حساب التفاضل و التكامل لدوال في عدة متغيرات

200 ريض

د.مأمون تركاوي

الباب الأول

الاشتقاق الجزئي PARTIAL DIFFERENTIATION

- مقدمـــة
- الــدوال في عـــدة مـــتغيرات
- النــــهايات والاتـــصال
- الاشــــتقاق الجزئــــي
- قاعدة السلسلة
- القيم العظمى والصغرى لدوال في عدة متغيرات

● الدوال في عدة متغيرات

Functions Of Several Variables

(١-٢-١) تعريف

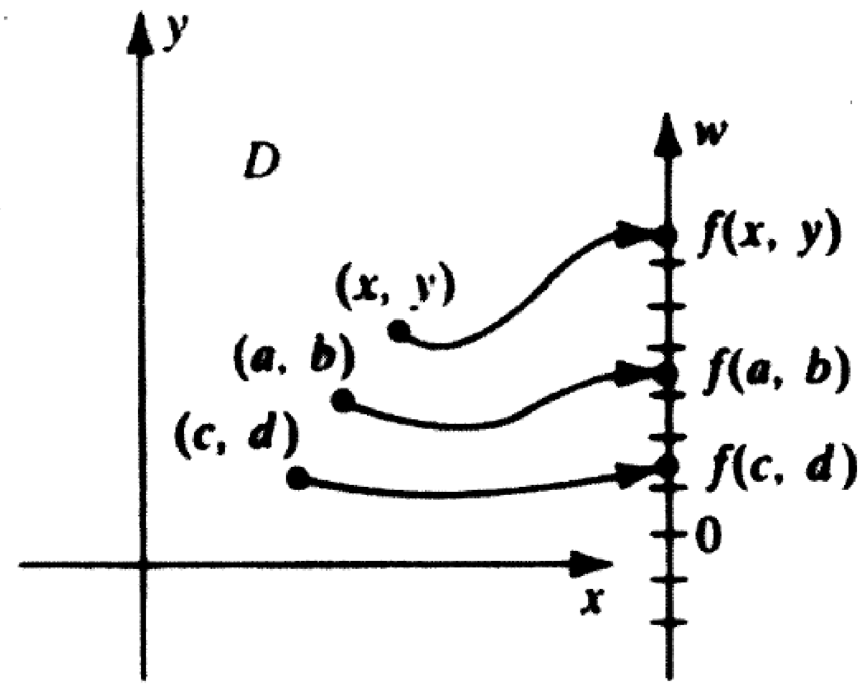
لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$. نعّرف دالة حقيقية f من D إلى $\mathbb{R}$ ونكتب :

$f : D \to \mathbb{R}$ على النحو التالي :

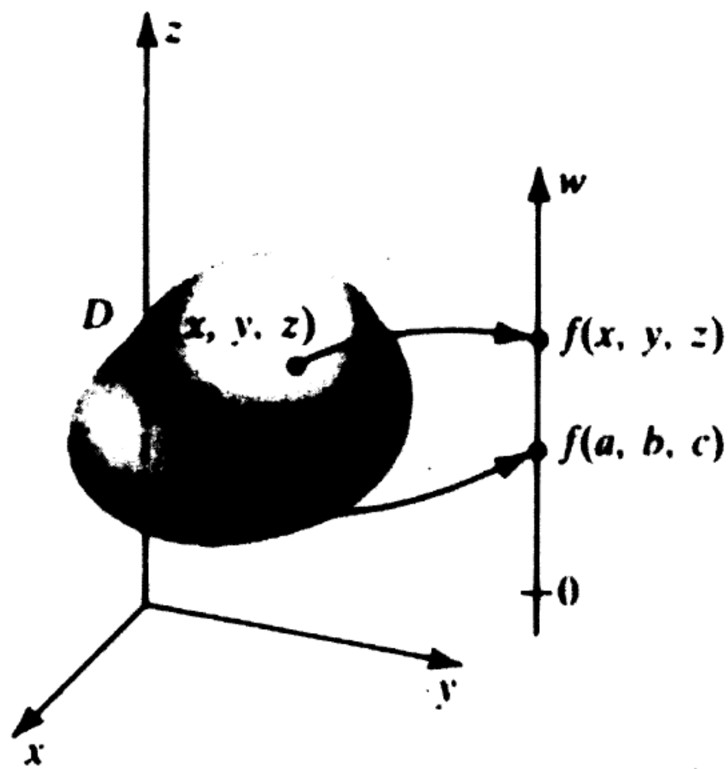
لكل عنصر (x, y) في D يوجد عنصر واحد وواحد فقط z في $\mathbb{R}$ بحيث إن : $z = f(x, y)$.

نسمي D بنطاق أو مجال الدالة f ، أما المجموعة $\{z = f(x, y);(x, y) \in D\}$ فهي تدعى مدى الدالة f .

إن هذا التعريف يمكن توضيحه بالشكل التالي:



إن التعريف (١-٢-١) يمكن تعميمه لدوال في أكثر من متغيرين ، فإذا كانـــت مـــثلاً D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ ، فإننا نعرّف دالة حقيقية f من D إلى $\mathbb{R}$ ، ونكتب : $f:D\to\mathbb{R}$ كما يلي: لكل عنصر $(x,y.z)$ في D يوجد عنصر واحد وواحد فقط w في $\mathbb{R}$ ، بحيث أن $w=f(x,y,z)$ ، كما هو موضح بالشكل التالي :



مثال

إذا كانت $f(x,y)=\dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$ فعين نطاق f .

الحل

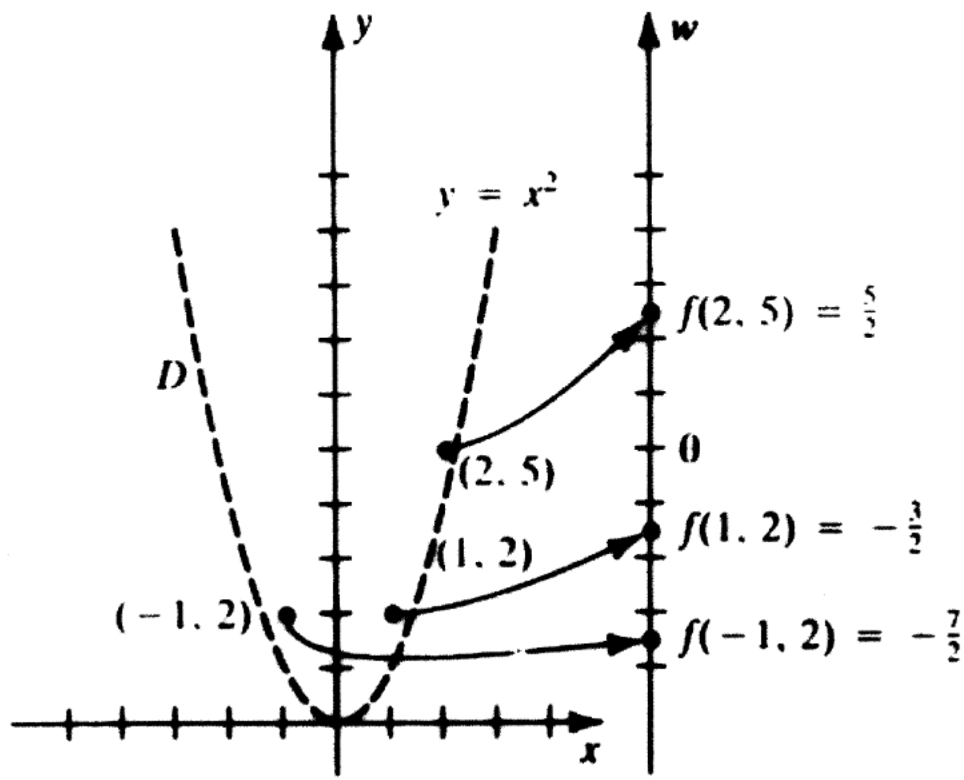
لكي تكون f معرّفة ، فإنه يتعين أن تحقق (x,y) المتباينـــة الآتيـــة :

$$y-x^2>0 \quad \text{أو} \quad y>x^2$$

ومنه فإن نطاق f هو

$$D=\left\{(x,y);\, y>x^2\right\}$$

أي أن D هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ ، وهي عبارة عن جميع النقاط (x, y) الواقعة داخل القطع المكافئ : $y = x^2$ كما هو موضح بالشكل التالي :



مثال

عيّن نطاق الدالة $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

الحل

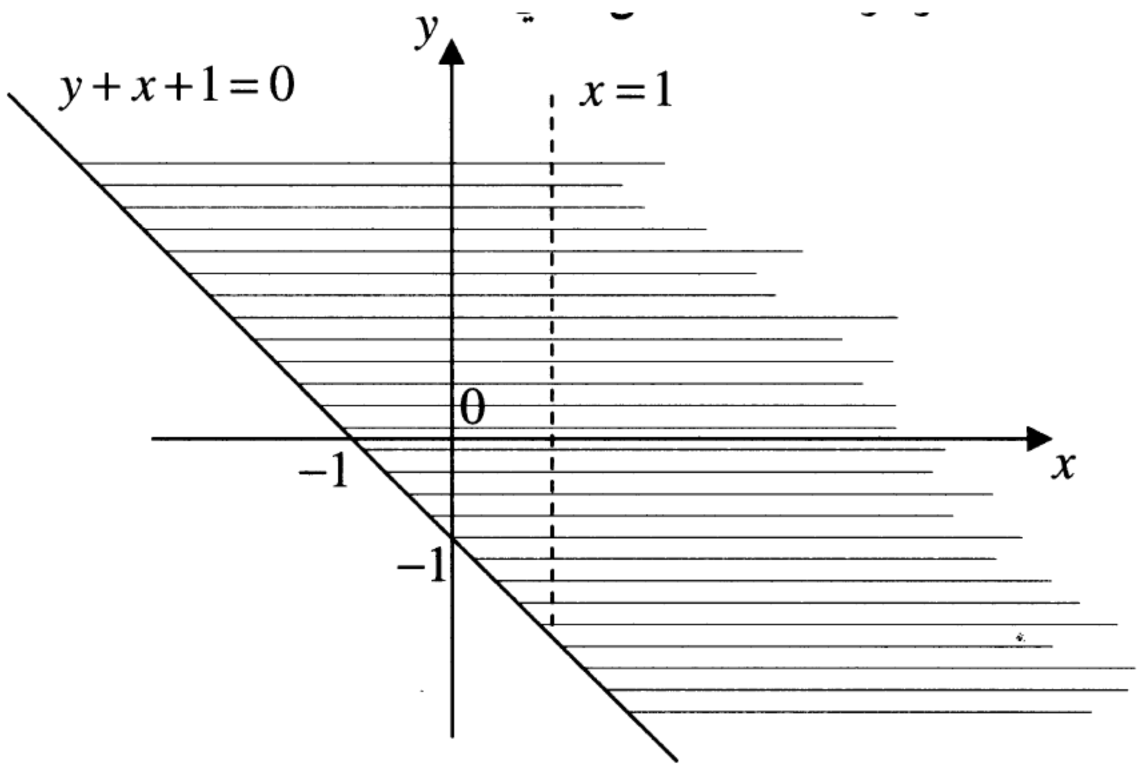
إن نطاق f هو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ والمؤلف من النقاط (x,y) والتي تحقق

$$x\neq 1\ ,\ \ x+y+1\geq 0\ .$$

بعبارة أخرى نطاق f هو جميع النقاط (x,y) الواقعة على أو فوق المستقيم $y=-x-1$ باستثناء النقاط الواقعة على المستقيم $x=1$. ومنه فإن

$$D=\{(x,y):x+y+1\geq 0\ ,\ x\neq 1\}$$

أي أن D هي المنطقة المظللة والموضحة بالشكل التالي :


y
$y+x+1=0$
$x=1$
0
-1
x
-1

مثال

عين نطاق الدالة $w = f(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$

الحل

من الواضح ، وحسب تعريف الدالة اللوغاريتمية أن نطاق الدالة f هو

$$D = \{(x, y, z) : x > 0 , \; y > 0 \; , z > 0\}$$

الخواص الجبرية وتحصيل الدوال في عدة متغيرات :

إذا كانت f و g دالتين في المتغيرين x و y معرّفتين على D فإن

١- $(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$

٢- $(f.g)(x,y)=f(x,y)g(x,y)$

٣- $(cf)(x,y)=cf(x,y);c\in\Re$

٤- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$

بشرط أن تكون : $g(x,y)\neq 0$ لكل (x,y) في D . وبنفس الطريقة تماماً نعرّف هذه الخواص بالنسبة لدوال في أكثر من متغيرين .

إذا كانت f دالة في المتغيرين y,x وكانت g دالة في متغير واحد ، ولنفرض أن D هو نطاق f وأن $f(x,y)$ يقع في نطاق g لكل (x,y) في D ، فإننا نستطيع تعريف تحـــصيل f و g ونرمز له بالرمز $g \circ f$ كما يلي :

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y))$$

وبطريقة مماثلة نستطيع تعريف تحصيل دالة في اكثر من متغيرين ودالة في متغير واحد .

مثال

إذا كانت $F(x,y)=\sqrt{\ln(4-x^2-y^2)}$ فبرهن على أنه توجد دالة f في متغيرين ودالة g في متغير واحد بحيث أن $F=g\circ f$ ثم أوجد نطاق F .

الحل

لنكتب $f(x,y)=\ln(4-x^2-y^2)$ و $g(t)=\sqrt{t}$ ، ومنه فإن

$$(g\circ f)(x,y)=F(x,y)$$

أما نطاق F فهو مؤلف من جميع النقاط (x,y) التي تحقق المتباينتين :

$$\ln(4-x^2-y^2)\geq 0 \qquad ، \qquad 4-x^2-y^2>0$$

وحتى يكون $\ln(-x^2-y^2+4)\geq 0$ يجب أن يتحقق الشرط $4-x^2-y^2\geq 1$ وحينئذ فإن نطاق f هو مجموعة كل النقاط (x,y) الواقعة داخل وعلى محيط دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

(١-٢-٣) تعريف

(أ) نقول إن الدالة f في المتغيرين x, y هي كثيرة حدود في x و y إذا كانت $f(x, y)$ عبارة عن مجموع منته لدوال من الشكل $c_{n,m}x^n y^m$ ، حيث $c_{n,m}$ عدد حقيقي كما أن n و m أعداد صحيحة غير سالبة . أما درجة كثيرة الحدود فهي تعيّن بأكبر مجموع لقوى x و y التي تظهر في أي مقدار $c_{n,m}x^n y^m$ من كثيرة الحدود .

(ب) نقول إن الدالة g في المتغيرين x, y هي دالة كسرية إذا كانت خارج قسمة كثيرتي حدود.

بطريقة مماثلة نستطيع تعريف كثيرة حدود في ثلاثة متغيرات والدالة الكسرية في ثلاثة متغيرات .

مثال

أ) الدالة $f(x,y)=x^3+2x^2y^2-y^3$ هي كثيرة حدود من الدرجة الرابعة ، لأن أعلى درجة في حدود f هي درجة $2x^2y^2$.

ب) الدالة $g(x,y)=6x^3y^2-5xy^3+7x^2y-2x^2+4$ هي كثيرة حدود من الدرجة 5.

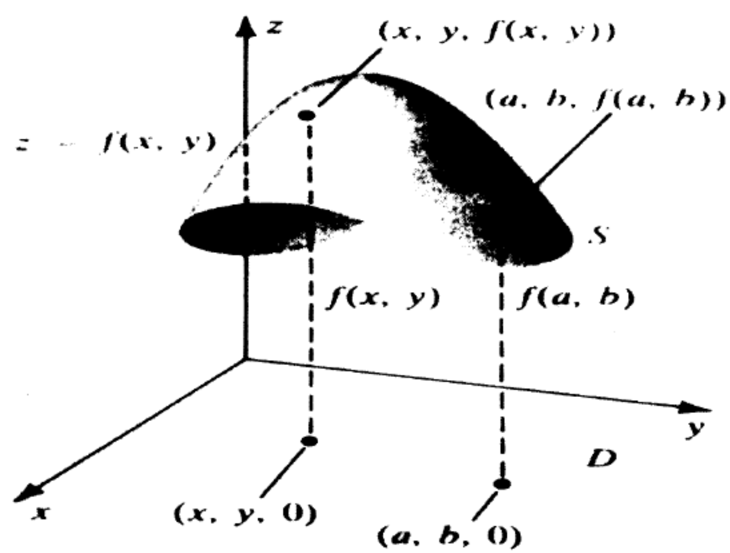
ج) الدالة $h(x,y,z)=x^2y+zxy^2+xz^3+xy+3z$ هي كثيرة حدود من الدرجة 4 .

د) الدالتان $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$ و $h(x,y,z)=\dfrac{xy-x+1}{x^2+y^2+z^2+1}$ هما دالتان كسريتان.

(١-٢-٤) تعريف

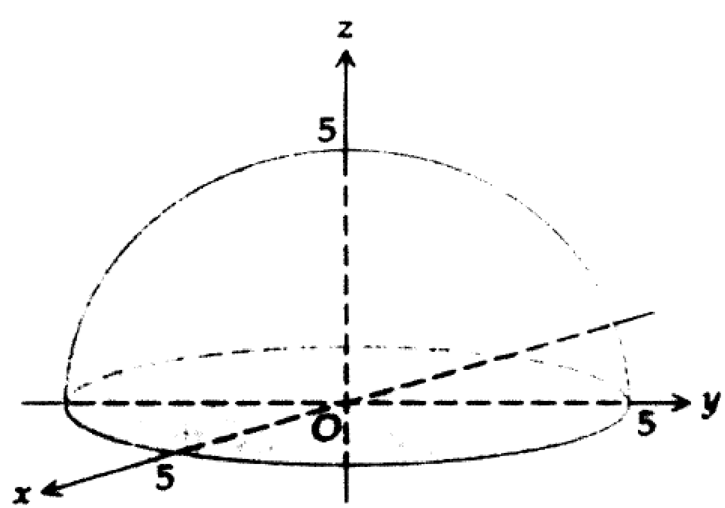
نعرّف منحنى دالة f في متغيرين بأنه مجموعة كل النقاط (x, y, z) في $\mathbb{R}^3$ بحيث أن (x, y) تقع في نطاق f ، وان $z = f(x, y)$. ونسمي منحنى الدالة في متغيرين بالسطح .

الشكل التالي يوضح تعريف منحنى دالة في متغيرين :



مثال

الدالة $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ تمثل النصف العلوي لسطح كرة مركزها نقطة الأصـــل، ونـــصف قطرها 5 ، كما هو موضح بالشكل

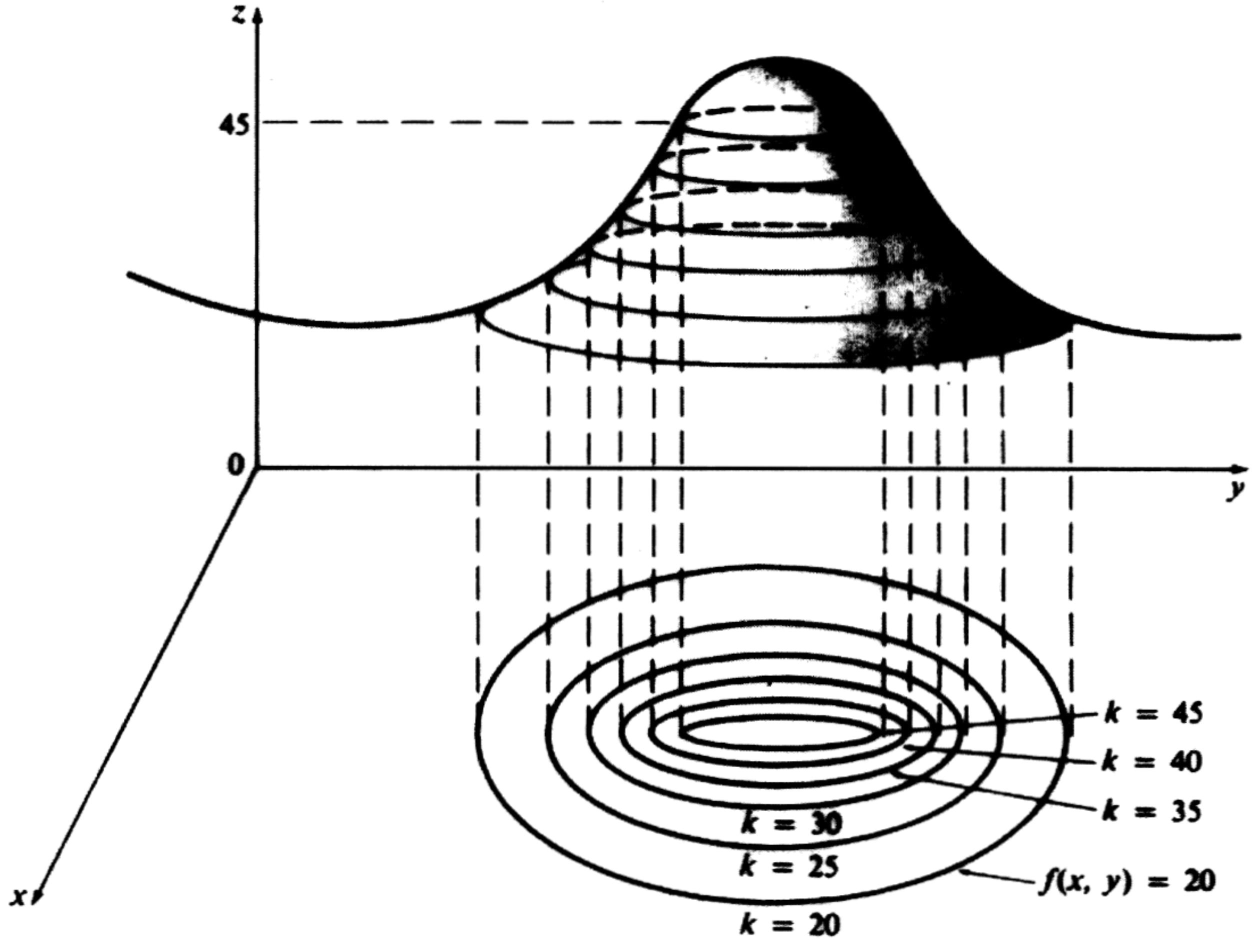


(١-٢-٥) تعريف

(أ) لتكن f دالة في المتغيرين x, y نسمي تقاطع منحنى الدالـــة f مـــع المـــستوي $z=k$ أثر منحنى الدالة f في المستوي $z=k$ حيث k عدد حقيقي . وهكذا فإن أثر (Trace) الدالة f في المستوي $z=k$ ، هو منحنى يقع في المـــستوي $z=k$ ، أي هو منحنى في الفضاء الثلاثـــي ، ومؤلـــف مـــن النقـــاط (x, y, k) ، حيـــث $k=f(x, y)$.

(ب) لتكن f دالة في المتغيرين x, y ، نعرّف المنحنى الإســـقاطي (Level curve) بأنه مجموعة النقاط (x, y) في المستوي xy بحيث إن $f(x, y)=k$ وبتعبير آخـــر المنحنى الإسقاطي هو إسقاط أثر منحنى الدالة f في المستوي $z=k$ على المـــستوي xy .

الشكل التالي يوضح هذا التعريف.



وهكذا فإن المنحنى الإسقاطي $f(x,y)=k$ هو مجموعة النقاط (x,y) التي تأخذ قيماً ثابتة وفق الدالة f وتساوي k .

مثال

ارسم سطح الدالة $f(x,y)=9-x^2-y^2$ على المنطقة $D=\{(x,y);x^2+y^2\le 9\}$

موضحا أثر السطح في المستويات : $z=0,\ z=2,\ z=4,\ z=6,\ z=8$.

الحل

إن D تمثل جميع النقاط الواقعة داخل وعلى محيط الدائرة $x^2+y^2=9$ في المستوي xy لإيجاد أثر السطح في المستوي $z=k$ ، نعتبر المعادلة $k=9-x^2-y^2$. بالتالي $x^2+y^2=9-k$ وبوضع $k=0,2,4,6,8$ نحصل على دوائر أنصاف أقطارها على الترتيب $3,\sqrt{7},\sqrt{5},\sqrt{3},1$.

فعندما $k=0$ نحصل على دائرة تقع في

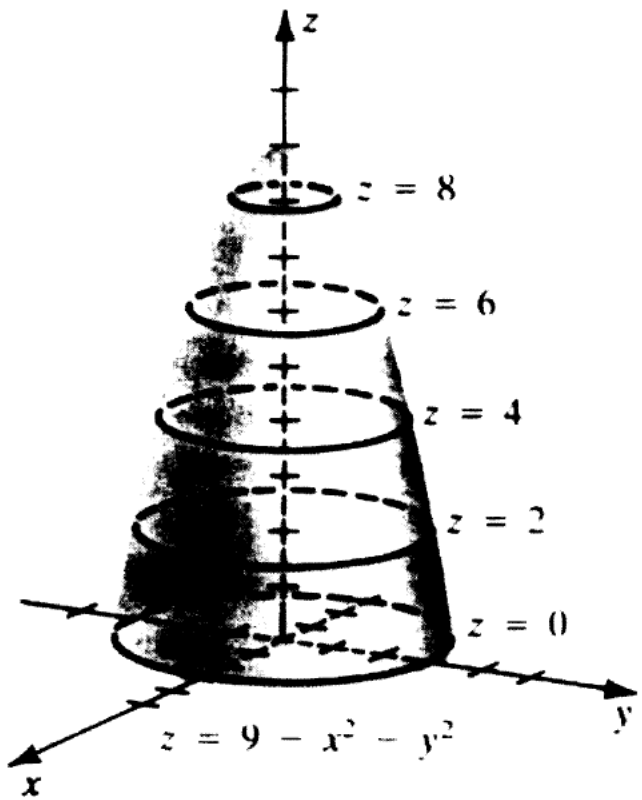
المستوي xy معادلتها : $x^2+y^2=9$ ، مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 3 . أما عندما $k=2$ فإن الأثر : $x^2+y^2=7$ وهي معادلة دائرة تقع في المستوي $z=2$ مركزها $(0,0,2)$

ونصف قطرها $\sqrt{7}$ وهكذا بالنسبة لقيم k الأخرى الشكلان يوضحان

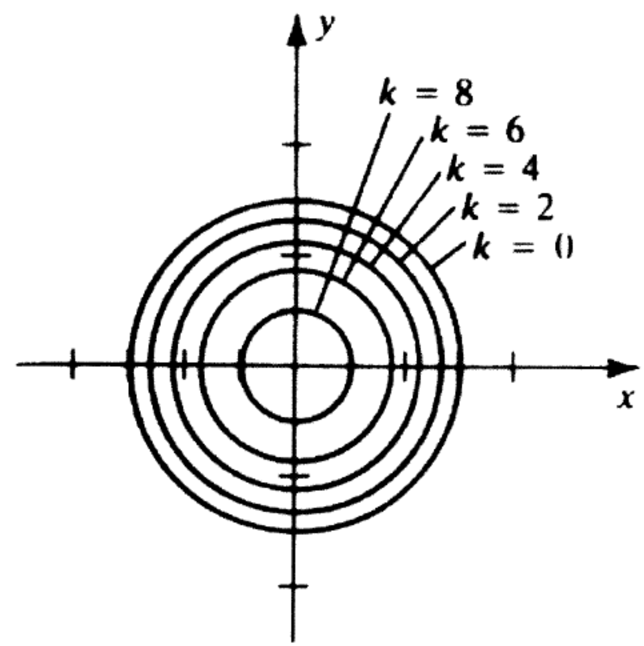
تماماً أثر السطح في المستويات $z=0,2,4,6,8$ ، والمنحنيات الإسقاطية . كما يوضح الشكل

فائدة أثر السطح في المستويات $z=k$ حيث $k=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$ في إعطاء فكرة جيدة

عن شكل السطح في الفضاء الثلاثي.



z
z = 8
z = 6
z = 4
z = 2
z = 0
y
x
z = 9 − x² − y²



y
k = 8
k = 6
k = 4
k = 2
k = 0
x

مثال

ارسم سطح الدالة $f(x,y)=8-x^2-2y$ موضحا أثر السطح في المـــستويات $z=f(x,y)$ في المستويات: $z=10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4,\ -6,\ -8$. ثم استفد من المنحنيات الإسقاطية في رسم هذا السطح .

الحل

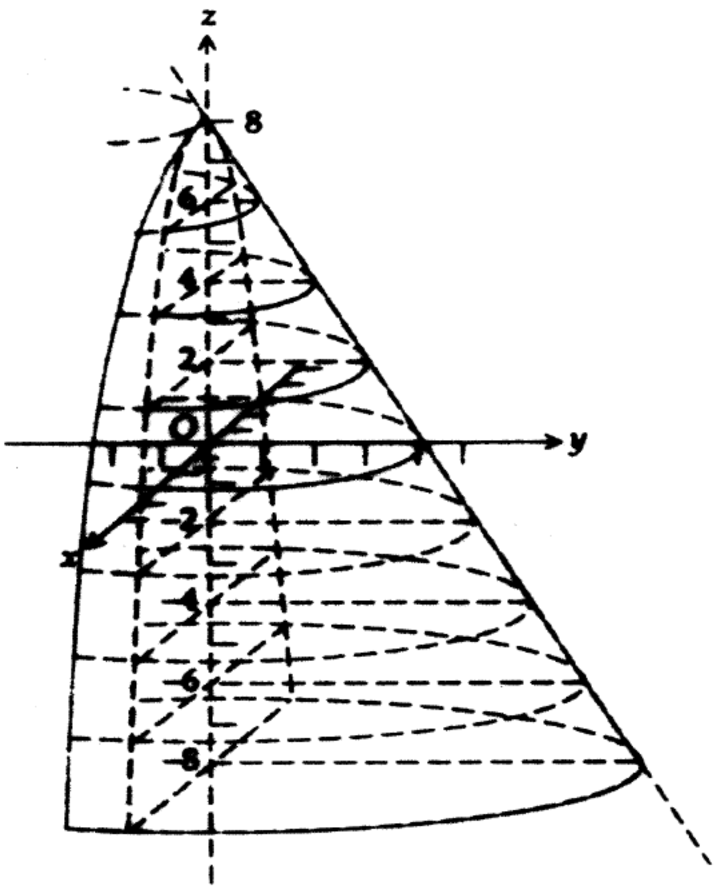
إن أثر السطح في المستوي $z=k$ هو المنحنى المعطى بالعلاقة الآتية : $x^2=-2(y-4+\frac{1}{2}k)$

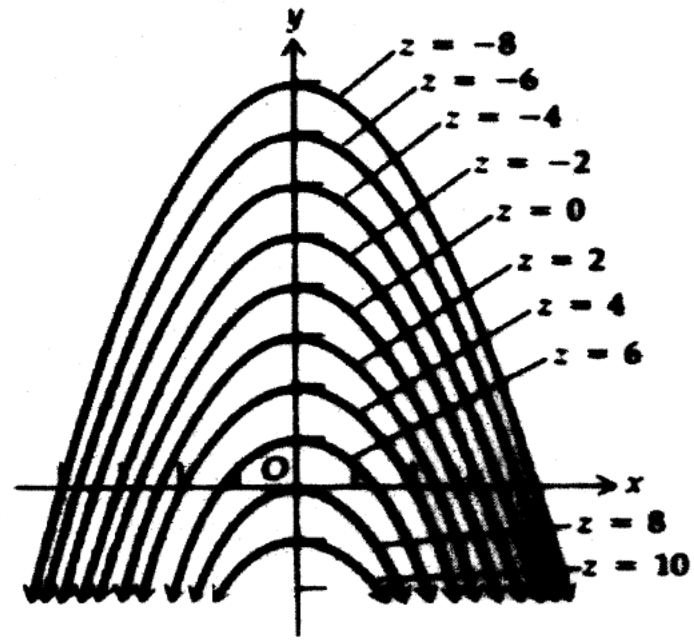
إن هذه العلاقة تمثل مجموعة من القطوع المكافئة ، وهي أيضاً المنحنيـــات الإســـقاطية للدالـــة f ، والشكل يوضح رسم المنحنيات الإسقاطية للدالة f المرافقة للقيم :

$$k=10,\ \ 8,\ \ 6,\ \ 4,\ \ 2,\ \ 0,\ \ -2,\ \ -4,\ \ -6,\ \ -8$$

أما أثر السطح في المستوي xz فهو المنحنى $z=8-x^2$ وبما أن معادلة المستوي xz هي $y=0$ ، لذا فإن أثر السطح في المستوي xz هو عبارة عن قطع مكافئ معادلته $z=8-x^2$.

والشكل يوضح المنحنيات الإسقاطية للدالة f على المستوي xy وهي عبارة عن قطوع مكافئة ، مفتوحة إلى اليسار ، ورؤوسها تقطع على المستقيم $2y+z=8$.


z
8
6
4
2
O
y
2
x
4
6
8


y
z = −8
z = −6
z = −4
z = −2
z = 0
z = 2
z = 4
z = 6
O
x
z = 8
z = 10

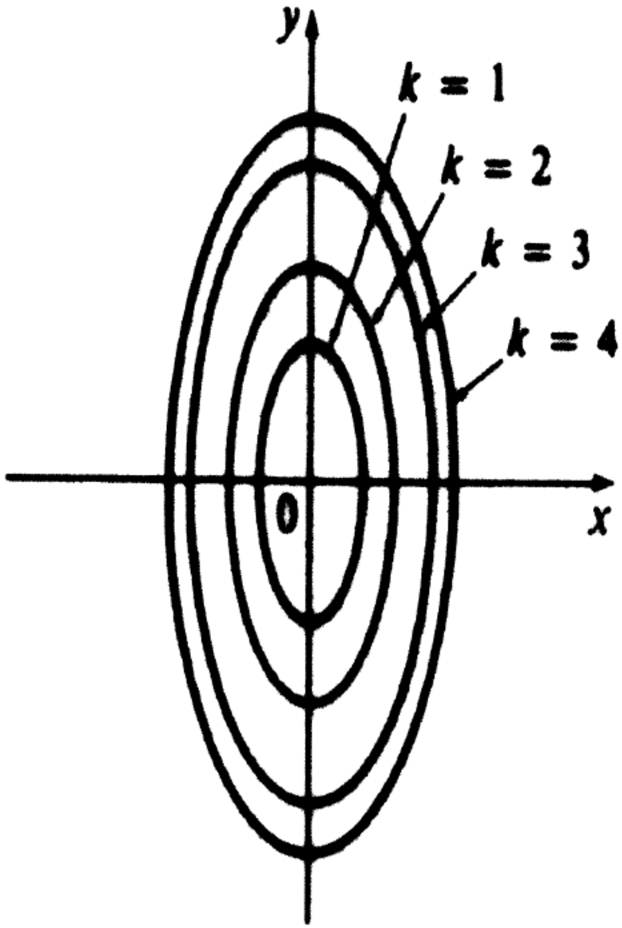
مثال

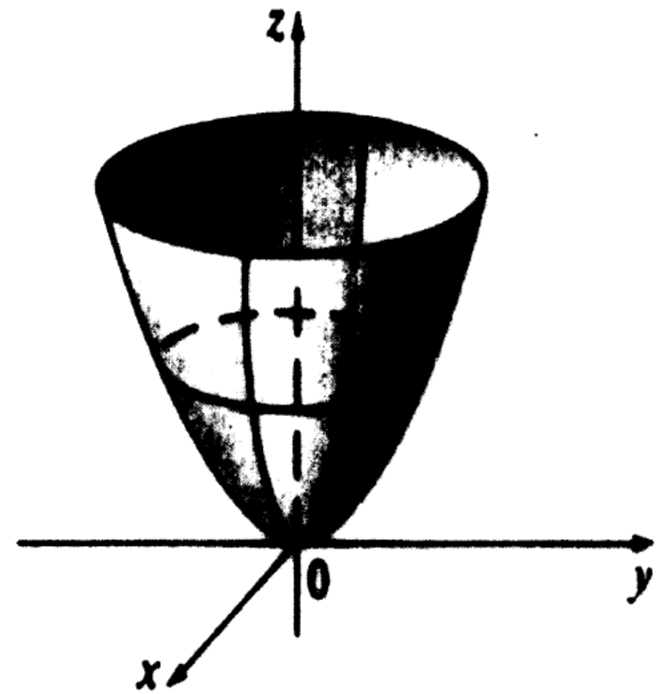
ارسم المنحنى $z = 4x^2 + y^2$ وعين عددا من المنحنيات الإسقاطية لهذا المنحنى .

الحل

بما أن $z = 4x^2 + y^2 \geq 0$ لكل (x, y) في $\mathbb{R}^2$ فإن أثر هذا السطح في المستوي $z = k$ يكون موجوداً عندما يكون $k \geq 0$ فإن كان $k = 0$ فإن الأثر هو النقطة $(0,0)$ ، أما إذا كان $k > 0$ فإن الأثر هو المنحنى المعطى بالعلاقة $\frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$ وهي معادلة قطع ناقص ، أنــصاف أقطــاره $\frac{\sqrt{k}}{2}$ و $\sqrt{k}$ والشكل يوضح المنحنيات الإسقاطية للمنحنى من اجل القيم $k = 1,2,3,4$ ،

واعتماداً على المنحنيات الإسقاطية فإن رسم المنحنى يكون موضحاً في الشكل


y
k = 1
k = 2
k = 3
k = 4
0
x


z
0
y
x

تـــــمـــاريـــن

١) إذا كانت $g(x,y)=\ln(xy+y-1)$ فأوجد

$g(e,1), g(x,1), g(x+h,y), g(x,y+k)$.

٢) إذا كانت $w=f(x,y,z)=\dfrac{4}{x^2+y^2+z^2-9}$

فاحسب $f(2,\frac{-1}{2},\frac{3}{2}), f(\frac{-2}{x},\frac{2}{x},-1), f(x+2,1,x-2)$

في التمارين من ٣ – ٨ أوجد نطاق الدوال الآتية :

٣) $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$

٤) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

٥) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$

٦) $f(x,y,z)=\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z$

٧) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x+2y}$

٨) $f(x,y,z)=\dfrac{xe^y+\sqrt{z^2+1}}{xy\sin z}$

في التمارين من ٩ – ١١ أوجد $h(x,y)$، إذا كانت $h=f\circ g$ ثم أوجد نطاق h .

٩) $f(t)=\sin^{-1}t,\ g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

١٠) $f(t)=\sqrt{t},\ g(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$

١١) $f(t)=e^t,\ g(x,y)=y\ln x$

في التمارين من ١٢– ١٧ أوجد بعض المنحنيات الإسقاطية ثم ارسم سطوح الدوال المعطاة

١٢) $z = f(x, y) = 4x^2 + y^2$

١٣) $z = f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

١٤) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

١٥) $z = f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

١٦) $z = f(x, y) = xy$

١٧) $z = f(x, y) = x + y + 1$