانت f دالة في متغيرين x و y ، فإن f_x و f_y أيضا دوال في متغيرين، فإذا كانت لها مشتقات جزئية أولى فإنها تسمى المشتقات الجزئية الثانية للدالة f ونرمز لها بالرموز :

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}f_x&=(f_x)_x=f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\
\frac{\partial}{\partial y}f_x&=(f_x)_y=f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\
\frac{\partial}{\partial y}f_y&=(f_y)_y=f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\
\frac{\partial}{\partial x}f_y&=(f_y)_x=f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}
\end{aligned}}$$

إذا كانت $w=f(x,y)$ ، فإن

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(x+h,y)-f_x(x,y)}{h}$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(x,y+h)-f_x(x,y)}{h}$$

وبنفس الطريقة نعرّف المشتقين الجزئيين الثانيتين $f_{yy}(x,y)$ و $f_{xy}(x,y)$. كما يطلق على المشتقات الجزئية $f_{yx}(x,y)$ و $f_{xy}(x,y)$ المشتقات الجزئية المختلطة.

مثال (٩)

إذا كانت $f(x,y)=x^3e^{-2y}+y^{-2}\cos x$ ولتكن (x,y) نقطة من نطاق الدالة . احسب المشتقات الجزئية f_{xy} ، f_{yx}، f_{xx}، f_{yy} للدالة f.

الحل

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2e^{-2y}-y^{-2}\sin(x)$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2x^3e^{-2y}-2y^{-3}\cos(x)$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=6xe^{-2y}-y^{-2}\cos(x)$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=-6x^2e^{-2y}+2y^{-3}\sin(x)$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=-6x^2e^{-2y}+2y^{-3}\sin(x)$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=4x^3e^{-2y}+6y^{-4}\cos(x)$$

في هذا المثال نلاحظ أن $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ لكل نقطة (x,y) تقع في مجال w لكن هذه العلاقة ليست دائماً صحيحة من أجل كل الدوال ولنوضح بالمثال الآتي :

مثال (١٠)

لتكن f دالة في المتغيرين x و y معرّفة على النحو الآتي :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^5}{x^4+y^4} & ;\quad (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & ;\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن على أن $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0$$

الآن عندما تكون $(x,y)\neq(0,0)$ فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^5(x^4+y^4)-4x^4y^5}{(x^4+y^4)^2}=\frac{y^9-3x^4y^5}{(x^4+y^4)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{5xy^4(x^4+y^4)-4xy^8}{(x^4+y^4)^2}=\frac{5x^5y^4-xy^8}{(x^4+y^4)^2}$$

بالتالي

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^9-3x^4y^5}{(x^4+y^4)^2} & ;\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5x^5y^4-xy^8}{(x^4+y^4)^2} & ;\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ومنه فإن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right)=0$$

كما أن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h-0}{h}\right)=1$$

نلاحظ في المثال (٩) أن كلاً من w_{xy} ، w_{yx} متصلة عند كل نقطة (x,y) في المستوي، أما في المثال (١٠) فإن إحدى الدالتين $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ، $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ غير متصلة عند $(0,0)$. بالفعل لتكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ بحيث يكون $(x,y)\neq(0,0)$ ، عندئذ لدينا :

$$f_x(x,y)=\frac{y^9-3x^4y^5}{(x^4+y^4)^2}$$
$$f_y(x,y)=\frac{5x^5y^4-xy^8}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{(9y^8 - 15x^4y^4)(x^4+y^4)^2 - (y^9 - 3x^4y^5)8y^3(x^4+y^4)}{(x^4+y^4)^4}$$

$$= \frac{(y^{12} + 4x^4y^8 - 15x^8y^4)}{(x^4+y^4)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{4x^4y^8 - 15x^8y^4 + y^{12}}{(x^4+y^4)^3}$$

حينئذ على المسار $x=0$ يكون لدينا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^{12}}{y^{12}} = 1$$

أما على المسار $y=0$ فلدينا أيضاً :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

وبالتالي فإن النهاية $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ غير موجودة ، ومنه فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ غير متصلة عند $(0,0)$.

هكذا و بالمقارنة بين المثالين (٩) و (١٠) نستنتج أنه لا بد من توفر شروط إضافية على الدالة f لكي تتحقق صحة العلاقة : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$.

وهذا ما توضحه النظرية التالية والتي ستعطى بدون برهان وعلى المهتم الرجوع إلى [5].

(١-٨-٦) نظرية

لتكن f دالة في المتغيرين x,y معرّفة على قرص D مركزه (a,b). لنفرض أن f_{xy} و f_{yx} متصلتان عند النقطة (a,b) . فإن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

(١-٨-٧) ملاحظة : إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y وكانت $f(x,b)$ متصلة عند a وان $f(a,y)$ متصلة أيضاً عند b فإن هذا لا يؤدي إلى اتصال f عند (a,b) ولنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (١١)

لتكن f دالة في المتغيرين x و y معرّفة بالقاعدة :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^4+y^4} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن على أن كل من $f(x,0)$ و $f(0,y)$ متصلة على الترتيب عند $x=0$ و $y=0$ ولكـــن f غير متصلة عند $(0,0)$.

الحل

من تعريف f فإن $f(x,0)=0$ لجميع قيم x وكذلك $f(0,y)=0$ لجميع قيم y وبالتالي فـــإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=f(0,0)$ كما أن $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=f(0,0)$. لنأخذ المسار $x=0$ (المحـــور y) فيكون لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$$

أما على المسار $y=x$ فيكون لدينا أيضاً :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$$

ومنه فإن f غير متصلة عند $(0,0)$.

لدينا أيضاً :

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

أي أن المشتقتين الجزئيتين f_x و f_y موجودتان عند $(0,0)$ ومع ذلك فإن f غير متصلة عنـــد $(0,0)$. أي أن هذا المثال يوضح أيضاً أنه إذا كانت المشتقتان الجزئيتان f_x و f_y موجودتين عند (a,b) ، فليس من الضروري أن تكون f متصلة عند (a,b) ، سنرى فيما بعد أن هناك شروطاً إضافية على f_x و f_y لكي يحدث الاتصال للدالة f عند (a,b) .

(١-٨-٩) ملاحظة: (أ) إن عكس النظرية (١-٨-٦) ليس صحيحاً دائماً . بمعنى آخر قد تكـــون $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$ ومع ذلك فإن $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ أو $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ غير متصلة عند (a,b) ، انظر تمرين (٥٢).

(ب) إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y معرّفة على قرص مفتوح D مركزه (a,b) وكانت $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)$ فإن إحدى الدالتين $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ غير متصلة عند (a,b). هذا ينتج من النظرية (١-٨-٦) .

المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة ومن رتب أعلى تعرف بنفس الطريقة التي عرفت بها المشتقات الجزئية الثانية. فإذا كانت للدالة $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ مشتقات جزئية من الرتبة الأولى عند (x, y) فإنه يكون لدينا:

$$f_{xxy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x, y)$$

$$f_{yxy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(x, y)$$

وبطريقة مماثلة تماماً نستطيع تعريف المشتقات الجزئية للدالة f من رتبة عليا عندما تكون f دالة في ثلاثة متغيرات x و y و z .

تجدر الملاحظة إلى أنه إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y معرّفة على قرص مفتوح D مركزه (a,b) ، وكانت المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة متصلة على D ، فإنه باستخدام النظرية (١-٨-٦) يكون لدينا :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial x\partial y}(a,b)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial y}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial y\partial x}(a,b)$$

مثال (١٢)

إذا كانت $w = f(x, y, z) = x^4 y^3 z - 3y^2 e^{xz}$ فبرهن على أن :

$\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial x\partial y}(x, y, z)$ ، لكل (x, y, z) في $\mathbb{R}^3$.

الحل

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2 x^4 z - 6ye^{xz} \text{ ، } w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = 12y^2 x^3 z - 6yze^{xz}$$

$$\text{، } w_{xxy} = \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial x\partial y} = 36y^2 x^2 z - 6yz^2 e^{xz} \text{ ، } w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 4x^3 y^3 z - 3y^2 ze^{xz} \text{ ،}$$

$$w_{yx} = \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} = 12x^3 y^2 z - 6yze^{xz} \text{ ، } w_{xyx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial x} = 36x^2 y^2 z - 6yz^2 e^{xz} \text{ ،}$$

$$w_{xx}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x}=12x^2y^3z-3y^2z^2e^{xz}$$

$$w_{yxx}=\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}=\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x \partial x}=36x^2y^2z-6yz^2e^{xz}$$

ومنه فإن : $w_{xxy}(x,y,z)=w_{xyx}(x,y,z)=w_{yxx}(x,y,z)$ ، لكل (x,y,z) في $\mathbb{R}^3$.

فيما يلي نورد عدة أمثلة على الاشتقاق الجزئي

مثال (١٣)

لتكن $f(x,y)=x^c e^{-y/x}$ ، حيث $x\neq 0$. أوجد قيمة العدد c ، لكي تتحقق صحة العلاقة التالية :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (١٠)$$

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial x}=c\,x^{c-1}e^{-y/x}+x^{c-2}ye^{-y/x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x^{c-1}e^{-y/x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=+x^{c-2}e^{-y/x}$$

ومنه فإن العلاقة (١٠) تؤدي إلى أن

$$(c+1)x^{c-1}e^{-y/x}=0$$

وعندئذ فالعلاقة (١٠) تكون متحققة عندما تكون $c=-1$.

مثال (١٤)

إذا كانت $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$ حيث n عدد صحيح موجب .

برهن على أن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=n(n+1)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial x}=nx(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=nx(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}+n(n-2)x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-2}$$

وبنفس الطريقة نجد أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}+n(n-2)y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}+n(n-2)z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-2}$$

وعندئذ فإن لدينا :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=3n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}+n(n-2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$=n(n+1)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

مثال (١٥)

لتكن f دالة في متغيرين معرّفة على $\mathbb{R}^2$ على النحو التالي :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن على أن كل من $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ موجودة ولكن f غير متصلة عند $(0,0)$.

الحل

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

لنأخذ المسار $x=0$ (المحور y) فيكون لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$$

أما على المسار $y=x$ فإن لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

وبالتالي فالنهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة ، ومنه فإن f غير متصلة عند $(0,0)$. يتضح من هذا المثال أنه إذا كانت كل من $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ موجودة فإنه ليس من الضروري أن تكون f متصلة عند (x,y) . سنرى فيما بعد أن هناك شروطاً إضافية على $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ لكي تكون f متصلة عند (x,y).

مثال (١٦)

هل توجد دالة f في المتغيرين x و y ، مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ بحيث يكون $\frac{\partial f}{\partial y}=y-x$, $\frac{\partial f}{\partial x}=x+y$

الحل

تحت هذه الشروط ، لا يوجد مثل هذه الدالة لأننا نعلم ، حسب النظرية (١-٤-٦) أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) \qquad (11)$$

من أجل كل نقطة (x,y) في $\mathbb{R}^2$.

لكن وحسب الفرضية ، لدينا $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=1$

ولكن هذا يتناقض مع العلاقة (١١) .

(١-٩) تمارين

في التمارين من ١ - ٤ وباستخدام تعريف المشتقات الجزئية (١-٨-١) ، أوجد المشتقات الجزئية للدوال الآتية :

١) $f(x,y)=4x^2-3xy$ ، $f_x(x,y)$

٢) $f(x,y)=xy^2-5y+6$ ، $f_y(x,y)$

٣) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ، $f_x(1,-1)$

٤) $f(x,y)=\frac{x+2y}{x^2-y}$ ، $f_y(1,-2)$

في التمرينين ٥ و ٦ وباستخدام التعريف (١-٨-٣) أوجد المشتقات الجزئية للدوال الآتية:

٥) $f(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2$ ، $f_x(x,y,z)$

٦) $f(x,y,z,r,t)=xyr+yzt+yrt+zrt$ ، $f_r(x,y,z,r,t)$

في التمارين من ٧ - ١٣ أوجد المشتقات الجزئية للدوال الآتية :

٧) $f(x,y)=4y^3+\sqrt{x^2+y^2}$ ، $f_x(x,y)$

٨) $f(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ ، $f_y(x,y)$

٩) $f(r,\theta)=r^2\cos\theta-2r\tan\theta$ ، $f_\theta(r,\theta)$

١٠) $z=e^{y/x}.\ln\left(\frac{x^2}{y}\right)$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$

١١) $u=\tan^{-1}(xyzw)$ ، $\frac{\partial u}{\partial w}$

١٢) $f(x,y,z)=4xyz+\ln(2xyz)$ ، $f_z(x,y,z)$

١٣) $f(x,y,z)=e^{xyz}+\tan^{-1}\left(\frac{3xy}{z^2}\right)$ ، $f_y(x,y,z)$

١٤) إذا كانت $f(x,y,z)=e^{xy^2}+\ln(y+z)$. أوجد $f_x(3,0,17)$ ، $f_y(1,0,2)$ ، $f_z(0,0,1)$.

في التمارين من ١٥ – ١٨ أوجد $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ لكل من الدوال الآتية :

١٥) $f(x,y)=\int_x^y \ln(\sin t)dt$

١٦) $f(x,y)=\int_x^y e^{\cos t}dt$

١٧) $f(x,y)=\int_x^y e^{t^2}dt$

١٨) $f(x,y)=x\int_1^{y^2} e^{-t^2}dt$

لتكن f دالة في المتغيرين y,x معّرفة على منطقة D . نقول إن f هي دالة توافقية على D إذا كانت تحقق المعادلة الآتية : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ على D . وتدعى هذه العلاقة بمعادلة لابلاس .

أما إذا كانت f دالة في ثلاثة متغيرات z,y,x معّرفة على منطقة D . فإن f تكون توافقية على D إذا كانت تحقق المعادلة الآتية : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$ على D . وهي معادلة لابلاس في الفضاء الثلاثي .

في التمارين من ١٩ إلى ٢٤ برهن على أن الدوال الآتية تحقق معادلة لابلاس .

١٩) $f(x,y)=e^{-2y}\cos(2x)$

٢٠) $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

٢١) $f(x,y,z)=z^3-3(x^2+y^2)z$

٢٢) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

٢٣) $f(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos(5z)$

٢٤) $f(x,y)\tan^{-1}(y/x)$

في التمارين من ٢٥ إلى ٢٩ برهن على صحة العلاقة $w_{xy}=w_{yx}$ لكل من الدوال الآتية :

٢٥) $w=\ln(2x+3y)$

٢٦) $w=\tan^{-1}(y/x)$

٢٧) $w=e^x\sinh y+\cos(2x-3y)$

٢٨) $w=x^3e^{-2y}+y^{-2}\cos x$

٢٩) $w=y^2e^{x^2}+\frac{1}{x^2y^3}$

في التمارين من ٣٠ إلى ٣٥ أوجد المشتقات الجزئية للدوال التالية :

٣٠) $f(x,y)=2x^2y+5x^2y^2-3xy^2$ ، $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y), \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$

٣١) $f(x,y,z)=ye^x+ze^y+e^z$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(-1,1,2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(1,0,-1)$

٣٢) $f(w,z)=w^2\cos(e^z)$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial w\partial z\partial w}(w,z)$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z\partial w\partial z}(w,z)$

٣٣) $g(r,s,t)=\ln(r^2+3s^2-5t^2)$, $\dfrac{\partial^3 g}{\partial r\partial t\partial s}(r,s,t)$, $\dfrac{\partial^3 g}{\partial r\partial s^2}(r,s,t)$

٣٤) $f(u,\theta)=\ln(\cos(u-\theta))$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial\theta\partial u\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial u^2\partial\theta}(u,\theta)$

٣٥) $f(x,y,z)=\tan^{-1}(3xyz)$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z)$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}(x,y,z)$

٣٦) إذا كانت $w=\cos(x-y)+\ln(x+y)$ فبرهن على أن $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$

٣٧) إذا كانت $w=(y-2x)^3-(y-2x)^{1/2}$ فبرهن على أن $w_{xx}-4w_{yy}=0$.

٣٨) إذا كانت $w=e^{-c^2t}\sin cx$ فبرهن على أن $w_{xx}=w_t$ حيث c ثابت .

٣٩) إذا كانت $u=e^{a_1x+a_2y+a_3z}$ حيث a_1,a_2,a_3 ثوابت تحقق $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ فبرهن على أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=u$$

٤٠) برهن على أن $z=xe^y+ye^x$ تحقق المعادلة الآتية :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=x\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$$

٤١) إن معادلة لابلاس بالإحداثيات القطبية تعطي بالعلاقة الآتية :

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

برهن على أن الدالة $u(r,\theta)=r^n\sin(n\theta)$ ، حيث n عدد صحيح موجب ، تحقق معادلة لابلاس.

٤٢) إذا كانت معادلة الحرارة في بعد واحد ، تعطى بالعلاقة الآتية :

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=k^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، حيث k ثابت .

برهن على أن الدالة : $u(x,t)=\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)e^{(-n^2\pi^2k^2/L^2)t}$

تحقق معادلة الحرارة حيث $0 \le x \le L$ و $t \ge 0$ وان $L > 0$.

٤٣) برهن على أن الدالة : $z = \dfrac{xy}{x+y}$

تحقق المعادلة الآتية : $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

٤٤) إذا كانت $f(x, y) = x^y$ ، حيث $x > 0$ فأوجد المشتقات الجزئية الآتية :

$$f_{yx}, f_{xy} , f_{yy} , f_{xx}$$

٤٥) إذا كانت $f(x, y) = x^{\ln y}$ ، حيث $x > 0$ ، $y > 0$ أوجد المشتقات الجزئية الآتية :

$$f_{yx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{xx}$$

٤٦) إذا كانت f دالة في المتغيرين y, x وكان للدالة f مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الثابتة عند كل نقطة $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ فهل من الممكن أن يكون $\dfrac{\partial f}{\partial x} = xy$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xy$.

٤٧) لتكن g دالة في y, x معرّفة على $\Re^2$ على النحو الآتي :

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^4} & ; \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

أ) برهن على أن كل من $g_x(0,0)$ و $g_y(0,0)$ موجودة .

ب) برهن على أن g غير متصلة عند $(0,0)$.

٤٨) إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y معرّفة على $\mathbb{R}^2$ كما يلي :

$$f(x, y) \begin{cases} \dfrac{12x^2 y - 3y^2}{x^2 + y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

فاحسب $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ ثم برهن على أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ غير موجودة .

٤٩) أ) إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y معرّفة على $\mathbb{R}^2$ كما يلي :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y4} & ; \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

فاحسب قيمة كل من $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ ، $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ إن وجدت .

ب) برهن على أن إحدى الدالتين $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ، $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ غير متصلة عند النقطة $(0,0)$.

٥٠) لتكن f دالة في المتغيرين x و y معرّفة على $\mathbb{R}^2$ كما يلي :

$$f(x,y)=\begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

أ) برهن على أن f متصلة عند $(0,0)$.

ب) احسب قيم كل من : $f_x(0,0)$ ، $f_y(0,0)$ ، $f_{yx}(0,0)$ ، $f_{xy}(0,0)$ إن وجدت .

٥١) برهن على أنه إذا كانت :

$f(x,y)=\sin(x+y)e^{x-y}$ ،

فإن :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=2e^{2(x-y)}$$

٥٢) لتكن f دالة في المتغيرين x و y معرّفة على $\mathbb{R}^2$ على النحو الآتي :

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

برهن على أن $f_{xy}(0,0)=-1$ و $f_{yx}(0,0)=1$.

ب) لتكن g دالة في المتغيرين x و y معرّفة على $\mathbb{R}^2$ على النحو الآتي :

$$g(x,y)=\begin{cases} x^2\tan^{-1}(y/x)-y^2\tan^{-1}(x/y) & ; \quad x\neq 0 \,,\; y\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \;,\; y=0 \end{cases}$$

برهن على أن $g_{xy}(0,0)=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0)=1$ و $g_{yx}(0,0)=\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$

ج) نعرّف دالة φ في المتغيرين x و y على $\mathbb{R}^2$ بالصيغة التالية :

$$\varphi(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$$

من الفقرتين أ) و ب) نجد أن : $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(0,0)$

برهن على أن $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$ غير متصلة عند $(0,0)$.

(١-١٠)

● التزايدات والتفاضلات

Increments And Differentials

لنفرض أن f دالة في متغير واحد x وأن Δx هي التزايدة في x . كذلك نفرض أن f قابلة للاشتقاق عند x فيكون لدينا :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

فإذا كان

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

فإن Δf تمثل مقدار التغير في قيمة الدالة f عندما تتغير x من x إلى $x+\Delta x$ وبالتالي فإن :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

أو

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) \right) = 0$$

فإذا وضعنا

$$\varepsilon = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x)$$

فإن

$$\Delta f = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$$

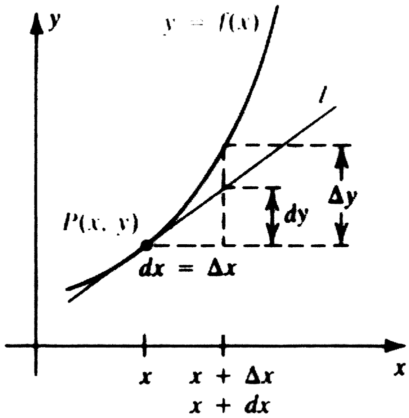
حيث ε دالة في Δx و $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$ ومنه

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \frac{\varepsilon}{|\Delta x|} |\Delta x|.\Delta x$$

$$\Delta f - f'(x)\Delta x = \varepsilon_1 |\Delta x| \qquad (١)$$

حيث $\varepsilon_1 = \varepsilon \dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}$ و $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0$ (٢)

إن هذه الاصطلاحات يمكن توضيحها بالشكل (١-٣٨)



الشكل (١-٣٨)

يطلق على المقدار $f'(x_0)\Delta x$ بتفاضل الدالة f عند x_0 ونرمز له بالرمز df ونكتب :

$$df = f'(x_0)\Delta x \quad (٣)$$

فإذا كانت Δx صغيرة جداً فيمكن تقريب Δf بتفاضل الدالة df ونكتب :

$$\Delta f \approx df$$

سوف يتم تعميم (١) ، (٢) و (٣) في حالة دوال في عدة متغيرات ، لكن وقبل إعطاء مفهوم تفاضل دالة في عدة متغيرات ، نورد مثالاً نوضح فيه المفاهيم السابقة .

مثال (١)

إذا كانت $f(x) = x^{2/5}$ ، باستخدام تفاضل الدالة كتقريب لمقدار التغير في قيمة الدالـــة. أوجـــد القيمة التقريبية لمقدار التغير وذلك في الحالتين :

أ) عندما تتغير x من 32 إلى 34 .

ب) عندما تتغير x من 1 إلى $\frac{9}{10}$.

الحل

بما أن $f'(x) = \frac{2}{5}x^{-3/5}$ وأن $df = f'(x).\Delta x$

فإن أ) $x = 32$ و $\Delta x = 34 - 32 = 2$

ومنه تفاضل f عند $x = 32$ هو :

$$df = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{32}\right)^{3/5} 2 = \frac{1}{10}$$

هكذا فإن مقدار تغير قيمة الدالة f من $x = 32$ إلى 34 تساوي تقريباً 0.1 .

ب) لدينا $x = 1$ وان $\Delta x = \frac{9}{10} - 1 = \frac{-1}{10}$ ومنه فإن تفاضل الدالة f عند $x = 1$ يساوي

$$df = \frac{2}{5}(1)^{-3/5}\left(\frac{-1}{10}\right) = -0.04$$

أي أن مقدار تغير قيمة الدالة f من 1 إلى $\frac{9}{10}$ تساوي تقريباً -0.04 .

(١-١٠-١) تعريف

لتكن $w = f(x,y)$ ولنفرض أن Δx ، Δy هي التزايدات في x و y على الترتيب . عندئذ نعّرف التزايدة في w والتي نرمز لها بالرمز Δw كما يلي :

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

أي أن Δw تمثل التغير في قيمة الدالة w ، إذا تغيرت (x,y) إلى $(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

مثال (٢)

إذا كانت $w = f(x,y) = 3x^2 - xy$ وكان Δx و Δy التزايدات في x و y على الترتيب .

فأوجد :

أ) Δw ب) احسب Δw عندما تتغير (x,y) من $(1,2)$ إلى $(1.01, 1.98)$.

الحل

أ)

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$
$$= 3(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)(x+\Delta x) - 3x^2 + xy$$
$$\Delta w = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y - 3x^2 + xy$$
$$\Delta w = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x.\Delta y$$

ب) لدينا $x = 1$ ، $y = 2$ ، $\Delta x = 1.01 - 1 = 0.01$ ، $\Delta y = 1.98 - 2 = -0.02$

نعّوض هذه القيم في الفقرة أ) فنجد $\Delta w = 0.0605$.

في المثال (٢) لدينا : $\Delta w = (6x - y)\Delta x - x\Delta y + 3(\Delta x)^2 - (\Delta x)(\Delta y)$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + 3(\Delta x)^2 - \Delta x(\Delta y)$$

ومنه

$$\Delta w - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y = 3(\Delta x)^2 - (\Delta x)\Delta y$$
$$\Delta w - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y = \varepsilon \| h \|$$

حيث

$$\varepsilon = \frac{3(\Delta x)^2 - (\Delta x)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \quad , \quad \| h \| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

نلاحظ أن ε دالة في Δx و Δy وأن : $0 \le |\varepsilon| \le 3|\Delta x| + |\Delta y|$

لكل $(\Delta x, \Delta y) \ne (0,0)$ ومنه $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon = 0$. إن هذا المثال يقودنا إلى التعريف الآتي :

(١-١٠-٢) تعريف

لتكن $w = f(x,y)$ دالة معرّفة على مستطيل مفتوح :

$$R = \{(x,y); a < x < b, c < y < d\}$$

ولتكن $(x_0, y_0) \in R$ ولنفرض أن $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in R$. نقول إن f قابلة للتفاضل عند (x_0, y_0) إذا استطعنا كتابة المقدار

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

بالشكل الآتي

$$\boxed{\Delta w = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon \| h \|} \qquad (٥)$$

حيث ε دالة في Δx و Δy و $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon = 0$ كما وأن $\| h \| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

أما إذا كانت $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon \neq 0$ نقول إن f غير قابلة للتفاضل عند (x_0, y_0) .

من الواضح تماماً أنه إذا كانت f قابلة للتفاضل عند (x_0, y_0) فإن القيمتين $f_x(x_0, y_0)$ و $f_y(x_0, y_0)$ موجودتان ، وبتعبير آخر ، إذا كانت إحدى القيمتين $f_x(x_0, y_0)$ ، $f_y(x_0, y_0)$ غير موجودة فإن الدالة f غير قابلة للتفاضل عند (x_0, y_0) .

مثال (٣)

لنأخذ الدالة $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. إن f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$ لأن :

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$ غير موجودة.

(١-١٠-٣) نظرية

لتكن $w = f(x,y)$ معرّفة على مستطيل مفتوح

$$R = \{(x,y); a < x < b, c < y < d\}$$

ولنفرض أن كلاً من f_x و f_y موجودة عند كل نقطة (x,y) من R وأن كلاً من f_x و f_y متصلة عند (x_0, y_0) . فإذا فرضنا أن $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in R$ وأن

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

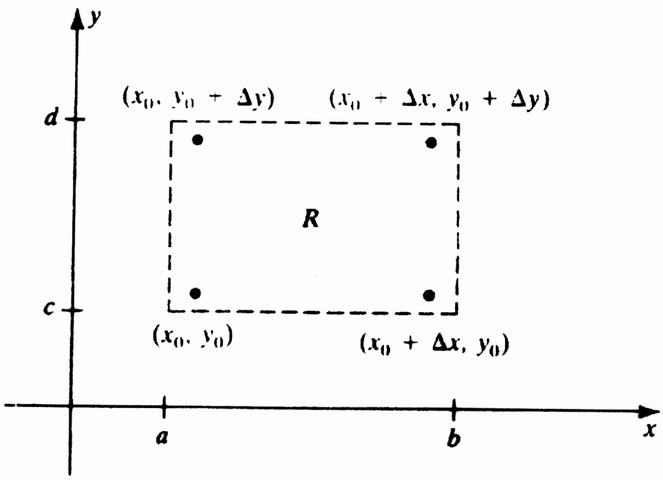
فإنه توجد دالة ε في Δx و Δy بحيث أن :

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon . \| h \| \qquad (٦)$$

حيث $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon = 0$ ، $\| h \| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

نستنتج من هذه النظرية أنه إذا كانت المشتقتان الجزئيتان f_x و f_y متصلتين عند (x_0, y_0) فإن f قابلة للتفاضل عند (x_0, y_0) .

البرهان



الشكل (١-٣٩)

لدينا

$$\Delta w = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] \quad (٧)$$

ولنعرف دالة g في متغير واحد x كما يلي

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$$

عندئذ $g'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y)$ ، وحسب نظرية القيمة المتوسطة ، لدينا :

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(u)\Delta x$$

حيث إن u يقع ما بين x_0 و $x_0 + \Delta x$. أي أن :

$$[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] = f_x(u, y_0 + \Delta y).\Delta x \quad (٨)$$

الآن نعّرف دالة في متغير واحد y كما يلي :

$$h(y) = f(x_0, y)$$

أيضاً استناداً إلى نظرية القيمة المتوسطة نجد أن

$$h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(\theta)\Delta y$$

حيث إن θ يقع ما بين y_0 و $y_0 + \Delta y$ ، ومنه فإن :

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, \theta)\Delta y \quad (٩)$$

من العلاقتين (٨) و (٩) نجد أن

$$\Delta w = f_x(u, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, \theta)\Delta y$$

بوضع :

$$\varepsilon_1 = f_x(u, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)$$
$$\varepsilon_2 = f_y(x_0, \theta) - f_y(x_0, y_0)$$

يكون لدينا :

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \qquad (١٠)$$

وبما أن كلاً من f_x و f_y متصلة عند (x_0, y_0) فإن :

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f_x(u, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0)$$
$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f_y(x_0, \theta) = f_y(x_0, y_0)$$

وذلك لأن $u \to x_0$ عندما $\Delta x \to 0$

$\theta \to y_0$ عندما $\Delta y \to 0$

ومنه نجد أن $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$ ، $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$

لنضع الآن $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\| h \|}$

إذاً العلاقة (١٠) تكتب بالشكل الآتي :

$$\Delta w - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y = \varepsilon . \| h \|$$

وبما أن $| \varepsilon | \le | \varepsilon_1 | + | \varepsilon_2 |$ إذاً $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon = 0$

وهذا ما يبرهن صحة العلاقة (٦) ومنه فإن f قابلة للتفاضل عند (x_0, y_0) .

يمكن إعادة نص النظرية (١-١٠-٣) وذلك بعد استبدال المستطيل المفتوح R بقرص مفتوح D .

(١-١٠-٤) تعريف

لتكن f دالة في ثلاثة متغيرات x ، y و z . معرّفة على مستطيل مفتوح

$$R = \{(x, y, z); a < x < b, c < y < d, k < z < l\}$$

ولتكن $(x_0, y_0, z_0) \in R$ ، وأن Δx ، Δy و Δz التزايدات في x ، y و z على الترتيب ، بحيث إن $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \in R$.

نقول إن f قابلة للتفاضل عند (x_0, y_0, z_0) إذا أمكن كتابة المقدار

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \qquad (١١)$$

بالشكل التالي

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + \varepsilon . \| h \| \qquad (١٢)$$

حيث ε دالة في Δx ، Δy و Δz و $\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon = 0$.

وكذلك $\| h \| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

النظرية التالية تعطي شروط قابلية التفاضل لدالة في ثلاث متغيرات.

(١-١٠-٥) نظرية

لتكن f دالة في ثلاثة متغيرات x ، y و z معرّفة على R الموضحة في التعريف (١-١٠-٤) . لنفرض أن كلاً من f_x ، f_y و f_z موجودة عند كل نقطة (x,y,z) من R وأن كلاً من f_x ، f_y و f_z متصلة عند (x_0,y_0,z_0) .فإذا فرضنا أن $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)\in R$ فإن الدالة f قابلة للتفاضل عند (x_0,y_0,z_0) . أي أن العلاقة (١١) يمكن التعبير عنها بالعلاقة (١٢).

إن برهان هذه النظرية يتم بطريقة مماثلة لبرهان النظرية (١-١٠-٣) .

(١-١٠-٦) ملاحظة :

من التعريف (١-١٠-٤) نستنتج أن f تكون غير قابلة للتفاضل عند (x_0,y_0,z_0) إذا كانت $\lim_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon \neq 0$ حيث ε دالة في Δx ، Δy و Δz والموجودة في العلاقة (١٢) .

ولنوضح الآن دراسة قابلية للتفاضل لدالة في عدة متغيرات بالأمثلة الآتية :

مثال (٤)

إذا كانت

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & ; \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

أثبت على أن

١) كلاً من f_x و f_y موجودة لجميع $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

٢) كلاً من f_x و f_y غير متصلة عند $(0,0)$

٣) f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$

الحل :

١) إذا كانت $(x,y)\neq(0,0)$ فإن :

$$f_x(x,y)=\frac{y^3(x^2+y^4)-2x^2y^3}{(x^2+y^4)^2}=\frac{y^7-x^2y^3}{(x^2+y^4)^2}$$

أما إذا كانت $(x,y)=(0,0)$ فإن :

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{0}{h}\right)=0$$

أي أن f_x موجودة من أجل كل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

من أجل $(x,y)\neq(0,0)$ لدينا

$$f_y(x,y)=\frac{3x^2y^2-xy^6}{(x^2+y^4)^2}$$

أما من أجل النقطة $(x,y)=(0,0)$ فيمكن البرهان على أن $f_y(0,0)=0$ ومنه فإن f_y موجودة من أجل جميع النقاط $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

٢) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^7-x^2y^3}{(x^2+y^4)^2}$$

على المسار $x=0$ لدينا :

$$\lim_{y\to0} f_x(0,y)=\lim_{y\to0}\frac{1}{y}$$

وهذه النهاية غير موجودة وبالتالي فإن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ غير موجودة . أي أن f_x غير متصلة عند $(0,0)$. بالمثل نجد أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2-xy^6}{(x^2+y^4)^2}$$

على المسار $x=0$ لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(0,y)=\lim_{y\to0}\left(\frac{0}{y^8}\right)=0$$

وعلى المسار $y=\sqrt{x}$ لدينا :

$$\lim_{x\to0^+} f_y(x,\sqrt{x})=\lim_{x\to0^+}\frac{3x^3-x^4}{4x^4}=\lim_{x\to0^+}\frac{3-x}{4x}=+\infty$$

وبالتالي فإن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$ غير موجودة ، أي أن f_y غير متصلة عند $(0,0)$.

٣) $$\Delta w=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{(\Delta x).(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^4}$$

إذاً

$$\begin{aligned}\Delta w-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y&=\frac{(\Delta x).(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^4}-0-0\\&=\frac{(\Delta x)(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.\|h\|\\&=\varepsilon\|h\|\end{aligned}$$

حيث إن

$$\varepsilon = \frac{(\Delta x).(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

لنبرهن أن $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon \neq 0$

على المسار $\Delta y = \Delta x$ لدينا :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon(\Delta x,\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^4}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^4} \frac{1}{\sqrt{2}.|\Delta x|}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^2}{1+(\Delta x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\,|\Delta x|} = 0$$

على المسار $\Delta y = \sqrt{\Delta x}$ لدينا :

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \varepsilon(\Delta x,\sqrt{\Delta x}) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{(\Delta x)^2\sqrt{\Delta x}}{2(\Delta x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta x}\sqrt{1+\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{1+\Delta x}} = \frac{1}{2}$$

منه فإن $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon$ غير موجودة وبالتالي $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon \neq 0$

أي أن f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

مثال (٥)

لتكن f دالة في المتغيرين x ، y والمعّرفة كما يلي :

$$w = f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

أثبت أن :

١) كلاً من f_x و f_y غير متصلة عند $(0,0)$

٢) f قابلة للتفاضل عند $(0,0)$

الحل

١) نفرض أن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ بحيث إن $(x,y)\neq(0,0)$ لدينا عندئذ :

$$f_x(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - x(x^2+y^2)^{-1/2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$f_y(x,y)=2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-y(x^2+y^2)^{-1/2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

على المسار $y=0$ لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=\lim_{x\to 0} f_x(x,0)$$

$$=\lim_{x\to 0}[2x\sin\frac{1}{|x|}-\frac{x}{|x|}\cos\left(\frac{1}{|x|}\right)]$$

وهذه النهاية غير موجودة ، لأن $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{|x|}\cos\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$ غير موجودة .

وبالتالي فإن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ غير موجودة . إذاً f_x غير متصلة عند $(0,0)$.

أما على المسار $x=0$ فلدينا أيضاً

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=\lim_{y\to 0} f_y(0,y)$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[2y\sin\frac{1}{|y|}-\frac{y}{|y|}\cos\left(\frac{1}{|y|}\right)\right]$$

وهذه النهاية غير موجودة وبالتالي فإن f_y غير متصلة عند $(0,0)$.

٢) $$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)=0$$

وذلك باستخدام نظرية الحصر . بالمثل نبرهن على أن :

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)=0$$

لدينا الآن $$\Delta f=f(\Delta x+0,\Delta y+0)-f(0,0)$$

$$\Delta w-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right).\|h\|$$

$$=\varepsilon\|h\|$$

حيث :

$$\varepsilon=\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right)$$

وبما أن $0\le|\varepsilon|\le\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ لكل $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$

ومنه فإن:

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon=0$ وبالتالي فإن f قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

من المثالين (٤) و (٥) نستنتج أنه عكس النظرية (١-١٠-٣) ليس دائماً صحيحاً ، وبتعبير آخر، إذا كانت إحدى الدالتين f_x ، f_y غير متصلة عند (x_0,y_0) فقد تكون f قابلة للتفاضل عند (x_0,y_0) وقد لا تكون .

مثال (٦)

إذا كانت
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ادرس قابلية التفاضل f عند النقطتين $(0,0)$ ، $(-1,+1)$.

الحل

١) عند النقطة $(0,0)$ لدينا

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{h-0}{h}\right)=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{h-0}{h}\right)=1$$

ومنه

$$\Delta w=f(\Delta x+0,\Delta y+0)-f(0,0)$$

$$\Delta w-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=\frac{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-\Delta x-\Delta y$$

$$=\frac{-(\Delta y)^2\Delta x-\Delta y(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\varepsilon\,||h||$$

حيث :

$$\varepsilon=\frac{-\Delta x\Delta y(\Delta x+\Delta y)}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$$

على المسار $\Delta y = 0$ حيث $\Delta x > 0$ لدينا

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon = 0$$

أما على المسار $\Delta y = \Delta x$ لدينا

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \varepsilon(\Delta x,\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{-2(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3 2^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

أي أن $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon$ غير موجودة ومنه $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon \neq 0$

وبالتالي f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

٢) عند النقطة $(-1,+1)$:

بما أن $(0,0) \neq (-1,+1)$. إذاً نبرهن وبسهولة بالاشتقاق الجزئي المباشر أن :

$$\lim_{(x,y)\to(-1,+1)} f_x(x,y) = f_x(-1+1) \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(-1,+1)} f_y(x,y) = f_y(-1,+1)$$

أي أن f_x و f_y دالتان متصلتان عند $(-1,+1)$ ، وبالتالي f قابلة للتفاضل عند $(-1,+1)$.

مثال (٧)

لتكن f دالة في x ، y و z معرّفة على $\mathbb{R}^3$ كما يلي

$$w = f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

برهن على أن f قابلة للتفاضل عند النقطة $(0,0,0)$.

الحل

باستخدام التعريف ، نحسب أولاً القيم f_x ، f_y و f_z عند النقطة $(0,0,0)$:

$$f_x(0,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0,0) - f(0,0,0)}{h} = 0$$

وبنفس الطريقة نبرهن أن :

$$f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = 0$$

لدينا إذاً

$$\Delta w = f(\Delta x + 0, \Delta y + 0, \Delta z + 0) - f(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} \Delta w - f_x(0,0,0)\Delta x - f_y(0,0,0)\Delta y - f_z(0,0,0)\Delta z &= \frac{(\Delta x)(\Delta y)(\Delta z)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \\ &= \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \\ &= \varepsilon \,||\, h \,||\end{aligned}$$

حيث : $\varepsilon = \dfrac{(\Delta x)(\Delta y)(\Delta z)^2}{\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right]^{3/2}}$ ، ولكن $0 \le |\varepsilon| \le |\Delta x|$

ومنه $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\to(0,0,0)} \varepsilon = 0$

أيّ f قابلة للتفاضل عند $(0,0,0)$.

> **(١-١٠-٧) نظرية**
>
> إذا كانت $w = f(x, y)$ دالة في متغيرين قابلـــة للتفاضـــل عنـــد (x_0, y_0) فـــإن f متـــصلة عند (x_0, y_0) .

البرهان

لما كانت $\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ وبما أن f قابلـــة للتفاضـــل عنـــد (x_0, y_0) فإن :

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon \| h \|$$

حيث $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon = 0$

لنضع $x = x_0 + \Delta x$ ، $y = y_0 + \Delta y$ عندئذ يكون لدينا

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon \| h \|$$

وعندما $(x, y) \to (x_0, y_0)$ فإن $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ ومنه فإن

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0$$

أي أن $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

إذاً f متصلة عند (x_0, y_0) .

من هذه النظرية نستنتج أنه إذا كانت f دالة غير متصلة عند النقطة (x_0, y_0) فإن f غير قابلـــة للتفاضل عند (x_0, y_0) .

ننوه إلى أنه توجد نظرية مماثلة للنظرية (١-١٠-٧) في حالة f دالة في ثلاثة متغيرات.

مثال (٨)

إذا كانت
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & ; \quad (x, y) \ne (0,0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

اثبت أن f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

الحل

عند دراسة قابلية تفاضل دالة f عند النقطة (x_0, y_0) يفضل دراسة اتصال الدالة عند هذه النقطة .

فعلى المسار $x = 0$ لدينا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(0,y) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(0)}{y^2}\right) = 0$$

أما على المسار $y = x$ فإنه لدينا :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{2x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

أي أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة ومنه فإن f غير متصلة عند $(0,0)$ وبالتالي فـإن f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

مثال (٩) :

(أ) إذا كانت f كثيرة حدود في x و y فإن f قابلة للتفاضل عند كل نقطـة $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ لأن المشتقات الجزئية f_x ، f_y متصلة عند كل نقطة $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(ب) إذا كانت f دالة كسرية في x و y وكانت D هي مجال تعريـف f ،فـإن f قابلـة للتفاضل عند كل نقطة $(x,y)\in D$ ، لأن المشتقات الجزئية f_x ، f_y متصلة عند كـل نقطـة $(x,y)\in D$.

الشيء نفسه صحيح في حالة ثلاث متغيرات أو أكثر.

(١-١٠-٨) تعريف

إذا كانت $w = f(x,y)$ ، وإذا كانت Δx و Δy التزايدات في x و y على الترتيب فإن.

(أ) نعرف التفاضلات dx و dy للمتغيرين المستقلين x و y بأنهما

$$dx = \Delta x \qquad \text{و} \qquad dy = \Delta y$$

(ب) نعرف تفاضل الدالة f ونرمز له بالرمز df على أنه

$$dw = df = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

إذا كانت الدالة f تحقق منطوق نظرية (١-١٠-٣)، فباستخدام نتيجة تلك النظرية ووضع (x,y) بدلا من (x_0, y_0) نحصل على

$$\Delta w = dw - \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

وبالتالي $\Delta w - dw = \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ،

حيث ε تقترب من الصفر عندما $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$. بالتالي، إذا كانت Δx و Δy صغيرة، فإن $\Delta w - dw \approx 0$؛ أي أن $\Delta w \approx dw$. يمكن استخدام هذه النتيجة لتقريب التغير في w نتيجة تغير صغير في x و y.

مثال (١١)

قيس نصف قطر وارتفاع اسطوانة دائرية فوجد أنه 3سم و 8سم على الترتيب . فإذا كان الخطأ الناتج عن القياس يساوي ∓ 0.05 سم . استخدم التفاضلات لإيجاد قيمة تقريبية لمقدار الخطأ الناتج في حساب حجم الاسطوانة .

الحل

نعلم أن حجم الاسطوانة الدائرية

$$V = \pi r^2 h$$

من الفقرة السابقة ومن تعريف (١-١٠-٨) فإن

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh$$

ولكن $h=8 \qquad r=3, \qquad dr = dh = \mp 0.05,$

وبالتالي فإن $\Delta V \approx dV = 48\pi(\mp 0.05) + 9\pi(\mp 0.05) \approx \mp 8.95$

التعريف التالي هو تعميم لتعريف (١-١٠-٨).

(١-١٠-٩) تعريف

إذا كانت $w = f(x,y,z)$ ، وإذا كانت Δx ، Δy و Δz التزايدات في x ، y و z على الترتيب.

(أ) نعرف التفاضلات dx ، dy و dx للمتغيرات المستقلة x ، y و z بأنها

$$dz = \Delta z \quad dy = \Delta y \ ، \ dx = \Delta x$$

(ب) نعرف تفاضل الدالة f ونرمز له بالرمز df على أنه

$$dw = df = f_x(x,y,z)\Delta x + f_y(x,y,z)\Delta y + f_z(x,y,z)\Delta z$$

كما هو الحال لدالة في متغيرين ، يمكن استخدام تفاضل الدالة dw لحساب قيمة تقريبية للتزايدة Δw إذا كانت التزايدات في x ، y و z صغيرة.

مثال (١٢)

لنفرض أن أبعاد علبة متوازية المستطيلات تتغير من 4 ، 6 ، 9 إلى 4.01 ، 5.97 ، 9.02 على الترتيب . أوجد القيمة التقريبية للتغير في حجم العلبة .

الحل

نعلم أن حجم علبة متوازية المستطيلات التي أبعادها x, y, z هو :

$$V = xyz$$

كما نعلم أن المشتقات الجزئية الأولى للحجم V متصلة عند كل نقطة (x, y, z)، إذاً V قابلة للتفاضل عند (x, y, z) وأن :

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$= yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z$$

ولكن $z = 4$ ، $y = 6$ ، $x = 9$

$\Delta z = 4.01 - 4 = 0.01$ ، $\Delta y = 5.97 - 6 = -0.03$ ، $\Delta x = 9.02 - 9 = 0.02$

ومنه

$$\Delta V \approx dV = 24(0.02) + 36(-0.03) + 54(0.01) \approx -0.06$$

أي أن حجم العلبة يتناقص بمعدّل 0.06 وحدة مكعبة .

أما التغير الفعلي في حجم العلبة فهو

$$\Delta V = V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x, y, z)$$

$$= (9.02)(5.97)(4.01) - (9)(6)(4) = -0.063906$$

وهذا يوضح أن تفاضل الدالة dV يعتبر تقريبا جيدا للتزايدة ΔV .

مثال (١٣)

إذا كانت

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xyz^2)}{x^4 + y^4 + z^4} & ; \quad (x, y, z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; \quad (x, y, z) = (0,0,0) \end{cases}$$

ادرس قابلية التفاضل للدالة f عند النقطتين $(0,0,0)$, $(1,0,0)$.

الحل

١) لندرس أولاً اتصال الدالة f عند $(0,0,0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = \lim_{x\to 0} f(x,0,0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^3}\right) = 0$$

أما على المستقيم $x = y = z = t$ فإن :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = \lim_{t\to 0} f(t,t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t^4}{3t^4} = \frac{1}{3}$$

وبالتالي فإن f غير متصلة عند $(0,0,0)$ ومنه فإن f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0,0)$.

٢) يمكن البرهان وبسهولة على أن الدوال f_x ، f_y ، f_z متصلة عند النقطة $(1,0,0)$ ، ومنه f قابلة للتفاضل عند النقطة $(1,0,0)$.

(١-١١) تمـــارين :

أوجد القيمة التقريبية للتغير في قيمة الدوال الآتية والتي يرافقها تغير النقاط :

١) $f(x,y)=2x^2+5xy+4y^2$ ، من النقطة $(2,-1)$ إلى $(1.99,-1.02)$

٢) $f(x,y)=xye^{xy}$ ، من النقطة $(2,-4)$ إلى النقطة $(1.9,-3.8)$

٣) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ ، من النقطة $(3,0)$ إلى النقطة $(3.04,0.03)$

٤) $f(x,y,z)=xy+\ln(zy)$ ، من النقطة $(4,1,5)$ إلى النقطة $(4.02,1.04,4.97)$

في التمارين من ٥-٩ برهن أن الدوال الآتية قابلة للتفاضل عند كل نقطة من نطاقها :

٥) $f(x,y)=x^2y-2xy$

٦) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$

٧) $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$

٨) $f(x,y,z)=\cos(xy)e^{z^2}$

٩) $f(x,y,z)=x^2+y^2-\ln(x^2+z^2+1)$

١٠) احسب dF عند النقطة $(3,0)$ حيث $F(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$.

١١) احسب df عندما يتغير x و y من $(2,-1)$ إلى $(1.99,-0.98)$ حيث $f(x,y)=zx^2+5xy+4y^2$

١٢) احسب dG عند النقطة $(-3,0,2)$ حيث $G(x,y,z)=x^2y+2xyz-z^3$

في التمارين من ١٣- ٢١ برهن على أن كل دالة قابلة للتفاضل في نطاقها ثم أوجد تفاضلات هذه الدوال

١٣) $w=y\tan x^2-2xy$

١٤) $w=x\cos y-y\sin x$

١٥) $w=xe^{2y}+e^{-y}$

١٦) $w=ln(x^2+y^2+z^2)$

١٧) $w=\dfrac{xyz}{x+y+z}$

١٨) $w=x\tan^{-1}(z)-\dfrac{y^2}{z}$

١٩) $w=e^{yz}-\cos(xz)$

٢٠) $w=y\ln x-\dfrac{x}{y}$

٢١) $w=\tan^{-1}(x+y)+\dfrac{1}{x-y}$

٢٢) إذا كانت

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

اثبت ما يلي:

أ) $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ موجودة .

ب) f_x و f_y غير متصلة عند $(0,0)$.

ج) f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

٢٣) لتكن

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^4+y^4} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

أ) ادرس اتصال الدالة f عند النقطة $(0,0)$.

ب) برهن على أن كلاً من $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ موجودة .

ج) ادرس قابلية التفاضل للدالة f عند $(0,0)$.

٢٤) إذا كانت

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن على أن f قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

٢٥) إذا كانت

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن على أن f قابلة للتفاضل عند كل نقطة $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

في التمرينين ٢٦-٢٧ برهن على أن الدالة $f(x,y)$ غير قابلة للتفاضل عند النقطة $(0,0)$.

٢٦) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^6+y^6} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

٢٧) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

في التمرينين ٢٨ و ٢٩ ، ادرس قابلية التفاضل لكل دالة عند $(0,0)$.

٢٨) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

٢٩) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

في التمارين ٣٠-٣٢ ، برهن على أن كل دالة قابلة للتفاضل عند كل نقطة من نطاقها.

٣٠) $f(x,y,z)=3x+2y-4z$ ٣١) $f(x,y,z)=xy-xz+z^2$

٣٢) $f(x,y)=\cos(xy)-e^{z2}$

٣٣) لتكن $$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} & ; \quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

أ) برهن على أن $f_x(0,0,0)$ ، $f_y(0,0,0)$ ، $f_z(0,0,0)$ موجودة .

ب) ادرس قابلية التفاضل للدالة f عند $(0,0,0)$.

٣٤) إذا كانت

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

برهن على أن f غير قابلة للتفاضل عند $(0,0,0)$.

٣٥) إذا كانت T تمثل حرارة النقطة $P(x,y,z)$ وكانت T معرّفة بالقاعدة :

$$T=8(2x^2+4y^2+9z^2)^{1/2}$$

أوجد القيمة التقريبية لتغير الحرارة عندما تتغير (x,y,z) من النقطة $(6,3,2)$ إلى $(6.1,3.3,1.98)$.

(١-١٢)

• قاعدة السلسلة

Chain Rule

تزود قاعدة السلسلة للدوال في متغير واحد بصيغة لإيجاد مشتقة تحصيل دالتين f و g . إذا كانت $u=f(x)$ و $y=g(u)=g(f(x))$ وإذا كانت $\dfrac{dy}{du}$ موجودة عند u و $\dfrac{du}{dx}$ موجودة عند x ، فإن $\dfrac{dy}{dx}$ موجودة عند x ولدينا :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \tag{١}$$

النظرية التالية تعمم قاعدة السلسلة للدوال في عدة متغيرات .

(١-١٢-١) نظرية

لتكن f دالة في المتغيرين x و y قابلة للتفاضل عند (x_0,y_0) ولنفرض أن كلاً من x و y دالة في متغير واحد t وقابلة للاشتقاق عند t_0 ، حيث إن $x(t_0)=y_0$. عندئذ فإن f دالة في المتغير t قابلة للاشتقاق عند t_0 ،كما أن :

$$\frac{df}{dt}(t_0)=f_x(x_0,y_0)\frac{dx}{dt}(t_0)+f_y(x_0,y_0).\frac{dy}{dt}(t_0) \tag{٢}$$

البرهان

لنفرض أن $h\in\mathbb{R}$ مقدار صغير جداً بحيث يكون t_0+h واقعاً في نطاق f . لنفرض أن :

$$x(t_0+h)=x_0+k$$
$$y(t_0+h)=y_0+l$$

عندئذ

$$f(t_0+h)-f(t_0)=f(x_0+k,y_0+l)-f(x_0,y_0)$$

وبما أن f قابلة للتفاضل عند (x_0,y_0) فإنه توجد دالة ε في k و l وتحقق العلاقة الآتية :

$$f(t_0+h)-f(t_0)=f_x(x_0,y_0)k+f_y(x_0,y_0)l+\varepsilon\,\|h_1\| \tag{٣}$$

حيث $\|h_1\|=\sqrt{k^2+l^2}$ وأن $\lim\limits_{(k,l)\to(0,0)}\varepsilon=0$

لكن

$$\lim_{h\to0}\frac{k}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}=x'(t_0)=\frac{dx}{dt}(t_0)$$
$$\lim_{h\to0}\frac{l}{h}=\lim_{h\to0}\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}=y'(t_0)=\frac{dy}{dt}(t_0)$$

وبما أن كلاً من x و y متصلة عند t_0 فإنه كون $h \to 0$ تؤدي إلى $k \to 0$ و $l \to 0$.

لنبرهن الآن

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon \| h_1 \|}{h} = 0 \qquad (٤)$$

بالفعل لدينا

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon\frac{\| h_1 \|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\varepsilon\sqrt{\frac{k^2+l^2}{h^2}}$$
$$= \lim_{(k,l)\to(0,0)}\varepsilon\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2} = 0$$
$$\lim_{h\to 0^-}\varepsilon\frac{\| h_1 \|}{h} = -\lim_{h\to 0^-}\varepsilon\sqrt{\frac{k^2+l^2}{h^2}}$$
$$= \lim_{(k,l)\to(0,0)}\varepsilon.\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2} = 0$$

وهذا ما يثبت صحة العلاقة (٤) .

إذاً لدينا :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = f_x(x_0,y_0)x'(t_0)+f_y(x_0,y_0)y'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$$

وهذا ما يبرهن صحة العلاقة (٢) .

نذكر النص الثاني لقاعدة السلسلة دون إعطاء البرهان، والذي يتبع على نفس نمط برهان النص الأول.

(١-١٢-٢) نظرية

لنفرض أن $w = f(x,y)$ دالة في متغيرين x و y وأن w قابلة للتفاضل عند (x,y) . فإذا كانت $x = F(u,v)$ و $y = G(u,v)$ وكانت المشتقات الجزئية $\frac{\partial x}{\partial u}$ ، $\frac{\partial x}{\partial v}$ ، $\frac{\partial y}{\partial u}$ ، $\frac{\partial y}{\partial v}$ موجودة عند (u,v) . فإن w دالة في المتغيرين u و v كما أن كلاً من $\frac{\partial w}{\partial u}$ ، $\frac{\partial w}{\partial v}$ موجودة عند (u,v) وبالإضافة إلى ذلك لدينا :

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (٥)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad (٦)$$

النظرية التالية هي تعميم للنظرية (١-١٢-٢) .

(١-١٢-٣) نظرية

لتكن $w=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ دالة في المتغيرات $x_1,\dots,x_n$ ، ولنفرض أن w قابلة للتفاضل عند $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ، وأن $x_i=g_i(u_1,u_2,\dots u_m)$ لكل $i=1,\dots,n$ هي دالـة في المـتغيرات $u_1,\dots,u_m$ وأن $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$ لكل $j=1,2,\dots,m$ ، $i=1,2,\dots,n$ موجودة عند $(u_1,\dots,u_m)$ فـإن w دالة في $(u_1,\dots,u_m)$ وأن

$$\frac{\partial w}{\partial u_1}=\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1}+\cdots+\frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_1}$$
$$\frac{\partial w}{\partial u_2}=\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2}+\cdots+\frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial w}{\partial u_m}=\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_m}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_m}+\cdots+\frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_m}$$

مثال (١)

إذا كانت $w=x^2+2xy+y^2$ وكانت $x=t\cos t, y=t\sin t$ ، فأوجد $\frac{dw}{dt}$.

الحل

الطريقة الأولى : باستخدام قاعدة السلسلة

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$=(2x+2y)(\cos t-t\sin t)+(2x+2y)(\sin t+t\cos t)$$
$$=2(x+y)(\cos t-t\sin t+t\cos t+\sin t)$$
$$=2t(\cos t+\sin t)(\cos t-t\sin t+\sin t+t\cos t)$$
$$=2t(1+\sin 2t+t\cos 2t)$$

الطريقة الثانية : نعوّض عن كل من x ، y في الدالة u فنجد

$$u=(t\cos t)^2+2t^2\cos t.\sin t+(t\sin t)$$
$$=t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t+2t^2\cos t.\sin t$$
$$=t^2+t^2\sin 2t$$

وبالتالي لدينا

$$\frac{du}{dt}=2t+2t\sin 2t+2t^2\cos 2t$$
$$=2t(1+\sin 2t+t\cos 2t)$$

مثال (٢)

إذا كانت $w=f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ، وكانت $x=re^s$ و $y=re^{-s}$. احسب كلاً من $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$

الحل

١) $\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$ ، ولكن

$\frac{\partial x}{\partial r}=e^s$, $\frac{\partial x}{\partial s}=re^s$, $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$ و

$\frac{\partial y}{\partial r}=e^{-s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}=-re^{-s}$, $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$

ومنه فإن $\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{x}{x^2+y^2}re^s+\frac{y}{y^2+x^2}(-re^{-s})=r\frac{xe^s-ye^{-s}}{x^2+y^2}$

٢) $\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{xe^s+ye^{-s}}{x^2+y^2}$.

مثال (٣)

إذا كانت $w=xy+xz+yz$ ، وكانت $z=r\sin t$, $y=r\cos t$, $x=r$ ، فأوجد كلاً من $\frac{\partial w}{\partial r}$ و $\frac{\partial w}{\partial t}$

الحل

<u>الطريقة الأولى</u> : نستخدم قاعدة السلسلة . فيكون لدينا

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=(y+z)(1)+(x+z)(\cos t)+(x+y)(\sin t)$$

$$=r\cos t+r\sin t+r\cos t+r\sin t\cos t+r\sin t+r\cos t\sin t$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=2r(\cos t+\sin t)+r\sin 2t$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$=(y+z)(0)+(x+z)(-r\sin t)+(x+y)(r\cos t)$$

$$=(r+r\sin t)(-r\sin t)+(r+r\cos t)(r\cos t)$$

$$=-r^2\sin t-r^2\sin^2 t+r^2\cos t+r^2\cos^2 t$$

$$= r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) + r^2(\cos t - \sin t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = r^2(\cos t - \sin t) + r^2 \cos 2t$$

الطريقة الثانية : طريقة التعويض المباشر

$$w = r^2 \cos t + r^2 \sin t + r^2 \sin t \cos t$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 2r\cos t + 2r\sin t + 2r\sin t \cos t$$

$$= 2r(\cos t + \sin t) + r\sin(2t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -r^2 \sin t + r^2 \cos t + r^2 \cos^2 t - r^2 \sin^2 t$$

$$= r^2(\cos t - \sin t) + r^2 \cos 2t$$

مثال (٤)

برهن على أن الدالة :

$$z = f\left(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3\right)$$

تحقق المعادلة الآتية

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

حيث إن a و b ثابتان .

الحل

لنفرض أن $u = \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3$ عندئذ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u).bx$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = -f'(u)ay^2$$

ومنه نجد

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx\frac{\partial z}{\partial y} = (ay^2)(bx)f'(u) - (bx)(ay^2)f'(u) = 0$$

مثال (٥)

برهن على أن الدالة $z = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$

تحقق العلاقة الآتية $t\frac{\partial z}{\partial s} + s\frac{\partial z}{\partial t} = 0$

الحل

نفرض أن

$$y=t^2-s^2 \quad ، \quad x=s^2-t^2$$

فيكون لدينا

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$=z_x(2s)+z_y(-2s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=z_x(-2t)+z_y(2t)$$

$$t\frac{\partial z}{\partial s}+s\frac{\partial z}{\partial t}=z_x(2st)+z_y.(-2st)+z_x(-2ts)+z_y(2ts)=0$$

مثال (٦)

لنفرض أن f دالة في المتغيرين x و y وأن مشتقات f الجزئية من الرتبة الثانية متـــصلة. إذا كانت $w=f(x,y)$ ، حيث، وكانت $x=u+v$ و $y=u-v$ فبرهن على أن

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

الحل

لدينا

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}.\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

وحيث إن المشتقات الجزئية الثانية متصلة فإن $\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$

بالتالي فإن

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

وبنفس الطريقة نبرهن على أن

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

مثال (٧)

إذا كانت u دالة في المتغيرين x و y وكانـــت $x = e^s$ ، $y = e^t$ دالـــتين في s و t فبرهن على أن المعادلة

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (٧)$$

يمكن كتابتها على الصيغة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (٨)$$

الحل

من الواضح أن u دالة في المتغيرين s و t . من قاعدة السلسلة نجد أن :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}e^s + \frac{\partial u}{\partial s}(0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = x\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right).\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)x + x\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(0)$$

ومنه فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = x\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

وبنفس الطريقة نبرهن على أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = y\frac{\partial u}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

وهذا يثبت أن المعادلة (٧) تكافئ المعادلة (٨) .

مثال (٨)

لتكن f دالة في المتغير x و y . لنفرض أن المشتقات الأولى والثانية للدالة f متصلة، وإذا كانت $x = e^s \cos t$ ، $y = e^s \sin t$. برهن على أن الدالة $w = f(x, y)$ تحقق العلاقة

$$e^{-2s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{٩}$$

الحل

من الواضح أن w دالة في المتغيرين s و t ، وبالتالي لدينا :

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\left(e^s \cos t\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\left(e^s \sin t\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial w}{\partial x} e^s \cos t\right] + \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial w}{\partial y} e^s \sin t\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x} x\right]\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial x} x\right]\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} y\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} y\right)\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial w}{\partial x} x + xy\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(xy) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial w}{\partial y} y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} e^{2s}\cos^2 t + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} e^{2s}\sin^2 t + 2e^{2s}\sin t \cos t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\partial w}{\partial x} e^s \cos t + \frac{\partial w}{\partial y} e^s \sin t \end{aligned} \tag{١٠}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}(-e^s \sin t) + \frac{\partial w}{\partial y}(e^s \cos t) = \frac{\partial w}{\partial x}(-y) + \frac{\partial w}{\partial y} x$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial w}{\partial x} y\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} x\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial w}{\partial x} y\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial w}{\partial x} y\right)\frac{\partial y}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} x\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} x\right)\frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= +\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.e^{2s}\sin^2 t - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} e^{2s}\cos t \sin t - \frac{\partial w}{\partial x} e^s \cos t \\ &- \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} e^{2s}\cos t \sin t - \frac{\partial w}{\partial y} e^s \sin t + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} e^{2s}\cos^2 t \end{aligned} \tag{١١}$$

من المعادلتين (١٠) و (١١) لدينا

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=e^{2s}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\sin^2 t+\cos^2 t)+e^{2s}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\sin^2 t+\cos^2 t)$$

ومنه نجد أن :

$$e^{-2s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

وهذا ما يثبت صحة العلاقة (٩) .

مثال (٩)

لنفرض أن f دالة في ثلاثة متغيرات x ، y و z نقول إن f دالة متجانسة من الدرجة k إذا كانت

$$f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z) \qquad (١٢)$$

لكل $t>0$.

أي انه إذا كانت f متجانسة وكانت f معرّفة عند (x,y,z) فإن f معرّفة عند النقطة (tx,ty,tz) من أجل كل $t>0$ وأن f تحقق العلاقة (١٢) . بنفس الطريقة نعرّف دالة متجانسة f في متغيرين x و y . فعلى سبيل المثال إن الدالة $f(x,y,z)=\sqrt{2x+y-2z}$ متجانسة من الدرجة $\frac{1}{2}$، أما الدالة $f(x,y)=\left(\frac{x^2y^2}{2x^4+3y^4}\right)$ فإنها متجانسة من الدرجة صفر .لنفرض أن f دالة معرّفة على مجموعة جزئية D من $\mathbb{R}^3$ وأن f دالة متجانسة من الدرجة k . لنفرض أن المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى متصلة على D. برهن على أن :

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=kf(x,y,z) \qquad (١٣)$$

الحل

لدينا

$$f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z) \qquad (١٤)$$

لكل (x,y,z) في D و $t>0$.

الحل

باشتقاق طرفي العلاقة (١٤) بالنسبة للمتغير t نجد :

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial t}=kt^{k-1}f(x,y,z) \qquad (١٥)$$

حيث إن $u_1=tx, u_2=ty, u_3=tz$. إذاً لدينا :

$$x\frac{\partial f}{\partial u_1}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial u_2}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial u_3}(tx,ty,tz)=kt^{k-1}f(x,y,z)$$

وبما أنها صحيحة لكل t، حيث $t>0$. نختار $t=1$ نجد أن :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=kf(x,y,z)$$

وهذا ما يثبت صحة العلاقة (١٣) .

(١-١٢-٤) تعريف (الدوال الضمنية)

(أ) يقال إن المعادلة $F(x,y)=0$ تعرّف دالة ضمنية $y=f(x)$ إذا تحقق أن $F(x,f(x))=0$ لكل x في مجال f .

(ب) يقال إن المعادلة $F(x,y,z)=0$ تعرّف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ إذا تحقق أن $F(x,y,f(x,y))=0$ لكل (x,y) في مجال f .

الأمثلة التالية توضح التعريف السابق.

مثال (١٠)

لنأخذ المعادلة $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ وهي تمثل معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1 . من هذه المعادلة نجد أن $y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ دالتين معرّفتين بجوار الصفر على الفترة $I=[-1,+1]$ بحيث أن $F(x,f_1(x))=0$ و $F(x,f_2(x))=0$ لكل $x\in I$. بالتالي فإن $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ تعرف دالتان ضمنيتان $y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ لكل $x\in I$.

مثال (١١)

لنأخذ الآن العلاقة

$$F(x,y,z)=(x^2+y^2)e^z-2x^2-1=0$$

لدينا

$$e^z=\frac{2x^2+1}{x^2+y^2}\quad ;\quad (x,y)\neq(0,0)$$

ومنه

$$z=f(x,y)=\ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2+y^2}\right)\quad ;\quad (x,y)\neq(0,0)$$

z دالة معرفة لكل $(x,y)\neq(0,0)$، وكذلك لدينا

$F(x,y,f(x,y))=0$ ، لكل $(x,y)\neq(0,0)$،

أي أن المعادلة $F(x,y,z)=0$ تعرّف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ ، لكل $(x,y)\neq(0,0)$.

(١-١٢-٥) نظرية

إذا كانت المعادلة $F(x,y)=0$ تعرّف دالة ضمنية $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق وإذا كانت $F_x(x,y)\neq 0$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

مثال ٩

إذا كانت المعادلة $y^4-5xy+3x^3+7x-4=0$ تعرف دالة ضمنية $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق. أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-5y+9x^2+7}{4y^3-5x}=\frac{5y-9x^2-7}{4y^3-5x}$$

النظرية التالية تعطينا صيغة لإيجاد المشتقات f_x و f_y، أو $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ للدالة $z=f(x,y)$.

(١-١٢-٥) نظرية

إذا كانت المعادلة $F(x,y,z)=0$ تعرّف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل وإذا كانت $F_z(x,y,z)\neq 0$ فإن

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

مثال ١٠

إذا كانت المعادلة $x-yz-\cos xyz-2=0$ تعرف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل. أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

الحل

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1+yz\sin xyz}{-y+xy\sin xyz}=\frac{1+yz\sin xyz}{y-xy\sin xyz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-z+xz\sin xyz}{-y+xy\sin xyz}=\frac{z-xz\sin xyz}{xy\sin xyz-y}$$

(١-١٣) تمارين

١) إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند $u=x^2+y^2$، برهن على أن الدالة :

$$z = xy + f(x^2 + y^2)$$

تحقق العلاقة

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

٢) إذا كانت $f(x, y) = x^2 - y^2$ ، وكانت $x = e^{u+v}$ ، $y = e^{u-v}$ فاحسب باستخدام قاعدة السلسلة كلاً مما يلي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \ ، \ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \ ، \ \frac{\partial f}{\partial v} \ ، \ \frac{\partial f}{\partial u}$$

٣) إذا كانت $z = f(x, y)$ ، وكانت $y = 2rs$ و $x = r^2 + s^2$ ، ولنفرض أن للدالة f مشتقات f الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة (x, y) من نطاق f فاحسب كلاً من $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial r}$.

٤) إذا كانت $z = f(u,v)$ ، وكانت $u = xy$ ، $v = y/x$ ، ولنفرض أن D هو نطاق f وأن المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة f متصلة على D . أثبت أن z تحقق العلاقة الآتية :

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2v\frac{\partial z}{\partial v}$$

في التمارين من ٥ - ١٠ أوجد المشتقات الجزئية والمرافقة لكل تمرين ، وذلك باستخدام قاعدة السلسلة .

٥) $\frac{\partial u}{\partial s}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$; $u = x^2 + xy$; $x = r^2 + s^2$, $y = 3r - 2s$

٦) $\frac{\partial u}{\partial s}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$; $u = \sin^{-1}(3x + y)$; $x = r^2 e^s, y = \sin(rs)$

٧) $\frac{\partial u}{\partial s}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$; $x = rs$; $y = r^2 - s^2$, $z = (r - s)^2$

$u = xxy + xz + yz$;

٨) $\frac{\partial u}{\partial s}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$; $u = \cosh(y/x)$; $x = 3r^2 s$, $y = r^2 - s^2$

٩) $\frac{\partial u}{\partial t}$ ، $\frac{\partial u}{\partial s}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$; $u = xe^{-y}$; $x = \tan^{-1}(rst)$, $y = \ln(3rs + 5st)$

١٠) $u = x^2 + y^2 + z^2$; $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$; $z = r\cos\phi$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial \phi} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

١١) إذا كانت :

$$w = r^2 s + v^3 \tan t \;\; ; \;\; r = x^3 y z^2 \;\; , \;\; s = x e^{yz} \;\; , \;\; v = x \cos y \;\; , \;\; t = y \ln z$$

فأوجد كلاً من : $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ ، $\dfrac{\partial w}{\partial y}$

في التمارين من ١٢ - ١٥ أوجد $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ بطريقتين :

أ) باستخدام قاعدة السلسلة .

ب) طريقة التعويض المباشر .

١٢) $u = y e^x + x e^y ; x = \cos t ; y = \sin t$

١٣) $u = \ln(xy) + y^2 ; x = e^t , y = e^{-t}$

١٤) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; x = \tan t , y = \cos t , z = \sin t$ ، حيث $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

١٥) $u = \dfrac{t + e^x}{y - e^t} ; x = 3 \sin t , y = \ln t$

في التمارين من ١٦ - ١٩ إذا كانت المعادلات الآتية ، تعّرف دالة ضمنية دالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق. احسب $\dfrac{dy}{dx}$.

١٦) $x^2 - xy + y^3 = 8$

١٧) $y^5 + 3x^2 y^2 + 5x^4 = 12$

١٨) $2y^2 + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 17$

١٩) $x \cos y + y \cos x = 1$

في التمارين من ٢٠ - ٢١ ، إذا كانت المعادلات الآتية تعّرف دالة ضمنية $z = f(x, y)$ قابلة للتفاضل. احسب $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ، $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

٢٠) $3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$

٢١) $z = (x^2 + y^2) \sin(xz)$

٢٢) $y e^{yxz} \cos(3xz) = 5$

٢٣) $z e^{yz} + 2x e^{xz} - 4 e^{xy} = 3$

٢٤) $y^2 z e^{x+y} - \sin(xyz) = 0$

٢٥) $xyz = \cos(x + y + z)$

٢٦) إذا كانت $z = f(x, y)$ وكانت $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ فبرهن على أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

٢٧) إذا كانت $z = f(x, y)$ وكانت $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ فبرهن على أن

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 .$$

٢٨) إذا كانت $u = f(x, y)$ وكانت $x = e^s \cos t$ ، $y = e^s \sin t$ فبرهن على أن :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

٢٩) إذا كانت $z=f(x,y)$ ، وكانت $x=s+t$ ، $y=s-t$ فبرهن على أن :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial z}{\partial t}$$

٣٠) إذا كانت $z=f(x,y)$ وكانت مشتقات f الجزئية من الرتبة الثانية متصلة على نطاق f ، وإذا كانت $x=r^2+s^2$ و $y=2rs$ فاحسب كلاً مما يأتي :

أ) $\frac{\partial z}{\partial r}$. ب) $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$. جـ) $\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial s}$.

٣١) إذا كانت $z=f(x,y)$ ، وكانت مشتقات f الجزئية من الرتبة الثانية متصلة على نطاق f وإذا كانت $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ فأوجد كلاً مما يأتي :

أ) $\frac{\partial z}{\partial r}$ ب) $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ ج) $\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta}$

٣٢) إذا كانت $u=f(x,y)$ ، $v=g(x,y)$ دالتين معرّفتين على مجموعة جزئية D من $\mathbb{R}^2$ ، وكانت مشتقات u و v الجزئية من الرتبة الأولى على D موجودة فإننا نسمي المعادلتين :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad ، \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

بمعادلتي كوشي — ريمان .

برهن على أن الدالتين $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ ، $v=\tan^{-1}(y/x)$ تحققان معادلتي كوشي — ريمان .

٣٣) لنفرض أن f و g دالتان في المتغيرين x و y قابلتان للتفاضل $(x,y)\in D$ ، حيث D نطاق كل من f و g. لنفرض $v=g(x,y)$ و $u=f(x,y)$. برهن على أنه إذا كانت معادلتا كوشي — ريمان محققتين على D وكانت $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ فإن :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

٣٤) إذا كانت $u=f(x,y)$ دالة في المتغيرين x و y قابلة للتفاضل عند (x,y) وكانت $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ فبرهن على أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\cos\theta}{r}$$

٣٥) إذا كانت f دالة في متغير واحد u ، وليكن $w = f(u)$. لنفرض أن كلاً من f' و f'' موجودة عند u ، وأن $u = x - y$ فبرهن على أن

أ) $$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

ب) $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

٣٦) لنفرض أن $w = f(x, y)$ معرّفة على D وأن مشتقات f الجزئية من الرتبة الثانية متصلة على D . فإذا كانت $x = 2u + v$ ، $y = u - v$ فبرهن على أن

$$5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

٣٧) لنفرض أن $w = \frac{1}{r} f(t - \frac{r}{a})$ وأن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، حيث f دالة في متغير واحد u، وأن كلاً f' و f'' موجودة عند u . برهن على أن :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} . \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

حيث $a \neq 0$ عدد ثابت.

٣٨) لنفرض أن $w = f(u) + g(v)$ ، حيث إن $u = x - at$ ، $v = x + at$ وأن كلاً من g' و g'' موجودة عند v . وكذلك f' و f'' موجودة عند u . برهن على أن :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

حيث $a \neq 0$ عدد ثابت .

٣٩) لنفرض أن f دالة في المتغيرين x و y معرّفة على مجموعة جزئية D من $\mathbb{R}^2$ وأن $w = f(x, y)$. فإذا كانت f قابلة للتفاضل عند $(x, y) \in D$ ، وكانت $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$ ، $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ حيث α ثابت . برهن على أن

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

٤٠) إذا كانت $w = f(u)$ ، حيث $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ، وأن f قابلة للاشتقاق عند u . برهن على أن

$$xw_x + yw_y = 0$$

٤١) إذا كانت $w=f(r,s,t)$ دالة قابلة للتفاضل عند (r,s,t) وكانت $r=x-y$ ، $s=y-z$ ، $t=z-x$ برهن على أن :

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

٤٢) إذا كانت f دالة في المتغيرين u و v وكانت $z=f(u,v)$. لنفرض أن مشتقات f الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند (u,v). فإذا كانت $u=x^2-y^2$ ، $v=2xy$ فاكتب $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ بدلالة كل من x ، y ، f_u و f_v .

٤٣) إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y وكانت $u=f(x,y)$. لنفرض أن مشتقات f الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند (x,y) . فإذا كانت $x=r^2+s^2$ ، $y=2rs$ فاكتب $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ بدلالة كل من r ، s ، f_x و f_y .

٤٤) لنفرض أن $w=f(u)$ و أن كلاً من f' ، f'' موجودة عند u . فإذا كانت $u=xg(y)$. برهن على أن

$$w_{xx}=f'(xg(y)).(g(y))^2$$

حيث g دالة في y .

٤٥) إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y معرّفة على D ،كانت f دالة متجانسة من الدرجة n . برهن على أن :

$$x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)+2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)+y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=n(n-1)f$$

وذلك على افتراض أن مشتقات f الجزئية من الرتبة الثانية متصلة على D.

٤٦) إذا كانت $w=F(t^2+2t+1,t^3-t+2)$ ، حيث $F(u,v)$ قابلة للتفاضل عند (u,v).
وإذا كانت $F_u(1,2)=3$ ، $F_v(1,2)=4$. فاحسب $\frac{dF}{dt}$ عند $t=0$.

٤٧) إذا كانت $u=F(t,s)$ قابلة للتفاضل عند (t,s) وكانت :

$$s=\frac{z-x}{xz} \quad ، \quad t=\frac{y-x}{xy}$$

برهن على أن

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

٤٨) إذا كانت F دالة في المتغيرين t,s قابلة للتفاضل عند (t,s) وكانت $t=\frac{y}{x}$ ، $s=\frac{z}{x}$ برهن على أن $u=x^3F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$ تحقق العلاقة

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=3u$$

٤٩) إذا كانت $w=f(x,y)$ قابلة للتفاضل عند (x,y) وكانت $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ فاكتب $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$ بدلالة كل من $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$.

٥٠) إذا كانت F دالة في المتغيرين s و t وكانت مشتقات F الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند (t,s) لنفرض أن $t=\frac{y}{x}$ ، $s=\frac{z}{x}$. برهن على أن $u=x^3F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$ تحقق العلاقة الآتية :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+4y\frac{\partial u}{\partial y}+4z\frac{\partial u}{\partial z}=6u$$

٥١) إذا كانت f ، g دالتين في متغير واحد u و v على الترتيب وكانت كل من f'' و g'' موجودة عند u و v على التوالي . برهن على أن الدالة :

$$u=x^nf(y/x)+x^{-n}g(y/x)\quad ;\ n\in\mathbb{N}$$

تحقق العلاقة

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n^2u$$

٥٢) إذا كانت F دالة في المتغيرين x ، y وكانت مشتقات F الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند (x,y) لنفرض أن F متجانسة من الدرجة 2 وأن $u=r^nF(x,y)$ ، حيث إن n عدد صحيح موجب . فإذا كانت $r^2=x^2+y^2$ فبرهن على أن :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=r^n\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+r(n+4)r^{n-2}F$$

(إرشاد : يمكن الاستفادة من المثال (٩))

(١-١٤)

• القيم العظمى والصغرى لدوال في عدة متغيرات

Extrema Values For Functions Of Several Variables

في هذا الفصل نقوم بتعميم مفهوم القيم العظمى والصغرى المطلقة والمحلية لدوال في متغير واحد ، كما هو موضح بالتعاريف الآتية :

(١-١٤-١) تعريف

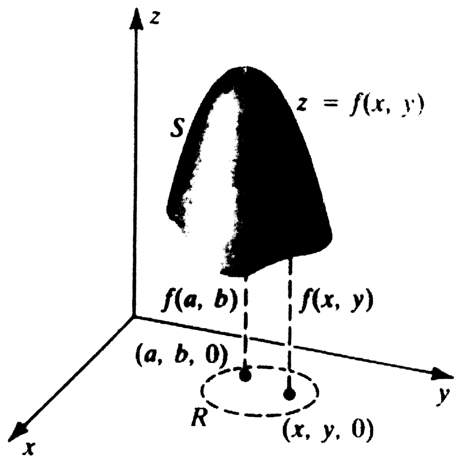
لتكن f دالة في المتغيرين x و y . نقول إن

(أ) f لها قيمة عظمى محلية(Local maximum) عند النقطة (a,b) إذا وجد مستطيل مفتوح R مركزه (a,b) (أو قرص مفتوح R مركزه (a,b)) بحيث يكون $f(x,y) \le f(a,b)$ لكل $(x,y) \in R$.

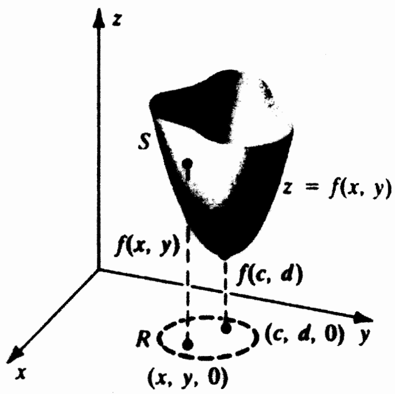
(ب) f لها قيمة صغرى محلية (Local minimum) عند النقطة (c,d) إذا وجد مستطيل مفتوح R مركزه (c,d) (أو قرص مفتوح R مركزه (c,d)) بحيث يكون $f(x,y) \ge f(c,d)$ لكل $(x,y) \in R$.

تسمى القيم العظمى والصغرى المحلية بالقيم القصوى المحلية (Local extrema).

الشكلان (١-٤١) و (١-٤٢) يوضحان التعريف السابق

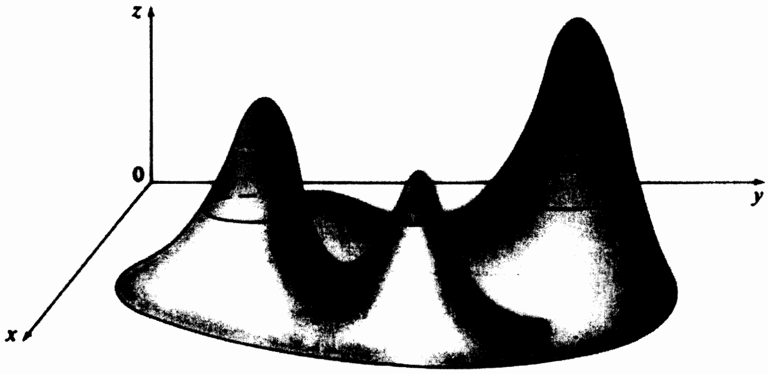


الشكل (١-٤١)



الشكل (١-٤٢)

أما الشكل (١-٤٣) فهو يوضح أن القيم العظمى المحلية تقابل قمم الجبال والقيم الصغرى المحلية تقابل قاع الوديان.

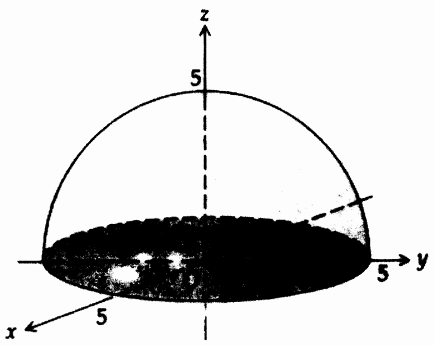


الشكل (١-٤٣)

وبطريقة مماثلة نعّرف القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $w = f(x, y, z)$.

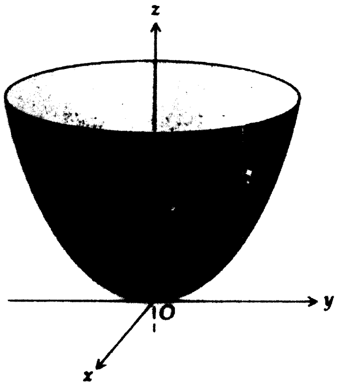
مثال (١)

أ) إن السطح $z = f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ يمثل النصف العلوي لسطح كرة مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 5 . وإذا أخذنا أي قرص دائري مفتوح B مركزه $(0,0)$ ونصف قطره r ، حيث $r \leq 5$ فإنه وحسب التعريف (١-١٤-١)(أ) يكون للدالة f قيمة عظمى محلية وتساوي 5 عند النقطة $(0,0)$ ، كما هو موضح بالشكل (١-٤٤) .



الشكل (١-٤٤)

ب) إن السطح $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ يمثل مجسم قطع مكافئ . لنأخذ B قرص مفتوح مركزه $(0,0)$ ونصف قطره r ، وحسب التعريف (١-١٤-١)(ب) يكون للدالة قيمة صغرى محلية تساوي 0 عند النقطة $(0,0)$ ، كما هو موضح بالشكل (١-٤٥) :



الشكل (١-٤٥)

التعريف التالي هو تعميم لتعريف القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة في متغير واحد.

(١-١٤-٢) تعريف

لتكن f دالة في المتغيرين x و y . نقول إن

(أ) f لها قيمة عظمى مطلقة (Absolute maximum) عند النقطة (a,b) إذا كانت $f(x,y) \le f(a,b)$ لكل $(x,y) \in D$.

(ب) f لها قيمة صغرى مطلقة (Absolute minimum) عند النقطة (c,d) إذا كانت $f(x,y) \ge f(c,d)$ لكل $(x,y) \in D$.

تسمى القيم العظمى والصغرى المطلقة بالقيم القصوى المطلقة (Absolute extrema).

بالمثل نعرف القيم القصوى المطلقة لدالة في ثلاث متغيرات.

(١-١٤-٣) تعريف

لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$. نقول إن

(ا) D مجموعة محدودة (Bounded) إذا وجد مستطيل مفتوح أو قرص مفتوح R بحيث إن $D \subset R$.

(ب) D مغلقة (Closed) إذا كانت D اتحاد النقاط الداخلية للمجموعة D (انظر إلى التعريف (١-٦-٢)) ونقاط الحد ∂D. انظر إلى الشكلين (١-٢٧) أ و (١-٢٧)ب .

كما هو الحال لدالة في متغير واحد، إذا كانت الدالة متصلة على فترة مغلقة فإنها تأخذ قيمها القصوى على تلك الفترة. إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y متصلة على مجموعة مغلقة ومحدودة D في المستوي، فإن f تأخذ قيمها القصوى المطلقة على تلك المجموعة. أي يوجد نقطتين

$(a,b),(c,d)\in D$ بحيث للدالة f قيمة عظمى مطلقة عند (a,b) وقيمة صغرى مطلقة عند (c,d).

سبق وأن أوضحنا أن المشتقة الجزئية $f_y(a,b)$ تعني هندسيا ميل المماس للأثر C لسطح الدالة $z=f(x,y)$ في المستوى $x=a$، وبالتالي إذا كان للدالة قيمة عظمى محلية عند (a,b) وكانت f_y موجودة عند (a,b) فإن $f_y(a,b)=0$. بالمثل إذا كانت f_x موجودة عند (a,b) فإن $f_x(a,b)=0$. يتضح من هذه المناقشة أنه إذا كانت مشتقات f الجزئية الأولى موجودة على مجموعة D فإن القيم القصوى المحلية للدالة f على D تحدث عند النقاط $(x,y)\in D$ والتي تحقق العلاقة $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$.

(١-١٤-٤) تعريف

لتكن f دالة في المتغيرين x و y. نقول إن (a,b) هي نقطة حرجة (Critical points) للدالة f إذا تحققت إحدى الحالتين التاليتين :

١) $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$.

٢) $f_x(a,b)$ أو $f_y(a,b)$ غير موجودة .

من المناقشة في الفقرة السابقة والتعريف (١-١٤-٤) فإن القيم القصوى المحلية للدالة إن وجدت فإنها تحدث عند النقاط الحرجة للدالة. كما توضحه النظرية التالية.

(١-١٤-٥) نظرية

إذا كان للدالة $f(x,y)$ قيمة قصوى محلية عند (x_0,y_0) وكانت كل من $f_x(x_0,y_0)$ و $f_y(x_0,y_0)$ موجودة فإن :

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$$

البرهان

لنفرض أن للدالة f قيمة عظمى محلية عند (x_0,y_0) وأن $f_x(x_0,y_0)$ موجودة .

لنبرهن أن $f_x(x_0,y_0)=0$ الآن لدينا :

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

بما أن للدالة f قيمة عظمى محلية عند (x_0,y_0)، فإن :

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\le 0$$

عندما تكون Δx صغيرة جداً وتكون $(x_0+\Delta x,y_0)$ داخل قرص مفتوح B مركزه (x_0,y_0). فإذا كانت $\Delta x\to 0$ حيث $\Delta x>0$ فإن

$$\frac{f(x_0+\Delta,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\le 0$$

ومنه نجد أن

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \le 0$$

حيث إن $f_x(x_0, y_0)$ موجودة . لذا فإن $f_x(x_0, y_0) \le 0$

أما إذا كانت $\Delta x \to 0$ حيث $\Delta x < 0$ فإن

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \ge 0$$

ومنه فإن

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \ge 0$$

وبالتالي نجد أن $0 \le f_x(x_0, y_0)$ ، وذلك لأن $f_x(x_0, y_0)$ موجودة . نستنتج من ذلك أن $0 \le f_x(x_0, y_0) \le 0$ ، ومنه $f_x(x_0, y_0) = 0$. بطريقة مماثلة نبرهن على أنه إذا كانت $f_y(x_0, y_0)$ موجودة ، وكان للدالة f قيمة عظمى محلية عند (x_0, y_0) فإن $f_y(x_0, y_0) = 0$. أما بقية برهان هذه النظرية ، عندما يكون للدالة f قيمة صغرى محلية عند (x_0, y_0) فيترك كتمرين للقارئ .

إن عكس النظرية (١-١٤-٥) قد لا يكون صحيحاً ، كما يوضحه المثال التالي :

مثال (٢)

لتكن f معرّفة كما يلي: $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. عندئذ

$$f_x(x, y) = -2x \quad ، \quad f_y(x, y) = 2y$$

وحيث إن $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. إذاً $(0,0)$ هي النقطة الحرجة للدالة. ليكن B أي قرص مفتوح مركزه $(0,0)$. عندئذ يوجد $(x,0) \in B$ ، $x \ne 0$ بحيث إن

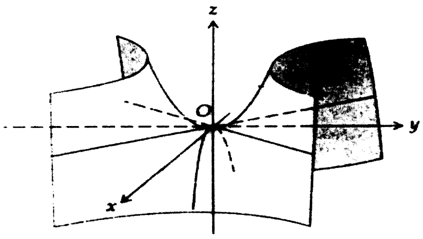
$$f(x,0) = -x^2 < 0 = f(0,0)$$

أي أن $f(0,0)$ ليست قيمة صغرى محلية للدالة f عند $(0,0)$.

كذلك يوجد $(0, y) \in B$ حيث $y \ne 0$ بحيث أن :

$$f(0, y) = y^2 > 0 = f(0,0)$$

أي أن $f(0,0)$ ليست قيمة عظمى محلية للدالة f . بالتالي لا يوجد للدالة قيمة قصوى محلية عند هذه النقطة. هذه النقطة تسمى نقطة سرجية (Saddle point) كما هو موضح بالشكل (١-٤٦)



الشكل (١-٤٦)

بشكل عام، إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y بحيث إن $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$. نقول إن للدالة f نقطة سرجية عند (a,b) إذا وجد قرص مركزه النقطة (a,b) بحيث أن الشرط التالي يتحقق : للدالة قيمة عظمى محلية على إحدى أقطار القرص فقط عند النقطة (a,b) وقيمة صغرى محلية على قطر آخر فقط عند النقطة (a,b). استنادا إلى هذا التعريف نستنتج الشرط البسيط التالي هو شرط كاف لضمان أن يكون للدالة نقطة سرجية عند (a,b) وهو أن $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)<0$.

مثال (٣)

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $z=f(x,y)=6x-4y-x^2-2y^2$

الحل

بما أن المشتقتين للدالة f من الرتبة الأولى موجودتان لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، لذلك نستطيع استخدام النظرية (١-٧-٥) فنجد أن

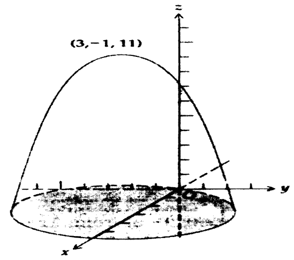
$$f_x(x,y)=6-2x \quad , \quad f_y(x,y)=-4-4y$$

بوضع $f_x(x,y)=0$ ، وكذلك $f_y(x,y)=0$ نجد أن :

$$-4-4y=0 \quad و \quad 6-2x=0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $(3,-1)$ هي النقطة الحرجة للدالة f .

لكن السطح $z=6x-4y-x^2-2y^2$ يمثل مجسم قطع مكافئ مقعر نحو الأسفل ، ورأسه النقطة $V(3,-1,11)$ ، ومنه $f(x,y)\le f(3,-1)=11$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}$ وحسب التعريف (١-١٤-١) نجد أن $f(3,-1)=11$ هي قيمة عظمى محلية كما هو موضح بالشكل (١-٤٧) :



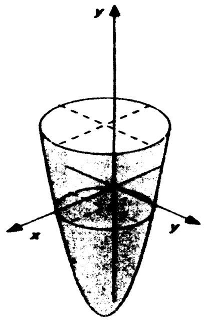
الشكل (١-٤٧)

مثال (٤)

أوجد النقاط الحرجة والقيم القصوى المحلية للدالة $z = f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 4y$.

الحل

لدينا $f_x(x,y) = 2x - 6$ و $f_y(x,y) = 2y - 4$ ، إن النقاط الحرجة تنتج من حل المعادلتين $f_x(x,y) = 0$ و $f_y(x,y) = 0$ ، وبالتالي يوجد فقط نقطة حرجة واحدة هي $(3,2)$ كما أن $f(3,2) = -13$. لكن الدالة $z = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 13$ ، وهي معادلة مجسم قطع مكافئ رأسه النقطة $(3,2,-13)$ ، ومقعر نحو الأعلى . أي أن $f(x,y) \geq f(3,2) = -13$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، وحسب التعريف (١-١٤-١) نجد أن $f(3,2) = -13$ تمثل قيمة صغرى محلية كما هو موضح بالشكل (١-٤٨) :



الشكل (١-٤٨)

مثال (٥)

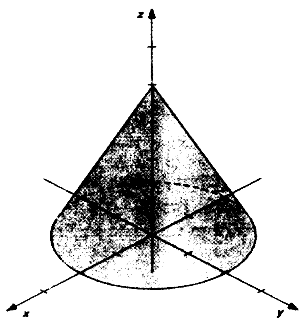
أوجد النقاط الحرجة والقيم القصوى للدالة $z = f(x,y) = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$

الحل

لكل $(x,y) \neq (0,0)$ لدينا

$f_x(x,y) = -2x(x^2 + y^2)^{-1/2}$ و $f_y(x,y) = -2y(x^2 + y^2)^{-1/2}$ ، إذا لا توجد نقطة (x,y) حيث $(x,y) \neq (0,0)$ تحقق المعادلتين $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$.

بالتالي فإن f_x و f_y غير موجودة عند $(0,0)$. أي أن النقطة $(0,0)$ هي نقطة حرجة ، كما أن $f(0,0) = 4$ أما السطح $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ فهو يمثل سطح مخروط رأسه $V(0,0,4)$ ومفتوح نحو الأسفل كما أن $f(x,y) \leq f(0,0) = 4$ من أجل كل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، وحسب التعريف (١-١٤-١) (أ) نجد أن $f(0,0) = 4$ تمثل قيمة عظمى محلية ، والشكل (١-٤٩) يوضح ذلك :



شكل (١-٤٩)

تجدر الإشارة إلى أن هذه الدالة غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

لنفرض أن $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{i}$ متجه الوحدة ، أي أن $u_1^2+u_2^2=1$ ولنفرض أن مستقيماً Δ يمر من النقطة (a,b) ويوازي المتجه $\vec{u}$. إن المعادلتين الوسيطتان للمستقيم Δ هما :

$$y=b+u_2t \quad ، \quad x=a+u_1t \quad ، \quad \text{حيث } t\in\mathbb{R}$$

(١-١٤-٦) تعريف

لنفرض أن f دالة قابلة للتفاضل عند (x,y) وأن $z=f(x,y)$ ، حيث $x=a+tu_1$ و $y=b+tu_2$ عندئذ z دالة في متغير واحد قابلة للاشتقاق عند t ، وحسب قاعدة السلسلة لدينا :

$$\frac{dz}{dt}=f_x\frac{dx}{dt}+f_y\frac{dy}{dt} \qquad (١)$$

$$z'(t)=f_x(x,y).u_1+f_y(x,y).u_2$$

فإذا كانت $z'(0)$ موجودة ، فإننا ندعو $z'(0)$ بالمشتقة الإتجاهية للدالة f وفق الاتجاه $\bar{u}$ عند (a,b) (directional derivative of f) وتكتب :

$$z'(0)=D_uf(a,b)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+u_1t,b+u_2t)-f(a,b)}{t}$$

(٢)

إذاً من العلاقتين (١) و (٢) نجد أن

$$z'(0)=D_uf(a,b)=f_x(a,b)u_1+f_y(a,b)u_2 \qquad (٣)$$

حيث إنه عندما يكون $t=0$ لدينا $x=a$ ، $y=b$.

حالة خاصة إذا كانت $\vec{u}=\vec{i}$ وكانت الدالة f قابلة للتفاضل عند (a,b) فإن

$$D_uf(a,b)=\lim_{t\mapsto 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

أما إذا كانت $\vec{u}=\vec{j}$ وكانت الدالة f قابلة للتفاضل عند (a,b) فإن :

$$D_uf(a,b)=\lim_{t\mapsto 0}\frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t}=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

أي أن المشتقة الإتجاهية للدالة f وفق الاتجاه $\vec{u}$ عند (a,b) هي تعميم للمشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة f عند (a,b) .

مثال (٦)

إذا كانت $z=f(x,y)=x^2+y^2$ فاحسب المشتقة الإتجاهية للدالة f عند $(3,2)$ وفق الاتجاه $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}$.

الحل

$f_y=2y$ ، $f_x=2x$ ، الآن لنوجد متجه الوحدة $\vec{u}$ في الاتجاه $\vec{v}$ ، بما أن $|\vec{v}|=\sqrt{16+9}=5$ ، فإن $\vec{u}=\frac{4}{5}\vec{i}-\frac{3}{3}\vec{j}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ ، ومنه نجد أن $u_1=\frac{4}{5}$ ، $u_2=\frac{-3}{5}$ ، كما أن $u_1^2+u_2^2=1$.

$$D_uf(3,2)=f_x(3,2)u_1+f_y(3,2)u_2=6\frac{4}{5}-4\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$$

إن مفهوم المشتقة الإتجاهية للدالة f وفق اتجاه $\vec{u}$ عند (a,b) سوف نستخدمه في برهان النظرية التالية والتي تفيدنا في تعيين القيم العظمى الصغرى المحلية لبعض الدوال في متغيرين .

(١-١٤-٧) نظرية

إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة على قرص مفتوح R مركزه (a,b) وأن $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$. لنعرّف الدالة التالية :

$g(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-(f_{xy}(x,y))^2$ فإن :

١) للدالة f قيمة عظمى محلية عند (a,b) إذا كانت :

$g(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2>0$ و $f_{xx}(a,b)<0$.

٢) للدالة f قيمة صغرى محلية عند (a,b) إذا كانت :

$g(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2>0$ و $f_{xx}(a,b)>0$.

٣) للدالة f نقطة سرجية (a,b) إذا كانت :

$$g(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2<0$$

٤) الاختبار يفشل إذا كانت $g(a,b)=0$.

البرهان

إن برهان النظرية يعتمد على اختبار المشتق الثاني للمتغير t للدالة :

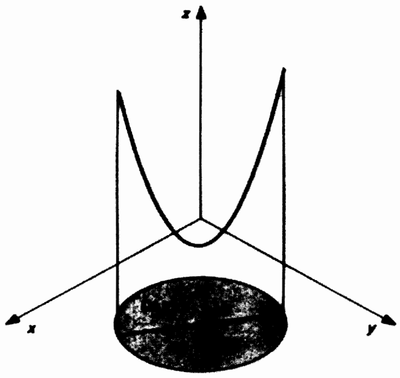
$z=f(x,y)$ ، حيث إن $x=a+tu_1$ ، $y=b+tu_2$ و $u_1^2+u_2^2=1$.

إن إشارة $z''(t)$ تعطي تقعر الدالة f عند (a,b) في الاتجاه $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ كما هو موضح بالشكل (١-٥٠) .

باستخدام قاعدة السلسلة لدينا

$$z'(t)=f_x(x,y)u_1+f_y(x,y)u_2 \qquad (٤)$$

$$z''(t)=[f_{xx}(x,y)u_1+f_{xy}(x,y)u_2]u_1+[f_{yy}(x,y)u_2+f_{yx}(x,y)u_1]u_2$$



الشكل (١-٥٠)

بما أن المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية متصلة على قرص مفتوح B_1 مركزه (a,b) ونصف قطره $\delta_1>0$ فإن $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ لكل $(x,y)\in B_1$. ومنه فإن

$$z''(t)=f_{xx}(x,y)u_1^2+2f_{xy}(x,y)u_1.u_2+f_{yy}(x,y)u_2^2 \qquad (٥)$$

نريد أن لا تتغير إشارة $z''(t)$ لجميع قيم t ، u_1 و u_2 حيث :

$$(x,y)=(a+u_1t,b+u_2t)\in B_1$$

فإذا كانت (a,b) نقطة حرجة للدالة f فإن :

$$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$$

وحسب العلاقة (٣) لدينا $z'(0)=f_x(a,b)u_1+f_y(a,b)u_2=0$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة مرتين متتاليتين نجد أن

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(a,b)&=z(t)-z(0)\\&=z'(t_1)(t-0)\\&=\left[z'(t_1)-z'(0)\right]t\end{aligned}$$

$$f(x,y)-f(a,b)=z''(t_2)t_1.t \qquad (٦)$$

حيث إن $0<t_2<t_1<t$ أو $t<t_1<t_2<0$

إذاً $t_1.t>0$. فإذا كانت إشارة $z''(t_2)$ ثابتة (أي لا تتغير) على B_1 فإن إشارة $f(x,y)-f(a,b)$ تبقى ثابتة عندما تتغير (x,y) داخل B_1 ، ومنه إما أن تكون $f(a,b)$

قيمة عظمى محلية أو أن تكون $f(a,b)$ قيمة صغرى محلية ، وهذا يتعلق بإشارة z'' . لذلك فالمسألة أصبحت هي دراسة إشارة z'' والمعطاة بالعلاقة (٥) .

نعلم أن المقدار من الدرجة الثانية Ax^2+Cx+D لا يساوي الصفر إذا كانت $C^2-4AD<0$، حيث إن A ، C و D أعداد حقيقية . لنفرض الآن أن :

$$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2>0 \qquad (٧)$$

بما أن الدالة $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$ متصلة على B_1 ، فإن من أجل :

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left[f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2\right]>0$$

يوجد $\delta_2>0$ بحيث إذا كان $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta_2$ فإن

$$|f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-(f_{xy}(x,y))^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2|<\varepsilon$$

أي أن :

$$f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-(f_{xy}(x,y))^2>0 \qquad (٨)$$

لكل $(x,y)\in B_2$ حيث B_2 قرص مفتوح مركزه (a,b) ونصف قطره δ_2 .

أما الشرط (٧) فهو يؤدي إلى أن المقدارين $f_{xx}(a,b)$ و $f_{yy}(a,b)$ لهما نفس الإشارة وبتعبير آخر إما أن يكون $f_{xx}(a,b)>0$ و $f_{yy}(a,b)>0$ ، أو أن يكون $f_{xx}(a,b)<0$ و $f_{yy}(a,b)<0$. إذاً من المتراجحة (٨) نستنتج أن $f_{xx}(x,y)$ و $f_{yy}(x,y)$ لها نفس الإشارة على القرص B_2 . فإذا كانت $f_{xx}(x,y)>0$ على B_2 فإن :

$$z''(t)=f_{xx}(x,y)\left[u_1^2+\frac{2f_{xy}}{f_{xx}}u_1u_2+\frac{f_{yy}}{f_{xx}}u_2^2\right]$$

$$z''(t)=f_{xx}(x,y)\left[\left(u_1+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}u_2\right)^2+\frac{f_{yy}f_{xx}-(f_{xy})^2}{(f_{xx})^2}u_2^2\right] \qquad (٩)$$

من هذه العلاقة نستنتج أن $z''(t)>0$ على B_2. لذلك نجد أنه إذا كانت $f_{xx}(x,y)<0$ على B_2 فإن $z''(t)<0$ على B_2 وبالتالي فإن إشارة z'' هي من إشارة f_{xx} على B_2 .

١) إذا فرضنا أن الشرط (٧) محقق وأن $f_{xx}(a,b)<0$. لما كانت f_{xx} متصلة عند (a,b) فإنه يوجد قرص مفتوح B_3 مركزه (a,b) ونصف قطره δ_3 بحيث يكون :

$$f_{xx}(x,y)<0 \quad \text{لكل} \quad (x,y)\in B_3 \qquad (١٠)$$

ليكن $\delta_4=min\{\delta_2,\delta_3\}$ إن المتراجحتين (٨) و (١٠) محققتان على القرص المفتوح B_4 الذي مركزه (a,b) ونصف قطره δ_4 ، وحسب العلاقتين (٩) و (٦) نجد

$$f(x,y)-f(a,b)\le 0 \text{ ، لكل } (x,y)\in B_4 \text{،}$$

أي أن $f(a,b)$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f عند (a,b).

٢) إذا فرضنا أن الشرط (٧) محقق وأن $f_{yy}(a,b)>0$. فإنه يمكن البرهان على وجود قرص مفتوح B_5 مركزه (a,b) ونصف قطره δ_5 بحيث يكون :

$$f(x,y)-f(a,b)\geq 0 \text{ ، لكل } (x,y)\in B_5 \text{،}$$

وهذا يعني أن $f(a,b)$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند (a,b) .

٣) إذا فرضنا أن

$$g(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{yx}(a,b))^2<0$$

فإن z'' يغير إشارته على أي قرص مفتوح مركزه (a,b) ، أي أن تقعر السطح $z=f(x,y)$ يكون نحو الأعلى في اتجاه ، ويكون نحو الأسفل في اتجاه آخر وهذا يعني أن (a,b) هي نقطة سرجية للدالة f .

تنويه: ننوه هنا إلى أنه في حالة فشل الاختبار يجب البحث عن اختبار آخر لتحديد ما إذا كان للدالة قيم قصوى محلية أو عند النقطة الحرجة (a,b) أو لها نقطة سرجية عند تلك النقطة. في هذه الحالة يمكن الرجوع إلى التعريف .

لنأخذ الآن عدة أمثلة لتوضيح النظرية (١-١٤-٧).

مثال (٧)

إذا كانت $z=f(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3-x+xy^2$

١) أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة .

٢) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك السرجية إن وجدت للدالة f .

الحل

(١) $f_x(x,y)=x^2-1+y^2$ و $f_y=2xy$

لنجد الآن النقاط (x,y) التي تحقق المعادلتين

$$x^2-1+y^2=0 \qquad (١١)$$

$$2xy=0 \qquad (١٢)$$

من المعادلة (١٢) لدينا : إما $x=0$ ومنه $y^2=1$ إذاً $y=\mp 1$ أي أن $(0,1)$ ، $(0,-1)$ تحقق المعادلتين (١١) ، (١٢) . وإما $y=0$ ومنـه $x^2=1$. إذاً $x=\mp 1$ أي أن $(1,0)$ ، $(-1,0)$ تحقق المعادلتين (١١) ، (١٢) . وبالتالي تكون النقاط الحرجة للدالة f هي: $(0,+1)$ ، $(0,-1)$ ، $(1,0)$ ، $(-1,0)$.

٢) لدينا $f_{xx}=2x, f_{yy}=2x, f_{xy}=2y$ إذاً :

$$g(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4x^2 - 4y^2$$

(أ) عند النقطة $(1,0)$ لدينا

$$g(1,0) = 4 > 0$$
$$f_{xx}(1,0) = 2 > 0$$

لذلك فإن $f(1,0) = \frac{-2}{3}$ قيمة صغرى محلية .

(ب) عند النقطة $(-1,0)$ لدينا

$$g(-1,0) = 4 > 0$$
$$f_{xx}(-1,0) = -2 < 0$$

وبالتالي فإن $f(-1,0) = \frac{2}{3}$ قيمة عظمى محلية .

(ج) عند النقطة $(0,1)$ لدينا

$$g(0,1) = -4 < 0$$

وبالتالي فإن $(0,1)$ هي نقطة سرجية .

(د) عند النقطة $(0,-1)$ لدينا :

$$g(0,-1) = -4 < 0$$

ولذلك فإن $(0,-1)$ نقطة سرجية أيضاً .

مثال (٨)

أوجد النقاط الحرجة للدالة : $z = f(x,y) = x^4 + y^2$ ، ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية والنقاط السرجية للدالة f إن وجدت .

الحل

بحل المعادلتين

$$f_y(x,y) = 2y = 0 \quad \text{و} \quad f_x(x,y) = 4x^3 = 0$$

نجد أن النقطة الحرجة الوحيدة هي $(0,0)$.

ولكن

$$f_{xx} = 12x^2 \quad , \quad f_{yy} = 2 \quad , \quad f_{xy} = 0$$

ومنه فإن

$$g(x,y) = 24x^2$$

وبالتالي نجد أن

$$g(0,0) = 0$$

وعليه فالنظرية (١-١٤-٧) لا تعطينا أي معلومات ، لذلك نعود إلى تعريف القيم القصوى المحلية نأخذ قرص D مفتوح مركزه $(0,0)$ ونصف قطره $r>0$ فنجد

$$f(x,y)=x^4+y^2 \geq f(0,0)=0 \quad \text{لكل} \quad (x,y)\in D$$

أي أن $f(0,0)=0$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f .

مثال (٩)

أوجد النقاط الحرجة للدالة $z=f(x,y)=x^4+y^3$

ثم حدّد القيم العظمى والصغرى المحلية والنقاط السرجية للدالة f أن وجدت .

الحل

بحل المعادلتين التاليتين

$$f_x=4x^3=0 \quad \text{و} \quad f_y=3y^2=0$$

نجد أنه يوجد نقطة حرجة وحيدة هي $(0,0)$.

وبما أن $f_{xy}=0$ ، $f_{yy}=6y$ ، $f_{xx}=12x^2$

فإن $g(x,y)=72x^2y$. وبالتالي $g(0,0)=0$. إذاً لا نستطيع استخدام النظرية (١-١٤-٧). لكن إذا فرضنا D أي قرص مفتوح مركزه $(0,0)$ ونصف قطره $r>0$ نجد أنه يوجد $(0,y)\in D$ ، حيث $y>0$ ، بالتالي $f(0,y)=y^3>0=f(0,0)$. كما توجد $(0,y)\in D$، حيث $y<0$ ، بالتالي $f(0,y)=y^3<0=f(0,0)$. أي أن $f(0,0)$ ليست قيمة عظمى أو قيمة صغرى محلية . وحيث إن $f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)=0$ ويوجد للدالة قيمة صغرى محلية على أحد أقطار قرص مركزه النقطة $(0,0)$ فقط عند هذه النقطة ولكن لا يوجد قيمة عظمى محلية على قطر آخر فقط عند النقطة $(0,0)$، بالتالي فإن النقطة $(0,0)$ ليست نقطة سرجية.

مثال (١٠)

أوجد القيم القصوى المحلية إن وجدت ، للدالة $z=f(x,y)=2x^4+y^2-x^2-2y$.

الحل

نجد أولاً النقاط الحرجة للدالة f ، وذلك بإيجاد (x,y) التي تحقق المعادلتين التاليتين

$$f_x(x,y)=8x^3-2x=0 \quad \text{و} \quad f_y(x,y)=2y-2=0$$

بحل المعادلتين نجد أن النقاط الحرجة هي : $(\frac{-1}{2},1)$ ، $(\frac{1}{2},1)$ ، $(0,1)$.

بما أن

$$f_{xx}(x,y)=24x^2-2 \quad , \quad f_{yy}=2 \quad , \quad f_{xy}=0$$

فإن

$$g(x,y)=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=4(12x^2-1)$$

(أ) عند النقطة $(0,1)$ لدينا

$$g(0,1)=-4<0$$

أي أن النقطة $(0,1)$ هي نقطة سرجية و أن $f(0,1)=-1$ ليست قيمة قصوى محلية .

(ب) عند النقطة $(\frac{-1}{2},1)$ لدينا

$$f_{xx}(\frac{-1}{2},1)=4>0 \quad ، \quad g(\frac{-1}{2},1)=8>0$$

وبالتالي فإن $f(\frac{-1}{2},1)=\frac{-9}{8}$ قيمة صغرى محلية .

(ج) عند النقطة $(\frac{1}{2},1)$ لدينا

$$f_{xx}(\frac{1}{2},1)=4>0 \ ، \ g(\frac{1}{2},1)=8>0$$

بالتالي $f(\frac{1}{2},1)=\frac{-9}{8}$ قيمة صغرى محلية أيضاً.

عند دراستنا للقيم القصوى المطلقة لدالة في متغير واحد على فترة مغلقة نتبع الخطوات التالية:

(أ) نجد النقاط الحرجة للدالة على الفترة ومن ثم نجد قيم الدالة عند هذه النقاط.

(ب) نجد قيم الدالة عند نقاط الحد للفترة وهي بداية ونهاية الفترة.

(ج) نقارن بين القيم التي حصلنا عليها، فتكون أكبرها القيمة العظمى وأصغرها القيمة الصغرى.

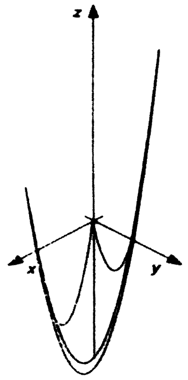
لا يختلف الوضع كثيرا في حالة دالة في متغيرين، فقط قد تكون نقاط الحد للمنطقة المراد دراسة القيم القصوى المطلقة عليها مجموعة غير منتهية. وبالتالي لن نستطيع إيجاد قيم الدالة عند كل منها كما هو الحال لدالة في متغير واحد، وبدلا من ذلك سنقوم بتجزئة مجموعة الحد للمنطقة إلى قطع تكافئ كل منها قطعة مستقيمة والتي تكافئ فترة مغلقة، وبذلك تتحول المسألة إلى حالة دالة في متغير واحد كما توضحه الأمثلة التالية.

مثال (١١)

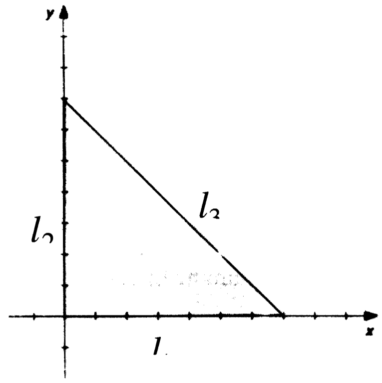
أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $z=f(x,y)=x^2-6x+y^2-4y$ على المنطقة المغلقة والمحدودة بالمستقيمات $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=7$

الحل

إن المنطقة المحدودة بالمستقيمات : $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=7$ هي منطقة مثلثية موضحة بالشكل (١-٥١) . أما رسم الدالة فهو عبارة عن سطح موضح بالشكل (١-٥٢) .



الشكل (١-٥٢)



الشكل (١-٥١)

أولاً :نجد النقاط الحرجة للدالة f . من أجل هذا نوجد حل المعادلتين التاليتين :

$$f_y(x,y)=2y-4=0 \quad \text{و} \quad f_x(x,y)=2x-6=0$$

فنجد أن النقطة الحرجة الوحيدة هي $(3,2)$ وهي تنتمي للمنطقة، نوجد قيمة الدالة عند هذه النقطة أي أن $f(3,2)=-13$.

ثانياً :ندرس القيم القصوى المطلقة للدالة f على مجموعة الحد للمنطقة ، ونقوم بتجزئتها إلى قطع مستقيمة l_1 ، l_2 و l_3 كما هو موضح بالشكل (١-٥١).

(أ) على l_1 فإن $y=0$. نعوض في معادلة الدالة، نحصل على $f(x,0)=x^2-6x$ وهي دالة في متغير واحد مجالها $[0,7]$. بما أن $f_x(x,0)=2x-6=0$ ، بالتالي $x=3$ أي أن للدالة نقطة حرجة عند $x=3$ وهي تنتمي للفترة $[0,7]$، وقيمة الدالة عندها هي $f(3,0)=-9$. نوجد الآن قيم الدالة عند نهايتي الفترة أي $f(0,0)=0$ و $f(7,0)=7$

(ب) على l_2 فإن $x=0$ ، نعوض في معادلة الدالة، نحصل على $f(0,y)=y^2-4y$ وهي دالة في متغير واحد مجالها $[0,7]$. بما أن $f_y(x,0)=2y-4=0$ ، بالتالي $y=2$ أي أن للدالة نقطة حرجة عند $y=2$ وهي تنتمي للفترة $[0,7]$، وقيمة الدالة عندها هي $f(0,2)=-4$. نجد الآن قيم الدالة عند نهايتي الفترة أي $f(0,0)=0$ و $f(0,7)=21$.

(ج) على l_3 فإن $y=7-x$. نعوض في معادلة الدالة، نحصل على $f(x,7-x)=2x^2-6x+21$ وهي دالة في متغير واحد مجالها $[0,7]$. بما أن $f_x(x,7-x)=4x-6=0$ ، بالتالي $x=1.5$ أي أن للدالة نقطة حرجة عند $x=1.5$ وهي تنتمي للفترة $[0,7]$، وقيمة الدالة عندها هي $f(1.5,5.5)=-16.5$. نجد الآن قيم الدالة عند نهايتي الفترة أي $f(0,7)=21$ و $f(7,0)=7$.

ندون جميع القيم التي حصلنا عليها بالجدول التالي:

(x,y)	$(3,2)$	$(1.5,5.5)$	$(3,0)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(7,0)$	$(0,7)$
$f(x,y)$	-13	-16.5	-9	-4	0	7	21

يتضح من الجدول أن للدالة قيمة عظمى مطلقة عند النقطة $(0,7)$ وقيمتها $f(0,7)=21$ ، وأن لها قيمة صغرى مطلقة عند النقطة $(1.5,5.5)$ وقيمتها $f(1.5,5.5)=-16.5$.

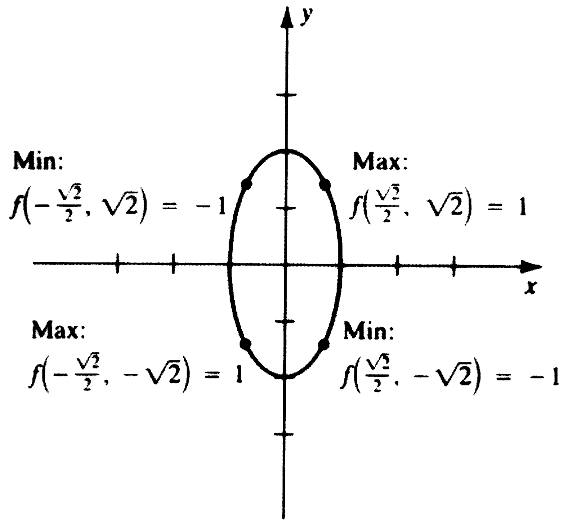
مثال (١٢)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة $z=f(x,y)=xy$ عندما تكـون (x,y) مقيـدة بالمنطقة المغلقة والمحدودة بالقطع الناقص الذي معادلته :

$$4x^2+y^2=4$$

الحل

إن المنطقة المغلقة والمحدودة بالقطع الناقص موضحة بالشكل (١-٥٣) :



الشكل (١-٥٣)

أولاً : أولاً :نجد النقاط الحرجة للدالة f . من أجل هذا نوجد حل المعادلتين التاليتين:

$$f_x(x,y)=y=0 \quad ، \quad f_y(x,y)=x=0$$

وبالتالي فإن للدالة نقطة حرجة واحدة $(0,0)$ وهي تنتمي للمنطقة، وأن $f(0,0)=0$.

ثانياً : ندرس القيم القصوى المطلقة للدالة f على مجموعة الحد للمنطقة ، ونقوم بتجزئتها إلى جزئين l_1 ، l_2 تكافئان قطعتين مستقيمتين.

(أ) على l_1 ، فإن $y=2\sqrt{1-x^2}$ نعوض في معادلة الدالة، نحصل على

$$h(x)=f(x,2\sqrt{1-x^2})=2x\sqrt{1-x^2}$$

وهي دالة في متغير واحد مجالها $[-1,1]$. بما أن

$$h'(x)=2\sqrt{1-x^2}-2x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} ،$$

عندئذ فإن النقاط الحرجة هي $x=\mp1$, $x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، وجميعها تنتمي للفترة $[-1,1]$. ومنه فإن

$h(1)=f(1,0)=0$ ، $h(1)=f(1,0)=0$ ، $h(\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})=f(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})=1$ ،

$h(-1)=f(-1,0)=0$ ، $h(\frac{-1}{\sqrt{2}})=f(\frac{-1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})=f(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})=-1$.

إن معادلة القطع تعرّف وبشكل ضمني دالتين

(ب) علـــى l_2 ، فـــإن $y=-2\sqrt{1-x^2}$ ، نعـــوض في معادلـــة الدالـــة، نحـصل علـــى $g(x)=f(x,-2\sqrt{1-x^2})=-2x\sqrt{1-x^2}$ وهي دالة في متغير واحد مجالها $[-1,1]$. كمـــا أن لدينا أيضاً $g'(x)=-2\sqrt{1-x^2}+2x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=2\frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$

ومن ثم فإن النقاط الحرجة للدالة g هي $x=\mp 1$ و $x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. ومنه فإن :

$g(1)=f(1,0)=0$ ، $g(-1)=f(-1,0)=0$ ، $g(\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2})=-1$ ،

$g(\frac{-1}{\sqrt{2}})=f(\frac{-1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2})=1$.

ندون جميع القيم التي حصلنا عليها بالجدول التالي:

(x,y)	$(0,0)$	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$	$(\frac{-\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$	$(\frac{-\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$
$f(x,y)$	0	0	0	1	-1	-1	1

يتضح من الجدول أن للدالة قيمة عظمى مطلقة عند النقطتين $(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$ و $(\frac{-\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$ وقيمتها 1 ، وأن لها قيمة صغرى مطلقة عند النقطتين $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$ و $(\frac{-\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$ وقيمتها -1 .

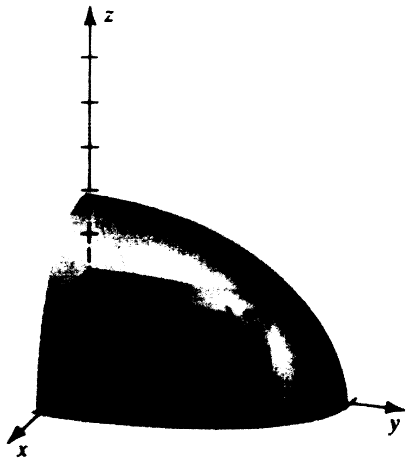
في المثالين السابقين (١١) و(١٢) استطعنا إيجاد القيم العظمى والصغرى المطلقة ، وهذا يعود إلى أن مجموعة الحد للمنطقة يمكن تجزئتها إلى عدة منحنيات تكافئ كل منها قطعة مستقيمة . ولكن قد يتعذر ذلك أحيانا أو أن عملية التقسيم هذه ودراسة القيم القصوى المطلقة عليها قد تكون شاقة. وهذه من سلبيات هذه الطريقة . لحسن الحظ هناك طريقة ثانية يمكن اتباعها لإيجاد القيم القصوى للدالة وتدعى هذه الطريقة مضاريب لاجرانج (Lagrange multipliers) . ومما يميّز هذه الطريقة عن سابقتها أنها لا تتطلب تقسيم مجموعة الحد، كما أن طريقة لاجرانج يمكن استخدامها في حالة دوال لأكثر من متغيرين .

(١-١٤-٨) مضاريب لاجرانج (Lagrange multipliers)

في كثير من التطبيقات نبحث عن القيم القصوى لدالة f عندما تكون المـــتغيرات مقيّـــدة بطريقة معينة ، ولتوضيح هذه الفكرة ، لنفرض أننا نبحث عن أكبر حجم لعلبة والتي وجوهها توازي

المستويات الإحداثيــة ، بحيــث تكــون العلبــة واقعــة داخــل المجــسم الــسطح الناقــصي : $16x^2+4y^2+9z^2=144$. نظراً لتناظر العلبة بالنسبة للمستويات الإحداثية ، يكفي عندئــذ أن نختير جزء العلبة الواقع في الثمن الأول كما هو موضــح بالــشكل (١-٥٤) . فــإذا كانــت $p(x,y,z)$ إحداثيات رأس العلبة والموضح في هذا الشكل فإن حجم العلبة هو : $V=8xyz$.

والمسألة أصبحت إيجاد القيمة العظمى للحجم V عندما تكون (x,y,z) مقيّــدة **(Constraint)** على السطح الناقصي $16x^2+4y^2+9z^2-144=0$. يمكن استخدام الطريقة السابقة وذلك بإيجاد القيمة العظمى للدالة $V=\frac{1}{3}(8xy)\sqrt{144-16x^2-4y^2}$ حيث إن (x,y) مقيّدة داخل المنطقة المغلقة والمحدودة D، حيث $D=\left\{(x,y)\ \ ;\ \ 16x^2+4y^2\le 144\right\}$



الشكل (١-٥٤)

ولكن في كثير من الحالات ، قد يكون من الصعب ، بل قد يكون من المستحيل إيجاد z بدلالة x و y ولهذا السبب فإن طريقة لاجرانج يمكن استخدامها بدون البحث عن دالة z بدلالــة x و y كما هو موضح بالمثال أعلاه.

إذا كانت $w=f(x,y)$. نعرف الدالة $\nabla f(x,y)$ بأنها

$$\nabla f(x,y)=f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$$

كذلك إذا كانت $w=f(x,y,z)$ ، فإن

$$\nabla f(x,y)=f_x(x,y,z)\vec{i}+f_y(x,y,z)\vec{j}+f_z(x,y,z)\vec{k}$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متجهات الوحدة في اتجاه المحاور الإحداثية.

النظرية التالية تزودنا بالطريقة البديلة لإيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة.

(١-١٤-٩) نظرية (نظرية لاجرانج مع قيد واحــد) **(Lagrange's theory with one constraint)**

لتكن f و g دالتين في المتغيرين x و y ولنفرض أن المـشتقات الجزئيـة مـن الرتبـة الثانيـة للدالتين f و g متصلة على مجال تعريفهما ، ولنفرض أيضاً أن $f(x_0, y_0)$ هي قيمة قـصوى للدالة f عندما تكون (x, y) مقيّدة على المنحنى $g(x, y) = 0$. فإذا كانت

$$\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$$

فإنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث يكون

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

وهذه العلاقة تكافئ العلاقة الآتية

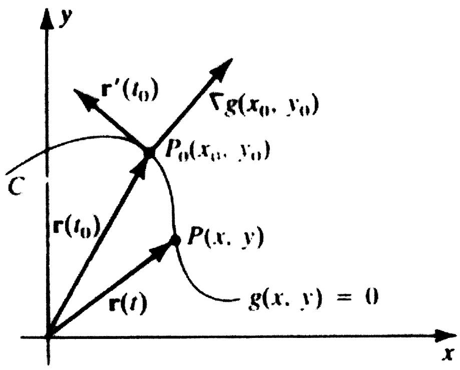
$$f_x(x_0, y_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\vec{j} = \lambda\left(g_x(x_0, y_0)\vec{i} + g_y(x_0, y_0)\vec{j}\right)$$

البرهان

إن العلاقة $g(x, y) = 0$ تمثل منحنى C في المستوى xy . إن هذا المنحنى يمكن تمثيله بالمعـادلات الوسيطية $y = k(t)$, $x = h(t)$ حيث إن t وسيط يتغير في فترة معينة I . ليكن لدينا المتجه

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = h(t)\vec{i} + k(t)\vec{j}$$

وبالتالي فإن $\vec{r}(t)$ يمثل وضع المتجه للنقطة $P(x, y)$ على C ، كمـا هـو موضـح بالـشكل (١-٥٥) .



الشكل (١-٥٥)

لنفرض أن للدالة f قيمة قصوى عند النقطة $P(x_0, y_0)$ والموافقة للقيمة $t = t_0$ ، أي أن :

$$\vec{r}(t_0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} = h(t_0)\vec{i} + k(t_0)\vec{j}$$

لنعرف الدالة في المتغير t بالقاعدة

$$F(t) = f(h(t), k(t))$$

إذاً عندما تتغير t في الفترة I ، فإن $f(x, y)$ تمثل قيمة f عند (x, y) كمـا أن (x, y) هـي نقطة من المنحنى C . بما أن $f(x_0, y_0)$ هي قيمة قصوى للدالة f فإن

$$F(t_0) = f(h(t), k(t))$$

هي قيمة قصوى للدالة F . وفق شروط النظرية لدينا $F'(t_0) = 0$ ، وباستخدام قاعدة السلسلة لدينا أيضاً

$$F'(t) = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}$$
$$F'(t) = f_x(x, y)h'(t) + f_y(x, y)k'(t)$$

ومنه فإن

$$F'(t_0) = f_x(x_0, y_0)h'(t_0) + f_y(x_0, y_0)k'(t_0) = 0$$

أي أن :

$$(*) \qquad F'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0)\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = 0$$

حيث إن

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = h'(t_0)\vec{i} + k'(t_0)\vec{j}$$

إن العلاقة (*) تعني أن المتجهين $\nabla f(x_0, y_0)$ ، $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ متعامدان . أما $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ فهو يمثل المتجه المماس للمنحنى C عند النقطة $P(x_0, y_0)$. من ناحية أخرى فإن $\nabla g(x_0, y_0)$ تمثل أيضاً المتجه المتعامد مع المتجه $\vec{r}(t_0)$ وبالتالي فإن المتجهين $\nabla f(x_0, y_0)$ و $\nabla g(x_0, y_0)$ متعامدان مع المتجه $\vec{r}(t_0)$. وهذا يعني أن $\nabla f(x_0, y_0)$ و $\nabla g(x_0, y_0)$ متوازيان . إذاً يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث يكون :

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

إن العلاقة الأخيرة تكافئ المعادلتين الآتيتين :

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

حيث (x_0, y_0) تقع على المنحنى $g(x, y) = 0$.

نستنتج من النظرية (١-١٤-٩) أنه إذا كانت للدالة f قيمة قصوى عند (x_0, y_0) مع القيد $g(x, y) = 0$ فإن (x_0, y_0) يجب أن تحقق المعادلات التالية:

$$(**) \qquad \begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

بالتالي فإن مسألة إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة تتحول إلى إيجاد حل المعادلات السابقة. وهذا ما نستعرضه في الأمثلة التالية.

مثال (١٣)

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y)=xy$ إذا كانت (x,y) مقيّدة على المنحنى

$$g(x,y)=4x^2+y^2-4=0$$

الحل

من المعادلات في (**) نحصل على

١) $x=2\lambda y$ ، ٢) $y=8\lambda x$ ، ٣) $4x^2+y^2-4=0$ (١٣)

لنجد حل هذه المعادلات .

بالتعويض من (٢) في (١) لدينا

$$x=2\lambda y=2\lambda(8\lambda x)$$

إذاً $x=16\lambda^2 x$ أو $x(1-16\lambda^2)=0$

وهذا يعني أن $x=0$ أو أن $\lambda=\mp\frac{1}{4}$

فإذا كانت $x=0$ فبالتعويض في المعادلة (٣) نجد أن $y=\mp 2$ ، ولكن لا يوجد $\lambda\in\mathbb{R}$ بحيث تكون $x=0$ ، $y=\mp 2$ في نفس الوقت تحقق λ المعادلات (١) ، (٢) و (٣) ومنه فإنه لا يمكن أن تكون كل من $f(0,2)$ و $f(0,-2)$ قيمة قصوى للدالة f على القيد $g(x,y)=0$. أما إذا كانت $\lambda=\mp\frac{1}{4}$ فإن

$$y=8\lambda x=8x(\mp\frac{1}{4})=\mp 2x$$

نعوض أيضاً في المعادلة (٣) فنجد أن :

$$4x^2+4x^2-4=0$$

ومنه فإن

$$x=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

فإذا كانت $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $y=\mp\sqrt{2}$

أما إذا كانت $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ فإن $y=\mp\sqrt{2}$

وهكذا فإن للدالة f قيم قصوى عند النقاط $(\frac{\sqrt{2}}{2},\mp 2)$ ، $(\frac{-\sqrt{2}}{2},\mp\sqrt{2})$ وقــد وجــدنا في المثال (١٢) أن القيمة العظمى للدالة f هي 1 ، كما أن :

$$f(\frac{-\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})=f(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})=1$$

وأن القيمة الصغرى للدالة f هي -1 ، كما أن :

$$f(\frac{-\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})=f(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})=-1$$

وذلك على القيد $g(x,y)=0$.

مثال (١٤)

أوجد أبعاد المستطيل الذي يمكن رسمه داخل دائرة مركزها $(0,0)$ ، ونصف قطرها 1 بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.

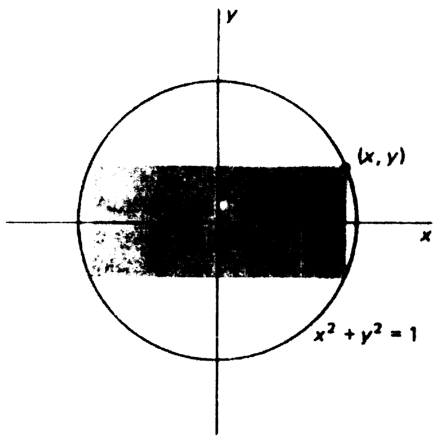
الحل

بسبب تناظر المستطيل بالنسبة للمحاور الإحداثية ، فإن مساحة المستطيل هي

$$f(x,y)=4xy$$

كما هو موضح بالشكل (١-٥٦) حيث أن (x,y) مقيّدة على محيط الدائرة :

$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$$



الشكل (١-٥٦)

من (**) ، فإن

$$4y=2\lambda x$$
$$4x=2\lambda y$$
$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

وحيث أن أبعاد المستطيل لا تساوي صفرا، فإن $x \neq 0$ و $y \neq 0$ وبالتالي فإن

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

إذاً لدينا $y^2 = x^2$ ، وحيث أن (x, y) واقعة في الربع الأول ، لذا فإن $y = x$ ، وبالتعويض في معادلة الدائرة نجد أن

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي فإن مساحة المستطيل تساوي 2 وحدة مربعة ،كما أن هذه المساحة هي أكبر ما يمكن لأنه إذاً أخذنا مستطيل آخر رؤوسه تقع على محيط الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ ، ولتكن أحد رؤوسه والواقع في الربع الأول $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ، ويكون مساحة المستطيل تساوي $\sqrt{3}$ وهكذا نلاحظ أن طريقة لاجرانج محدّدة فقط القيم القصوى بدون تحديد القيم العظمى أو القيم الصغرى ، لذلك نستخدم بعض الطرق المناسبة لتحديد القيم العظمى أو الصغرى . في مثالنا هذا تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما يكون لدينا مربع رؤوسه $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ، $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ ، $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$، $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

أما القيمة العظمى للدالة $f(x, y) = 4xy$ على القيد $x^2 + y^2 = 1$ فهي :

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = 2$$

والقيمة الصغرى للدالة f على نفس القيد فهي

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2$$

النظرية التالية هي تعميم للنظرية (١-١٤-٩). وسنحذف برهانها نظرا للتشابه الكبير في البرهان مع تلك النظرية.

(١-١٤-١٠) نظرية (نظرية لاجرانج في ثلاثة متغيرات وبقيد واحد)

لتكن f و f دالتين في ثلاثة متغيرات ، ولنفرض أن مشتقات f ، g الجزئية من الرتبة الأولى متصلة على نطاقهما ولنفرض أيضاً أن $f(x_0, y_0, z_0)$ هي قيمة قصوى للدالة f عندما تكون (x, y, z) مقيدة على السطح $g(x, y, z) = 0$. فإذا فرضنا أن $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ فإنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث يكون :

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

إن العلاقة $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ تكافئ المعادلات الثلاث التالية:

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0,z_0)=\lambda g_x(x_0,y_0,z_0) \\ f_y(x_0,y_0,z_0)=\lambda g_y(x_0,y_0,z_0) \\ f_z(x_0,y_0,z_0)=\lambda g_z(x_0,y_0,z_0) \end{cases}$$

حيث (x_0,y_0,z_0) تقع على المنحنى $g(x,y,z)=0$.

نستنتج من النظرية (١-١٤-١٠) أنه إذا كانت للدالة f قيمة قصوى عند (x_0,y_0,z_0) مع القيد $g(x,y,z)=0$ فإن (x_0,y_0,z_0) يجب أن تحقق المعادلات التالية:

$$(***)\qquad \begin{aligned} f_x(x,y,z)&=\lambda g_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z)&=\lambda g_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z)&=\lambda g_z(x,y,z) \\ g(x,y,z)&=0 \end{aligned}$$

بالتالي فإن مسألة إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة تتحول إلى إيجاد حل المعادلات السابقة. وهذا ما نستعرضه في الأمثلة التالية.

مثال (١٥)

إذا كانت $T(x,y,z)=20+2x+2y+z^2$ تمثل درجة الحرارة على سطح نصف الكرة $x^2+y^2+z^2=8$ أي $z\geq 0$. أوجد القيمة العظمى لدرجة الحرارة على سطح نصف هذه الكرة .

الحل

من (***) ، نحصل على

١) $2=2\lambda$ ٢) $2=2\lambda y$ ٣) $2=2\lambda z$ ٤) $x^2+y^2+z^2=8$.

من المعادلة (٣) لدينا $z(1-\lambda)$ ، وبالتالي إما $z=0$ أو $\lambda=1$. فإذا كان $z=0$ فإن $x^2+y^2=8$ ، $1=\lambda y$ ، $1=\lambda x$ وبالتالي فإن $x\neq 0$ ، $y\neq 0$ و $\lambda\neq 0$. ومنه فإن $y=x=\frac{1}{\lambda}$. بالتعويض في معادلة القيد نجد : $\frac{2}{\lambda^2}=8$ ، أي أن $\lambda=\mp\frac{1}{2}$

عندما $\lambda=\frac{1}{2}$ فإن $x=y=2$ ، $z=0$

عندما $\lambda=\frac{-1}{2}$ فإن $x=y=-2$ ، $z=0$

وبالتالي فإن

$$f(2,2,0)=T(2,2,0)=28$$

$$f(-2,-2,0)=T(-2,-2,0)=12$$

أما إذا كانت $\lambda=1$ فإن $x=y=1$ وبالتعويض في معادلة القيد نجد

$$z^2 = 6 \quad \text{ومنه} \quad z = \mp\sqrt{6}$$

نأخذ فقط النقطة $(1,1,\sqrt{6})$ ونرفض النقطة $(1,1,-\sqrt{6})$ لأنها تقع في النصف الأسفل لسطح الكرة . ويكون لدينا

$$f(1,1,\sqrt{6}) = 20 + 2 + 2 + 6 = 30$$

أي أن القيمة العظمى لدرجة الحرارة هي $T(1,1,\sqrt{6}) = 30$.

مثال (١٦)

نريد صنع علبة مستطيلة بدون غطاء علوي من صفيحة معدنية مساحتها $12m^2$. أوجد أبعاد هذه العلبة بحيث يكون لها أكبر حجم.

الحل

لنفرض x ، y ، z أبعاد العلبة ، ومنه يكون حجم العلبة :

$$V(x,y,z) = f(x,y,z) = xyz$$

أما مساحة وجوه العلبة تعطى بالمعادلة

$$g(x,y,z) = 2xy + 2yz + xy - 12 = 0$$

أي أن المعادلة الأخيرة تمثل قيد الدالة f . المسألة الآن أصبحت البحث عن القيمة العظمى للدالة f تحت القيد $g(x,y,z) = 2xy + 2yz + xy - 12 = 0$.

من (***) ، نحصل على

$$yz = \lambda(2z + y) \tag{١٤}$$

$$xz = \lambda(2z + x) \tag{١٥}$$

$$xy = 2\lambda(x + y) \tag{١٦}$$

$$g(x,y,z) = 2xy + 2yz + xy - 12 = 0 \tag{١٧}$$

ومنه لدينا المعادلات الآتية

$$xyz = \lambda(2zx + yx) \tag{١٨}$$

$$yxz = \lambda(2zy + yx) \tag{١٩}$$

$$xyz = 2\lambda(xz + zy) \tag{٢٠}$$

نلاحظ أن $\lambda \neq 0$ ، لأنه لو كانت $\lambda = 0$ فإن $xy = xz = yz = 0$ وهذا يتناقض مع معادلة القيد. من المعادلتين (١٨) و (١٩) لدينا

$$2zx + yx = 2zy + yx$$

ومنه فإن $zx = yz$ ، ولكن $z \neq 0$ (لأنه إذا كانت $z = 0$ فإن $V = 0$) . وهذا يعني أن $y = x$. لذلك لدينا من المعادلتين (١٩) و (٢٠) :

$$2zy + yx = 2yz + 2xz$$

ومنه $yx = 2zx$ ، وحيث إن $x \neq 0$ لنفس السبب السابق ، لذلك فإن لدينا $y = 2z$. وهكذا يكون لدينا $x = y = 2z$ ، وبالتعويض في معادلة القيد نجد

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

ومنه فإن $z = 1$ لأن $z > 0$ وهكذا فإن أبعاد العلبة ، وحسب الشروط المفروضة هـي : $x = 2$ ، $y = 2$ ، $z = 1$ ومن السهل التأكد من أن هذه الأبعاد تعطي أكبر حجم للعلبة.

مثال (١٧)

أوجد نقطة من المستوي $4x - 3y + z - 5 = 0$ بحيث تكون أقرب ما يمكن من النقطة $P(2,1,-1)$.

الحل

الطريقة الأولى : إن بعد النقطة (x, y, z) عن النقطة $P(2,1,-1)$ هو :

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

ولنكتب

$$d^2 = f(x, y, z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

والمسألة أصبحت البحث عن القيمة الصغرى المطلقة للدالة f عندما تكون (x, y, z) مقيدة بالمعادلة

$$g(x, y, z) = 4x - 3y + z - 5 = 0$$

من (***) ، نحصل على

$$2(x-2) = 4\lambda \qquad (٢١)$$

$$2(y-1) = -3\lambda \qquad (٢٢)$$

$$2(z+1) = \lambda \qquad (٢٣)$$

$$g(x, y, z) = 4x - 3y + z - 5 = 0 \qquad (٢٤)$$

ومنه

$$x = 2 + 2\lambda \quad ، \quad 2y = 2 - 3\lambda \quad ، \quad 2z = \lambda - 2$$

وبالتعويض في معادلة القيد نجد أن $\lambda = \dfrac{1}{13}$

بالتالي

$$x = 2 + \frac{2}{13} \quad ، \quad y = 1 - \frac{3}{26} \quad ، \quad z = -1 + \frac{1}{26}$$

وبالتالي

$$d^2 = f(2+\frac{2}{13}, 1-\frac{3}{26}, -1+\frac{1}{26}) = \frac{1}{26}$$

إذاً فإن أصغر مسافة من النقطة $P(2,1,-1)$ إلى المستوى $g(x,y,z)$ هي :

$$\sqrt{d^2} = d = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

وللتأكد من أن $d = \frac{1}{\sqrt{26}}$ هي أصغر المسافة ، يكفي أن نأخذ نقطة من المستوي $g(x,y,z)=0$ ، ولتكن $(2,-1,-6)$ فإن

$$d^2 = f(2,-1,-6) = 4 + 25 = 29$$

ومنه فإن

$$d = \sqrt{29} > \frac{1}{\sqrt{26}}$$

الطريقة الثانية : نجد القيمة الصغرى للدالة

$$f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

عندما تكون (x,y,z) مقيدة بالمستوي $g(x,y,z) = 4x - 3y + z - 5 = 0$. عندئذ لدينا $z = 5 + 3y - 4x$.

وبالتالي فإن

$$f(x,y,5+3y-4x) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (6+3y-4x)^2$$

ولنكتب

$$h(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (6+3y-4x)^2$$

$$h_x(x,y) = 2(x-2) - 8(6+3y-4x) = 0 \qquad (٢٤)$$

$$h_y(x,y) = 2(y-1) + 6(6+3y-4x) = 0 \qquad (٢٥)$$

وبحل المعادلتين (٢٤) و (٢٥) نجد : $y = \frac{33}{26}$ و $x = \frac{28}{13}$.

ولكن

$$h_{xx} = 34 \quad ، \quad h_{yy} = 20 \quad ، \quad h_{xy} = -24$$

ومنه فإن

$$h_{xx}h_{yy} - (h_{xy})^2 = (34)(20) - (-24)^2 = 104 > 0$$

إذاً يوجد للدالة h قيمة صغرى عند $\left(\frac{28}{13}, \frac{23}{26}\right)$

ويكون

$$h\left(\frac{28}{13},\frac{23}{26}\right)=\frac{1}{26}$$

أو

$$h\left(\frac{28}{13},\frac{23}{26}\right)=h\left(2+\frac{2}{13},1-\frac{3}{26}\right)$$
$$=f\left(2+\frac{2}{13},1-\frac{3}{26},-1+\frac{1}{26}\right)=\frac{1}{26}=d^2$$

وبالتالي فإن أصغر مسافة من النقطة $P(2,1,-1)$ إلى المستوي $g(x,y,z)=0$ هي $d=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

النظرية التالية والتي ستعطى بدون برهان، هي نظرية لاجرانج ولكن بقيدين. وعلى المهتم الرجوع إلى [٣].

(١-١٤-١١) نظرية (نظرية لاجرانج مع قيدين Lagrange's Theorem with Two Constraints)

لتكن f ، g ، h دوال لثلاثة متغيرات x ، y و z. لنفرض أن لهذه الدوال مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الأولى على نطاق كل منها . لنفرض أن $f(x_0,y_0,z_0)$ هي قيمة قصوى للدالة f عندما تكون (x,y,z) مقيدة بالسطحين :

$$g(x,y,z)=0 \quad ، \quad h(x,y,z)=0 \tag{٢٦}$$

فإذا كانت أن $\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ و $\nabla h(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ وأن المتجه $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ لا يوازي المتجه $\nabla h(x_0,y_0,z_0)$ فانه يوجد عددان حقيقيان μ و λ بحيث يكون :

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\ \nabla g(x_0,y_0,z_0)+\mu\ \nabla h(x_0,y_0,z_0) \tag{٢٧}$$

وتدعى القيمتان μ و λ بمضاريب لاجرانج Lagrange Multipliers .

إذاً للبحث عن القيم القصوى للدالة f في حالة قيدين $g(x,y,z)=0$ و $h(x,y,z)=0$ يكفي إيجاد الحل للمعادلات الخمسة التالية :

$$g(x,y,z)=0 \tag{٢٨}$$

$$h(x,y,z)=0 \tag{٢٩}$$

$$f_x(x,y,z)=\lambda g_x(x,y,z)+\mu h_x(x,y,z) \tag{٣٠}$$

$$f_y(x,y,z)=\lambda g_y(x,y,z)+\mu h_y(x,y,z) \tag{٣١}$$

$$f_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z) + \mu h_z(x,y,z) \qquad (٣٢)$$

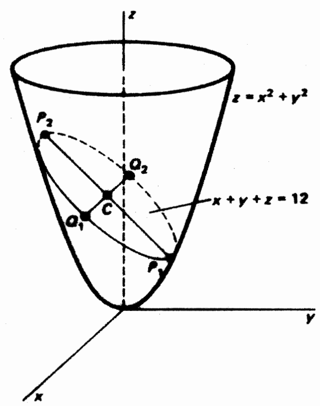
كما توضحه الأمثلة التالية :

مثال (١٨)

المستوي $x+y+z=12$ يتقاطع مع السطح المكافئ $z = x^2 + z^2$ في منحنى C ، وهو عبارة عن قطع ناقص. أوجد نقطة من المنحنى C بحيث يكون ارتفاعها اكبر ما يمكن ، ونقطة من المـنحنى C بحيث يكون ارتفاعها أقل ما يمكن .

الحل

إن المنحنى C موضح بالشكل (١-٥٧) .



الشكل (١-٥٧)

لتكن (x,y,z) نقطة من C. نعلم أن ارتفاع هذه النقطة هو z ، والمسألة أصبحت هي البحـث عن القيمة العظمى والصغرى للدالة $f(x,y,z) = z$ عندما تكون (x,y,z) مقيدة بالقيدين :

$$g(x,y,z) = x + y + z - 12 = 0 \qquad (٣٣)$$

$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0 \qquad (٣٤)$$

العلاقات (٣٠) ، (٣١) و (٣٢) تعطينا المعادلات الآتية

$$\lambda + 2\mu x = 0 \qquad (٣٥)$$

$$\lambda + 2\mu y = 0 \qquad (٣٦)$$

$$\lambda - \mu = 1 \qquad (٣٧)$$

إذا كانت $\mu = 0$ ، ومن المعادلة (٣٥) نحصل على $\lambda = 0$ وهذا يتناقض مع العلاقة (٣٧) .
إذاً $\mu \neq 0$ ويكون لدينا

$$2\mu x = -\lambda = 2\mu y$$

ومنه $x = y$ ، وبالتعويض في العلاقة (٣٤) لدينا $z = 2x^2$ ومن العلاقة (٣٣) نحصل على المعادلة

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

بالتالي

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \text{أو} \quad (x+3)(x-2) = 0$$

إذاً إما $x = 2$ وإما $x = -3$ وحيث إن $x = y$ و $z = 2x^2$ إذاً لدينا النقطتين التاليتين :

$$P_1(2,2,8) \quad \text{و} \quad P_2(-3,-3,18)$$

ومن الواضح أن P_1 هي نقطة من C وأن ارتفاعها أقل ما يمكن وأن النقطة P_2 والواقعة على C يكون ارتفاعها أعلى ما يمكن . بسهولة أيضاً نستطيع إيجاد القيم $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ والموافقة لكل من النقطتين P_1 و P_2 .

مثال (١٩)

ليكن C منحنى واقع في الثمن الأول والناتج من تقاطع السطحين التاليين

$$x + y = 4 \quad ، \quad 2z = 16 - x^2 - y^2$$

كما هو موضح بالشكل (١-٥٨) . أوجد نقطة من المنحنى C بحيث تكون أقرب ما يمكن عن النقطة الأصل .

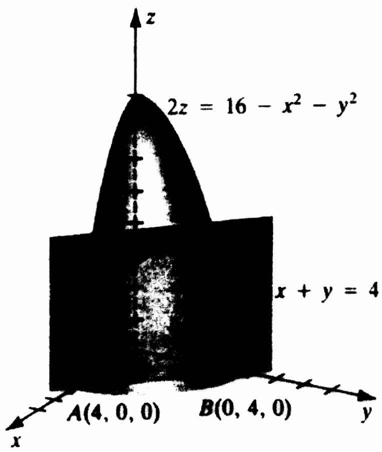
الحل

لتكن $P(x, y, z)$ نقطة من المنحنى C . إن بعد النقطة P عن النقطة الأصل هو

$$d(0, p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

أي أنه لدينا دالة f معرّفة بالمعادلة

$$d^2 = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (٣٨)$$



الشكل (١-٥٨)

وأن (x,y,z) مقيدة بالقيدين :

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0 \quad (٣٩)$$

$$h(x,y,z) = x + y - 4 = 0 \quad (٤٠)$$

العلاقات (٣٠) ، (٣١) و (٣٢) تعطينا المعادلات الآتية

$$2x = 2\lambda x + \mu \quad (٤١)$$

$$2y = 2\lambda y + \mu \quad (٤٢)$$

$$2z = 2\lambda \quad (٤٣)$$

بالإضافة إلى المعادلتين (٣٩) و (٤٠) .

من المعادلتين (٤١) و (٤٢) نحصل على

$$2x - 2y = 2\lambda x - 2\lambda y$$

بالتالي

$$2(x-y)(1-\lambda)=0$$

إما $\lambda=1$ وإما $x=y$.

فإذا كانت $\lambda=1$ ، لدينا من المعادلة (٤٣) ، $z=1$ وبالتعويض في المعادلة (٣٩) نجد المعادلة الآتية:

$$x^2+y^2-14=0 \qquad (٤٤)$$

وبحل المعادلتين (٤٤) و (٤٠) نجد أن

$x=2+\sqrt{3}$ ، $y=2-\sqrt{3}$ أو $x=2-\sqrt{3}$ ، $y=2+\sqrt{3}$ وهكذا يكون لدينا النقطتين :

$$P_1(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3},1) \text{ و } P_2(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3},1)$$

ومنه $d(0,P_1)=d(0,P_2)=\sqrt{15}$. أما إذا كانت $y=x$ ، بالتعويض في المعادلة (٤٠) نجد $2x=4$ ومنه $x=2$ وبالتعويض في المعادلة (٣٩) نجد أن $8+2z-16=0$ ومنه $z=4$. وهكذا يكون لدينا النقطة الآتية $P_3(2,2,4)$ وأن $d(0,P_3)=2\sqrt{6}$، وهكذا يوجد نقطتين P_1 ، P_2 على المنحنى C بحيث أنهما أقرب ما يمكن من نقطة الأصل وان المسافة الصغرى للدالة d هي $\sqrt{15}$.

مثال (٢٠)

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ عندما تكون (x,y,z) مقيدة بالمنحنى C المعطى بتقاطع السطحين $y^2-z^2=1$ ، $x-y=1$

الحل :

العلاقات (٣٠) ، (٣١) و (٣٢) تعطينا المعادلات الآتية

$$2x=\mu \qquad (٤٥)$$

$$2y=2\lambda y-\mu \qquad (٤٦)$$

$$2z=-2\lambda z \qquad (٤٧)$$

ومعادلتي القيدين

$$g(x,y,z)=y^2-z^2-1=0 \qquad (٤٨)$$

$$h(x,y,z)=x-z-1=0 \qquad (٤٩)$$

من المعادلة (٤٧) لدينا $z(1+\lambda)=0$ إذاً ، إما $\lambda=-1$ و إما $z=0$ ، فإذا كانت $\lambda=-1$ ، فمن المعادلة (٤٦) نجد $4y=-\mu$ ، ومن المعادلة (٥٠) نحصل على $2x=-4y$ ، ومنه $x=-2y$ وبالتعويض في المعادلة (٤٩) نجد $-2y-y=1$ إذاً $y=\frac{-1}{3}$ وبالتالي $x=\frac{2}{3}$ وكذلك من المعادلة (٤٨) لدينا $z^2=y^2-1$ أو $z^2=\frac{1}{9}-1=\frac{-8}{9}$ وهذا مستحيل. إذاً من أجل $\lambda=-1$ لا يوجد حل للمعادلات (٤٨) ، (٤٩) ، (٤٥) ، (٤٦) و (٤٧) .

أما من أجل $z=0$ ، نعوّض في المعادلة (٤٨) فنجد $y=\mp1$ ومن المعادلة (٤٩) لدينا $x=y+1$ إذاً لدينا النقطتين $(2,1,0)$ ، $(0,-1,0)$ والواقعتين على المنحنى وأن $f(2,1,0)=5$ ، $f(0,-1,0)=1$. وبسهولة نستطيع برهان أن هذه القيم هي قيم صغرى ، وهذا أمر طبيعي لان المنحنى C مؤلف من فرعين .

(١-١٥) تمارين

أوجد القيم القصوى المحلية للدوال الآتية ، ثم حدّد نوعية هذه القيم .

١) $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$

٢) $f(x,y)=x^3+3xy-y^3$

٣) $f(x,y)=4x^3-2x^2y+y^2$

٤) $f(x,y)=x^2+4y^2-x+2y$

٥) $f(x,y)=5+4x-2x^2+3y-y^2$

٦) $f(x,y)=x^4+y^2+32-9y$

٧) $f(x,y)=\frac{4y+x^2y^2+8x}{xy}$

٨) $f(x,y)=\frac{(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1}$

٩) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ حيث إن $0\le y\le 2\pi$ و $0\le x\le\pi$

١٠) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ حيث إن $0\le y\le\frac{\pi}{4}$ و $0\le x\le\frac{\pi}{4}$

١١) $f(x,y)=\frac{x}{y^2}+xy$

١٢) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2+2x)}$

١٣) $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{8}{y}$

١٤) $f(x,y)=e^x\cos y$

١٥) $f(x,y)=x^3+y^3+3y^2-3x-9y+2$

١٦) $f(x,y)=x^4+y^4$

١٧) $f(x,y)=x^4+y^3+32x-9y$

١٨) $f(x,y)=(x+y)(xy+1)$

١٩) $f(x,y)=xe^x\sin y$

٢٠) $f(x,y)=x^4-y^4$

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدول الآتية ، على المنطقة R المرافقة لها .

٢١) $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$ ، $R=\{(x,y)\ ;\ -2\le x\le 4,\ -1\le y\le 3\}$

٢٢) $f(x,y)=x^3+3xy-y^3$ ، حيث R المثلث المغلق الذي رؤوسه $(1,2)$ ، $(2-,1)$ ، $(1,-2)$ ، $(-1,-2)$ ..

٢٣) $f(x,y)=x^2+4y^2-x+2y$ ، حيث R هي المنطقة المغلقة والمحدودة بالقطع الناقص الذي معادلته $x^2+4y^2=1$.

٢٤) $f(x,y)=4x^3-2x^2y+y^2$ ، حيث R هي المنطقة المغلقة والمحدودة بالدوال الآتية : $y=9$ و $y=x^2$.

٢٥) $f(x,y)=5+4x-2x^2+3y-y^2$ ، حيث R المثلث المغلق والمحدود بالمستقيمات الآتية $y=2$ ، $y=-x$ و $y=x$

٢٦) $f(x,y)=2x^2+x+y^2-2$ ، حيث $R=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2\le 4\}$.

٢٧) $f(x,y)=xy-2x-3y$ ، حيث $R=\{(x,y)\ ;\ 0\le x\le 4\ ,\ 0\le y\le 2x\}$.

٢٨) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ، حيث $R=\{(x,y)\ ;\ 1\le x\le 3\ ,\ 1\le y\le 4\}$.

٢٩) $f(x,y)=|x|+|y|$ ، حيث $R=\{(x,y)\ ;\ |x|\le 1\ ,\ |y|\le 1\}$.

٣٠) $f(x,y)=4x^2-9y^2$ ، حيث $R=\{(x,y): y>0\ ;\ -1\le x\le 1\}$.

ويجب أن نلاحظ أن R ليست محدودة .

٣١) $f(x,y)=(x-4)^2+y^2$ ، حيث $R=\{(x,y)\ ;\ 0\le x\le 2\ ,\ x^3\le y\le 4x\}$.

٣٢) $f(x,y)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{9}y^2$ ، حيث $R=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2\le 1\}$.

٣٣) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$ ،حيث $R=\{x,y)\ ;\ 0\le x\le 9\ ,\ 0\le y\le 5\}$.

٣٤) $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ ،حيث $R\{(x,y): 0\le x\le 9,\ 0\le y\le 9-x\}$.

٣٥) إذا كانت D صفيحة معدنية دائرية مؤلفة من المنطقة الآتية $D=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2\le 1\}$.

إذا تعرضت هذه الصفيحة لمنبع حراري ، وأن قياس درجة حرارة كل نقطة من نقاط الصفيحة تعطى بالدالة الآتية $T(x,y)=x^2+2y^2-x$ أوجد أبرد وأسخن نقطة من الصفيحة .

٣٦) أوجد النقاط الحرجة للدالة $f(x,y)=xy+2x-\ln(x^2y)$ حيث $x>0$ ن $y>0$ ثم حدّد النقاط (x,y) بحيث تكون $f(x,y)$ قيمة صغرى محلية .

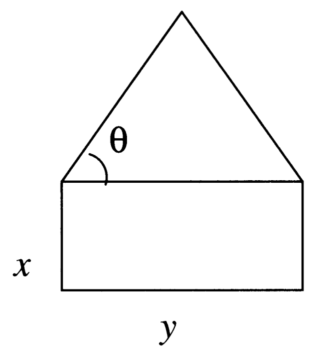
٣٧) أوجد القيمة العظمى والصغرى المطلقة للدالة $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(x^2+y^2)$ على المنطقة $D=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2\le 4\}$.

٣٨) أوجد اقرب مسافة من النقطة $P(2,1,-1)$ إلى المستوي $4x-3y+z=5$.

٣٩) أوجد أقصر مسافة بين المستويين $2x+3y-z=2$ و $2x+3y-z=4$.

٤٠) أوجد النقاط (x,y,z) التي تحقق المعادلة $xy^3z^2=16$ والتي تكون أقرب ما يمكن إلى نقطة الأصل .

٤١) نافذة مؤلفة من مستطيل تعلوها مثلث متطابق الضلعين كما هو بالشكل الآتي (١-٥٩) :



الشكل (١-٥٩)

فإذا كان محيط النافذة 12 قدم . ما هي قيم المتغيرات x ، y ، θ بحيث تكون مساحة النافذة أكبر ما يمكن .

٤٢) أوجد ثلاثة أعداد موجبة بحيث يكون مجموعها 1000 وحاصل ضربهم أكبر ما يمكن .

٤٣) إذا كانت v تمثل حجم لعلبة مستطيلة مفتوحة من الأعلى ، ما هي أبعاد العلبة بحيث تكون مساحة سطح العلبة أقل ما يمكن . مع العلم أن v ثابت (أي أن v ليس عشوائي) .

٤٤) أوجد أكبر حجم لعلبة مستطيلة حروفها توازي المحاور الإحداثية تقع داخل مجسم القطع الناقصي الذي معادلته $9x^2+36y^2+4z^2=36$

٤٥) أوجد القيمة العظمى للدالة $f(x,y,z)=xyz$ حيث ، (x,y,z) مقيدة بالعلاقة :

$$x^3+y^3+z^3=1 \quad ، \quad \text{حيث} \quad x\geq 0 \quad ، \quad y\geq 0 \quad ، \quad z\geq 0$$

٤٦) أوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x,y)=x^2+(y-2)^2$

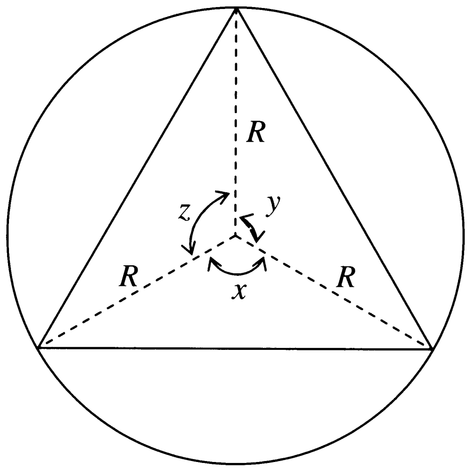
حيث (x,y) مقيدة بالمعادلة $x^2-y^2=1$

٤٧) أوجد القيمة العظمى للدالة $f(x,y,z)=(xyz)^{1/3}$ ، حيث $x\geq 0$ ، $y\geq 0$ ، $z\geq 0$ وأن (x,y,z) مقيدة بالمعادلة $x+y+z=a$ حيث a ثابت ثم استنتج :

$$(xyz)^{1/3}\leq \frac{x+y+z}{3}$$

من أجل كل $x\geq 0$ ، $y\geq 0$ و $z\geq 0$.

٤٨) باستخدام طريقة لاجرانج ، برهن أن محيط المثلث الذي يقع في داخل دائرة $x^2 + y^2 = R^2$ ، ورؤوسه تقع على محيط الدائرة ، يكون أكبر ما يمكن إذا كانت أضلاع المثلث متساوية ، يمكن الاستفادة من الشكل (١-٦٠) :



الشكل (١-٦٠)

أوجد القيم القصوى للدوال الآتية ، حيث أن (x, y) مقيدة بالقيود المرافقة لكل دالة ، ثم حدّد نوعية القيم القصوى .

٤٩) $f(x,y) = x^2 + y$ على القيد $x^2 + y^2 = 9$

٥٠) $f(x,y) = 2x + y$ على القيد $x^2 + 4y^2 = 1$

٥١) $f(x,y) = x^2 + y^2$ على القيد $x^4 + y^4 = 1$

٥٢) $f(x,y) = 2x^2 + xy - y^2 + y$ على القيد $2x + 3y = 1$

٥٣) $f(x,y) = x^2 + y^2$ على القيد $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$

أوجد القيم القصوى للدوال الآتية ، حيث أن (x, y, z) مقيدة بالقيود المرافقة لكل دالة ثم حدّد نوعية القيم القصوى :

٥٤) $f(x,y,z) = x + 3y + 5z$ على القيد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

٥٥) $f(x,y,z) = xyz$ على القيد $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.

٥٦) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ على القيد $x^4 + y^4 + z^4 = 1$.

٥٧) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$ على القيد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

٥٨) $f(x,y,z) = 2xy + 4xz + yz$ على القيد $xyz = 1$.

٥٩) $f(x,y,z) = xyz$ على القيد $xy + xz + 3yz = 4$.

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدوال التالية ، على المناطق المغلقة والمحدودة المرافقة لكل دالة

٦٠) $f(x,y,z) = x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 6z^2$ ،
$R = \{(x,y,z) \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

٦١) $f(x,y) = 2xy$ ، $R = \{(x,y,z) \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

٦٢) أوجد نقطة (x,y,z) تقع على المنحنى C الناتج من تقاطع السطحين
$x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ و $x - 4y - z = 0$
بحيث تكون أقرب ما يمكن عن النقطة الأصل .

٦٣) أوجد نقطة من المستوي $3x + 2y - z = 5$ بحيث تكون أقرب ما يمكن عن النقطة $(1,-2,3)$، وما هو طول هذه المسافة الصغرى .

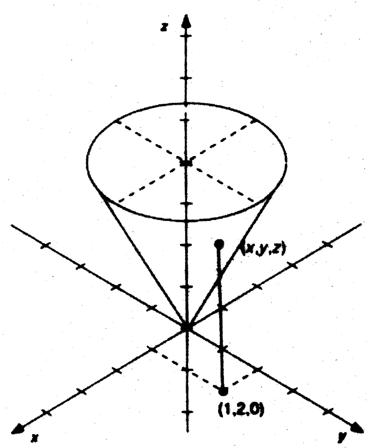
٦٤) أوجد اقصر مسافة بين النقطة $(1,2,0)$ والسطح $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ والشكل (١-٦١) .
يوضح فكرة حل هذه المسألة .

$R = \{(x,y,z) \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

٦٥) أوجد نقطة (x,y,z) تقع على المنحنى C الناتج من تقاطع السطحين
$x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ و $x - 4y - z = 0$
بحيث تكون أقرب ما يمكن عن النقطة الأصل .

٦٦) أوجد نقطة من المستوي $3x + 2y - z = 5$ بحيث تكون أقرب ما يمكن عن النقطة $(1,-2,3)$، وما هو طول هذه المسافة الصغرى .

٦٧) أوجد اقصر مسافة بين النقطة $(1,2,0)$ والسطح $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ والشكل (١-٦١) .
يوضح فكرة حل هذه المسألة.



الشكل (١-٦١)

٦٨) أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ حيث (x,y,z) تقع على القيدين التاليين : $x - y - z = -1$ ، $x + 2y + 3z = 6$

٦٩) أوجد القيمة العظمى للدالة $f(x,y,z)=xyz$ ، حيث (x,y,z) مقيدة بالقيدين التاليين :

$x+y+z=4$ ، $x-y-z=3$.

٧٠) أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y,z)=x+2y$ ، حيث (x,y,z) مقيدة بالقيدين التاليين:

$x+y+z=1$ ، $y^2+z^2=4$.

٧١) أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y,z)=3x-y-3z$ ، حيث (x,y,z) مقيدة بالقيدين التاليين : $x+y-z=0$ ، $x^2+2y^2=1$.

٧٢) أوجد القيم العظمى القصوى للدالة $f(x,y,z)=yz+xy$ حيث (x,y,z) مقيدة بالقيدين التاليين: $xy=1$ ، $y^2+z^2=1$.

المصطلحات:

الدالة في عدة متغيرات؛ منحنى دالة في عدة متغيرات

الأثر في المستوى

المنحنى الاسقاطي

السطوح التربيعية

النهايات والاتصال لدالة في عدة متغيرات

المشتقات الجزئية؛ المشتقات الجزئية الثانية، المشتقات الجزئية المختلطة

التزايدات والتفاضلات

قابلية تفاضل الدالة عند نقطة

قاعدة السلسلة لدالة في عدة متغيرات

القيم القصوى المطلقة والمحلية لدالة في عدة متغيرات

النقطة الحرجة لدالة في عدة متغيرات

النقطة السرجية

مضاريب لاجرانج

النظريات

قاعدة السلسلة

قابلية تفاضل الدالة عند نقطة

اختبار المشتقة الثانية

نظرية لاجرانج

تمـــارين عـــامـــة

في التمارين ١-١٦ أوجد ثم ارسم مجال كل من الدوال التالية

(١) $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+y+1)}{x-1}$ (٢) $f(x,y)=\sqrt{\sin\left(\pi\left(x^2+y^2\right)\right)}$

(٣) $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$ (٤) $f(x,y)=\cos^{-1}(x)+\tan^{-1}(y)$

(٥) $f(x,y)=\sqrt{x^2+4y^2-16}$ (٦) $f(x,y)=\dfrac{6}{\sqrt{36-x^2-y^2}}$

(٧) $f(x,y)=\ln\left(y-x^2\right)$ (٨) $f(x,y)=\sin^{-1}\left(5-x^2y^2\right)$

(٩) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{|y|-|z|}$ (١٠) $f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^2-z\right)$

(١١) $f(x,y)=\ln\left(\left|y-x^2\right|-1\right)$ (١٢) $f(x,y)=e^{xy}+\ln\left(x^2+y\right)$

(١٣) $f(x,y)=\sqrt{ye^x}$ (١٤) $f(x,y,z)=\tan^{-1}\left(x^2+y^2+z^2-4\right)$

(١٥) $f(x,y)=\sinh\left(\sqrt{2x-x^2-y^2}\right)+\ln\left(1-x^2-y^2\right)$

(١٦) بفـــرض أن درجـــة حـــرارة صـــحيفة معدنيـــة عنـــد نقطـــة (x,y) تقـــاس بالدالة $t(x,y)=x^2+2y$ ارسم العوازل الحرارية (isothermals) للدالة t عند $8,6,4,2,0$.

في التمارين ١٧-٢٣ ارسم الدوال التالية:

(١٧) $f(x,y)=1-x^2-y^2$ (١٨) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

(١٩) $f(x,y)=4+x^2+y^2$ (٢٠) $x^2=4y^2+z^2$

(٢١) $z^2=\left(x^2+y^2\right)$ (٢٢) $z=2x^2+y^2$

(٢٣) $y^2-x^2-z^2=8$

في التمارين ٢٤-٢٧ أوجد الأثر (trace) $z=c$ لكل من الدوال التالية

(٢٤) $z=f(x,y)=y-x+4$ ، حيث $c=1,-1$

(٢٥) $z=f(x,y)=xy$ ، حيث $c=1$ ، -1

(٢٦) $z = f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ، حيث $c = \dfrac{1}{2}$

(٢٧) $z = f(x,y) = x^2 + 4y$ ، حيث $c = 2$

في التمرينين التاليين ارسم تقاطع السطحين التاليين

(٢٨) $f(x,y,z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$ و $f(x,y,z) = 1$

(٢٩) $f(x,y,z) = 4z - x^2 - y^2$ و $f(x,y,z) = 2$

في التمارين من (٣٠ –٣٩) باستخدام تعريف النهاية ، أحسب قيمة النهايات التالية

٣٠) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (2x + 3y - 7) = -8$

٣١) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2x + 4y)\sin(xy) = 0$

٣٢) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x^2 + 3y^2) = 1$

٣٣) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} = 0$

٣٤) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$

٣٥) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right)\tan^{-1}(xy) = 0$

٣٦) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,-1)} \left(x^2 + z - 2y\right) = -3$

٣٧) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,-1)} \dfrac{x + 2y - 1}{\sqrt{x^2 + z^2 + 3}} = \dfrac{1}{2}$

٣٨) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x^2 - 2yz + 4z^2 = 0$

٣٩) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2 + yz)\tan^{-1}(xyz) = 0$

في التمارين (٤٠ – ٥٨) احسب قيمة النهايات التالية إن وجدت.

(٤٠) $\lim\limits_{(x,y,)\to(0,0)} \dfrac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$

(٤١) $\lim\limits_{(x,y,)\to(0,0)} \dfrac{x^9 y}{\left(x^6 + y^2\right)^2}$

(٤٢) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$

(٤٣) $\lim\limits_{(x,y,)\to(1,2)} \dfrac{3xy + 5}{y^2 + 4}$

(٤٤) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$

(٤٥) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(٤٦) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{xy - 3y}{x^2 + y^2 - 6y + 9}$

(٤٧) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(x^2 - y^2\right)^2}{x^2 + y^2}$

(٤٨)

$$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y + x y^3 - 3x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$$

(٤٩) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left(2x^2 - y^2\right)$

(٥٠) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\sin^{-1}(x/y)}{\cos^{-1}(x - y)}$

(٥١) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

(٥٢) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(2x^2+3y^2\right)}{x^2+y^2}$ (٥٣) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\sin(xyz)}{xz}$

(٥٤) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$ (٥٥) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^2-xy-2y^2}{xy-2}$

(٥٦) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3\sin(xy)}{\left(x^2+y^4\right)^3}$ (٥٧) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin x+y^3\cos(x)}{x^2+y^2}$

(٥٨) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x+(y-1)^3}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$

(٥٩) ادرس اتصال وقابلية التفاضل الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2y^2\right)}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

، عند النقطة $(0,0)$.

(٦٠) إذا كانت

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\left(x^2-y^2\right)^2}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

، ابحث ما يلي عند النقطة $(0,0)$.

(١)اتصال الدالة (٢) قابلية تفاضل الدالة f.

(٦١) ادرس اتصال الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3\sin(xy)}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

، عند النقطة $(0,0)$.

(٦٢) ادرس اتصال وقابلية التفاضل للدالة

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)\sin\left[(x-1)y\right]}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} & ;\ (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & ;\ (x,y)=(1,0) \end{cases}$$

، عند النقطة $(0,0)$.

(٦٣) ادرس اتصال وقابلية تفاضل الدالة التالية عند النقطة $(0,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{x}+\mathrm{y}^2\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2+y^2}}\right) & ;\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(٦٤) اثبت أن الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6-2y^4}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

، قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

(٦٥) أثبت أن الدالة $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ غير قابلة للتفاضل عند $(0,0)$.

(٦٦) إذا كانت $\frac{x^2}{1+z}+\frac{y^2}{2+z}=1$ تعرف دالة z في (x,y) قابلة للتفاضل، أوجد كل من z_x, z_y ثم أثبت أن $2(xz_x+yz_y)=z_x^2+z_y^2$

(٦٧) إذا كانت $z=xy+g(x^2-y, y-x^2)$ بحيث إن g دالة في متغيرين قابلة للتفاضل أثبت أن $\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2+y$

(٦٨) إذا كانت $w=xy+f(u)$ حيث إن $u=x^2+y^2$ ومشتقات f من الرتبة الثانية موجودة. فأثبت أن $y^2w_{xx}-x^2w_{yy}+xw_x-yw_y=0$

(٦٩) إذا كانت $f(x,y,z)=e^{x/y}+e^{y/z}+e^{z/x}$. برهن أن $xf_x+yf_y+zf_z=0$.

(٧٠) إذا كانت $f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$ برهن أن $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=0$.

(٧١) إذا كانت $f(r,\theta)=r^n\sin(n\theta)$ برهن أن $f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=0$.

(٧٢) أوجد قيمة a بدلالة c,b بحيث إن الدالة $f(t,x,y)=e^{at}\cos(bx)\cos(cy)$ تحقق العلاقة التالية: $f_t=f_{xx}+f_{yy}$.

(٧٣) إذا كانت $f(x,y)=\int_x^y \ln(\cos\sqrt{t})\,dt$ احسب كلاً من f_x, f_y

(٧٤) إذا كانت $f(t,x)=\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\lambda t}}} e^{-u^2}du$ حيث $x>0$ ، $t>0$. برهن أن: $f_t=\lambda f_{xx}$

(٧٥) إذا كانت المعادلة $\ln(\sin(xyz))=-xyz$ تعرف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل ومشتقاتها الجزئية الثانية موجودة، فأثبت أن $xz_{xx}+2z_x=0$.

(٧٦) إذا كانت $f(x,y)=\frac{1}{y}g(x^2-y^2, y^2-x^2)$ حيث إن g دالة في متغيرين قابلة للتفاضل. أثبت أن f تحقق العلاقة التالية: $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{x}{y^2}f(x,y)=0$.

(٧٧) أثبت أن الدالة $z=y^{(y/x)}\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ حيث $y>0$ و $x\neq0$ ، تحقق

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=yz.$$

(٧٨) إذا كانت $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$، $x=st$ و $y=\frac{s}{t}$ فأثبت أن $s\frac{\partial z}{\partial s}+t\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{4t^4}{t^4+1}$.

(٧٩) إذا كانت $f(x,y)=2x+3y-\ln\left(x^2y\right)$ وكانت $u=x+y$ و $v=x-y$ أوجد قيمة $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(1,1)$.

(٨٠) إن دالة الجهد(Potential function) الهامة في الرياضيات البحتة والتطبيقية هي

$$v(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

(١) أوجد مجال هذه الدالة. (٢) مدى هذه العلاقة.

(٣) اثبت أن v تحقق $\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}=0$.

(٨١) إذا كانت $z=\frac{x^n-y^n}{xy}$، حيث إن n عدد صحيح موجبة أثبت أن

$$xz_x+yz_y=(n-2)z.$$

(٨٢) إذا كانت $u=\frac{xz+y^2}{yz}$ أثبت أن $xu_x+yu_y+zu_z=0$.

(٨٣) إذا كانت $z=\frac{1}{v}f(u/v)$، حيث إن f دالة في متغير واحد قابلة للاشتقاق أثبت صحة العلاقة التالية: $u\frac{\partial z}{\partial v}-v\frac{\partial z}{\partial u}=0$.

(٨٤) إذا كانت المعادلة $\ln(zy)+2x^2y=1$ تعرف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل وإن مشتقاها من الرتبة الثانية موجودة عند كل من مجالها. احسب $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

(٨٥) إذا كانت المعادلة $xy+y^2-x^2=5$ تعرف دالة ضمنية y في x قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة I. أثبت أن $y''=\frac{50}{(x+2y)^3}$.

في التمارين ٨٦ ــ ٩٠ أوجد المشتقة لاتجاهين لكل دالة عند النقطة المعطاة والاتجاه المحدد مع كل دالة.

(٨٦) $f(x,y)=xy^2+x^2$ عند النقطة $(-1,2)$ وفق الاتجاه $\theta=\pi/3$.

(٨٧) $f(x,y)=xe^y+ye^x$ عند النقطة $(0,0)$ وفق الاتجاه $\theta=\pi/6$.

(٨٨) $f(x,y)=x\ln y$ عند النقطة $(5,1)$ وفق الاتجاه $\theta=\pi/4$.

(٨٩) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ عند النقطة $(3,4,0)$ وفق الاتجاه $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

(٩٠) $f(x,y,z)=z\ln(x/y)$ عند النقطة $(1,1,2)$ وفق الاتجاه $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$.

(٩١) أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية للدالة

$z=f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}y^3-x^2-3x-4y-3$.

(٩٢) أوجد أقرب نقطة وأبعد نقطة على سطح الكرة $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ للنقطة $(0,0,1)$.

(٩٣) أوجد القيم القصوى المحلية للدالة التالية إن وجدت. $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$.

(٩٤) أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية للدالة

$f(x,y)=x^3+y^3+3y^2-3x-9y+2$.

(٩٥) أوجد أقرب نقطة على المستوي $x+4y+3z=2$ للنقطة $(1,-1,-1)$.

(٩٦) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x,y)=3xy-6x-3yx+7$ على المنطقة المثلثية المغلقة والمحدودة التي رؤوسها $(0,0),(0,5),(3,0)$.

(٩٧) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2$ على سطح الكرة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2=36$.

(٩٨) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x,y,z)=x^2-y^2-z^2$ على سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=1$.

(٩٩) نفرض أن $T=T(x,y,z)=100x^2yz$ تمثل حرارة أي نقطة (x,y,z) الواقعة على سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=1$. أوجد النقاط الواقعة على سطح الكرة حيث تكون الحرارة أقل وأكبر ما يمكن.

(١٠٠) أوجد أبعاد علبة على شكل متوازي مستطيلات مفتوحة من الأعلى، بحيث يكون حجمها أكبر ما يمكن عندما تكون مساحتها ثابتة وتساوي 24 وحدة مربعة.

(١٠١) أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y,z)=xz+yz$ حيث (x,y,z) مقيدة بالقيدين: $yz=2$ و $x^2+z^2=2$.

(١٠٢) باستخدام طريقة لاجرانج لإيجاد القيم الصغرى للدالة $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ حيث (x,y,z) مقيدة بالقيدين $x-y-z=-1$ و $x+2y+3z=6$.

(١٠٣) باستخدام طريقة لانجرانج لإيجاد القيم العظمى للدالة $f(x,y,z)=xyz$ حيث (x,y,z) مقيدة بالقيدين $x-y-z=3$ و $x+y+z=4$

(١٠٤) باستخدام طريقة لانجرانج لإيجاد القيم العظمى للدالة $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ حيث (x,y,z) مقيدة بالقيدين $x+y-z=0$ و $x+y+z=1$.

(١٠٥) أوجد القيم العظمى للدالة $f(x,y,z)=x+2y+3z$ حيث (x,y,z) تقع على المنحنى C المعطى تقاطع السطحين: $x^2+y^2=1$ و $x-y+z=1$.

(١٠٦) إن كلفة مادة في صنع الوجه العلوي لعلبة على شكل متوازي مستطيلات هي 3 دولارات لكل وحدة مربعة وأن كلفة مادة في صنع القاعدة والجوانب الأربعة هي 5 لكل وحدة مربعة. أوجد الحجم الأعظمي لهذه العلبة إذا كانت كلفة المواد لصنع العلبة تساوي 96 دولار.