الفصل السابع

مباديء الاحتمالات

Principles of Probability

(7 – 1) مقدمـــة

تستخدم كلمة " احتمال " كثيراً في حياتنا اليومية . فمثلاً يقال "ما هو احتمال أن يفوز نـادٍ رياضي معين بكأس الملك هذا العام؟" و"احتمال أن يسقط المطر اليوم قوي جدا" و"ما هو احتمال أن يفوز حصان معين بالسباق اليوم؟" و"احتمال أن يكون هذا المصباح غير سليماً (محروقاً أو معيباً) 50%" ، و" هناك احتمال قليل أن تكون قطعة إنتاج معينة معيبة" ... الخ . وكلمة احتمال تكون للتعبير عن حدث بذاته غير مؤكد الحدوث . ويستخدم عدد كبير من الأفراد في الظروف نفسها كلمة "احتمال" بتعبيرات مختلفة مثل "احتمال **ضعيف** أن يسقط المطر اليوم" أو "احتمال **قوي** أن يسقط المطر اليوم" أو "احتمال **قوي جداً** أن يسقط المطر اليوم" ، حيث تكون درجة الثقة في سقوط المطر مختلفة من شخص لآخر . وهنا نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس رقمية كمية بدلاً من التعبيرات الكيفية والتي يفهم منها درجة الثقة في وقوع الحدث المُعبر عنه . والعلم الذي يبحث في هذه المقاييس وعلاقة بعضها ببعض يسمى بعلم الاحتمالات وهو أحد فروع علم الرياضيات . كما أن الاحتمالات هي الأساس الذي يبنى عليه علم الإحصاء الاستنتاجي .

وعلم الاحتمالات مثل العلوم الأخرى يبدأ ببعض التعاريف والمسلّمات وسوف نستعرض بعض التعاريف قبل الدخول في مسلمات الاحتمالات كما يلي :

(7 – 2) التجربة العشوائية Random Experiment

هي التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة ولكن لا يمكن لأحد التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج مسبقاً (بصفة مؤكدة) فمثلاً لو كانت التجربة العشوائية هي رمي قطعة نقود مرة واحدة فإن جميع نتائجها الممكنة هي ظهور الصورة أو ظهور الكتابة ولكن لا يمكن لأحد أن يؤكد قبل رمي العملة أن ما يظهر هو الصورة مثلاً. وكذلك التجربة العشوائية والتي تتكون من فحص أحد المصابيح ، فإنه يكون إما سليماً (يضيء) أو معيباً (لا يضيء) ونتائجها الممكنة هي كون المصباح سالماً أو كونه معيباً . والتجربة العشوائية التي تتم برمي حجر نرد واحد فإن

نتيجتها هي ظهور أحد الأوجه الستة التي تحمل الأرقام 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 . ويوجد كثير من التجارب العشوائية في الحياة العملية .

(3 – 7) فضاء أو فراغ العينة Sample Space

يعرف فضاء العينة بأنه المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ونرمز لها بالرمز S . كما أن كل نتيجة ممكنة تسمى نقطة عينة . إن تجربة رمي قطعة النقود العشوائية تنتهي إلى نتيجتين (عشوائيتين) : ظهور صورة (H) أو ظهور كتابة (T) وبذلك يكون فضاء العينة S هو :

$$S = \{ H , T \}$$

وكذلك عند فحص أحد المصابيح فإن نتائج التجربة إما سليم (يضيء) وسوف نرمز له بالرمز (1) أو معيب (محروق) وسوف نرمز له بالرمز (0) فيكون فضاء العينة S هو :

$$S = \{ 0 , 1 \}$$

وكذلك عند رمي حجر النرد مرة واحدة فإن جميع نتائج التجربة العشوائية يكون ظهور أحد الأوجه التي تحمل الأرقام 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ويكون فضاء العينة S هو :

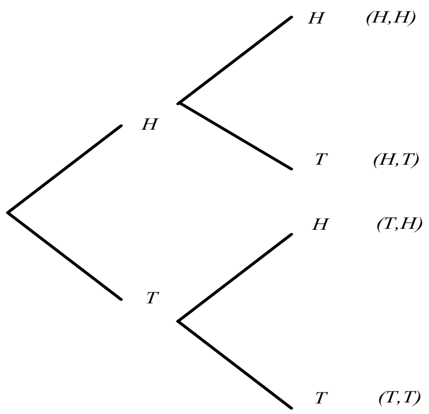
$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

مثال (1 – 7)

أوجد فضاء العينة عند رمي قطعة نقود مرتين .

الحـــل

يمكن الحصول على فضاء العينة باستخدام الشجرة البيانية ، شكل (1 – 7) التالية :



شكل (1 – 7) يمثل الشجرة البيانية لفراغ العينة الناتج من رمي قطعة نقود مرتين

وتستنتج جميع نتائج التجربة العشوائية وهي رمي قطعة النقود مرتين من جميع الحالات الناتجة من الفروع المختلفة للشجرة البيانية أي أن فضاء العينة S كالتالي :

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \}$$

وعدد عناصر فضاء العينة S الذي سوف نرمز له بالرمز $n(S)$ يكون مساوياً 4 عناصر ويمكن أيضاً الحصول على فضاء العينة عند رمي قطعة النقود مرتين من الجداء الديكارتي $\{ H, T \} \times \{ H, T \}$ أي :

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \}$$

مثال (7 – 2)

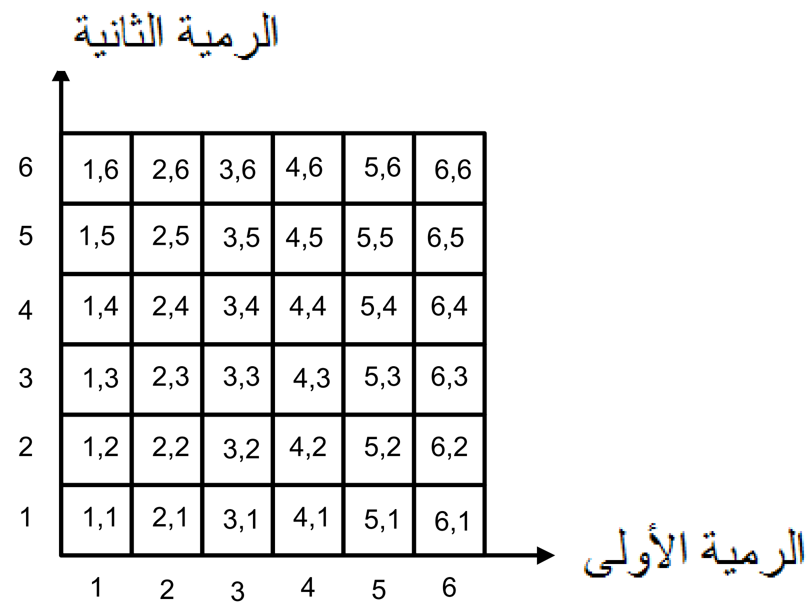
أوجد فضاء العينة S عند رمي حجر نرد مرتين متتاليتين وكذلك أوجد عدد عناصر فضاء العينة : $n\,(S)$.

الحـــل

يمكن الحصول على فضاء العينة S باستخدام الجداء الديكارتي :

$$\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \times \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

أو باستخدام شبكة التربيع كما هو موضح في الشكل (7 - 2) التالي :



شكل (7 – 2) شبكة التربيع لنتائج رمي حجر النرد مرتين

ويكون فضاء العينة هو :

$$S = \{(1,1), (1,2), \ldots , (1,6), (2,1), (2,2), \ldots , (2,6), \ldots, (6,1), (6,2), \ldots, (6, 6)\}$$

ويكون عدد عناصر فضاء العينة S هو :

$$n(S) = 36$$

(7 – 3 – 1) أنواع فضاء العينة

يوجد ثلاثة أنواع من فضاء العينة :

فضاء منتهٍ :

وهو الذي يحتوي على عدد محدود من نقاط فضاء العينة .

مثال ذلك فضاء العينة في الأمثلة السابقة .

فضاء غير منتهٍ قابل للعدّ

مثال ذلك الفضاء التالي :

$$S = \{ 0, 1, 2,3, \ldots.. \}$$

أو

$$S = \{ x : \text{عدد صحيح غير سالب } x \}$$

فضاء غير منتهٍ غير قابل للعدّ :

مثال ذلك :

تسجيل درجة حرارة الجو خلال يوم بإحدى مدن المملكة يكتب :

$$S = \{ x : \text{عدد حقيقي } x \}$$

وسوف تقتصر دراستنا في هذا الفصل على فضاء العينة من النوع الأول أي الفضاء المنتهِ .

(7 – 4) الحادثة أو الحدث Event

تُعرف الحادثة A بأنها مجموعة جزئية من فضاء العينة S . ويقال إن الحادثة قد وقعت إذا ظهر (عند إجراء التجربة العشوائية) واحد أو أكثر من النتائج المحتملة للتجربة التي تكوّن الحادثة A . فمثلا لو كان لدينا فضاء العينة S الناتج من قذف قطعة نقود مرة

واحدة فإن $S = \{ H, T \}$ ، وإذا كان اهتمامنا بالحادثة التي تتمثل في ظهور الصورة فقط فإن $A = \{H\}$ وتكون $A \subset S$.

وإذا كان لدينا فضاء عينة $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ الناتج من رمي حجر نرد مرة واحدة وكانت الحادثة B تمثل ظهور عدد زوجي فإن $B = \{ 2, 4, 6 \}$ وتكون $B \subset S$.

وعلى ذلك فإن الحادثة يمكن أن تحتوي على عنصر واحد من عناصر فضاء العينة S وفي هذه الحالة تسمى بالحادثة الأولية (البسيطة) مثل حالة ظهور الصورة عند قذف قطعة النقود مرة واحدة ، أو تكون أكثر من عنصر مثل ظهور العدد الزوجي في حالة رمي حجر النرد مرة واحدة . وفضاء العينة S يعتبر مجموعة جزئية من نفسه .. أي $S \subset S$. وبذلك تكون S عبارة عن حادثة أيضاً ويطلق عليها الحادثة الأكيدة . وكذلك فإن المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية أيضاً من S أي $\phi \subset S$ وعليه فإن ϕ تمثل أيضاً حادثة ويطلق عليها الحادثة المستحيلة .

مثال (7 – 3)

أحسب الحوادث التالية وعدد عناصر كل منها للتجربة العشوائية " رمي قطعة نقود مرتين" :

$A =$ { الحصول على صورة H في الرمية الأولى }

$B =$ { الحصول على كتابة T في الرمية الأولى }

$C =$ { الحصول على صورة واحدة على الأقل }

الحـــل

فضاء العينة S هو :

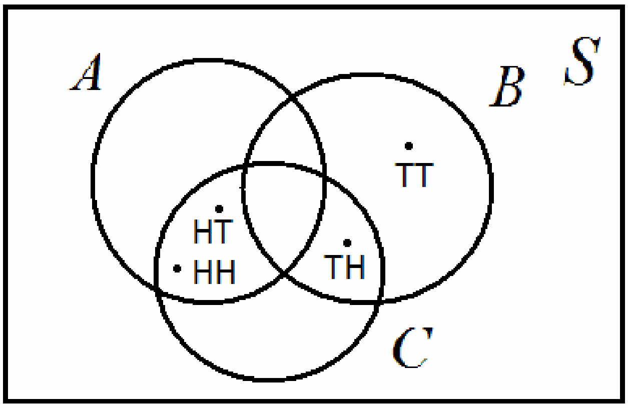
$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$A = \{HH, HT\} \quad , n(A) = 2$

$B = \{TH, TT\} \quad , n(B) = 2$

$C = \{HH, HT, TH\} \quad , n(C) = 3$

ونوضح الحل بشكل فن ، شكل (7 – 3) التالي :



شكل (7 – 3) يمثل شكل فن للحوادث A, B, C وفراغ العينة S

مثال (7 – 4)

أحسب الحوادث التالية وعدد عناصرها بالنسبة لفضاء العينة S الناتجة من رمي حجر النرد مرتين متتاليتين ، الرمية الأولى (x) والرمية الثاني (y) .

$$A = \{ (x, y) \; : \quad x + y < 4 \}$$

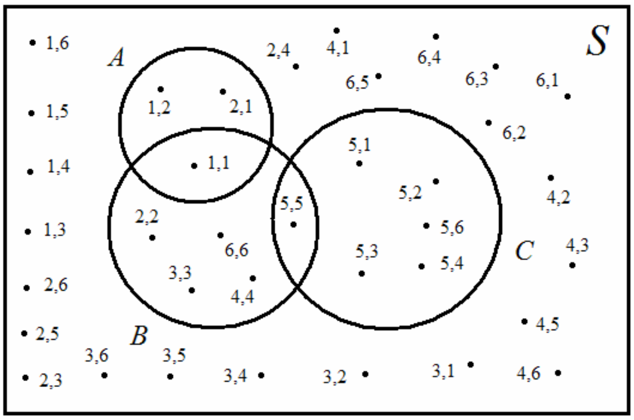
$$B = \{ (x, y) \; : \quad x = y \}$$

$$C = \{ (x, y) \; : \quad x = 5 \}$$

$$D = \{ (x, y) \; : \quad x + y = 1 \}$$

الحـــل

نكتب فضاء العينة S الناتج من رمي حجر النرد مرتين متتاليتين باستخدام رسوم فن كما في شكل (7 – 4) التالي :



شكل (7 – 4) يمثل شكل فن لرمي حجر النرد مرتين والحوادث A, B, C

ويكون فضاء العينة هو :

$$S = \{ (1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6) \}$$

وتكون الحوادث المطلوبة هي :

$A = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1) \}$, $n(A) = 3$

$B = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \}$, $n(B) = 6$

$C = \{ (5, 1), (5, 2), (5,3), (5, 4), (5, 5), (5,6) \}$, $n(C) = 6$

$D = \{ \quad \} = \phi$, $n(D) = 0$

ملاحظة

خلال دراسة الاحتمالات للحوادث نحتاج إلى الحوادث التالية :

(7 – 4 – 1) اتحاد الحادثتين B و A أي $(A \cup B)$

تتكون الحادثة $A \cup B$ من عناصر فضاء العينة S والموجودة إما في A أو B أو كلتيهما . ووقوع الحادثة ($A \cup B$) يعني وقوع إحداهما على الأقل (حدوث إحداهما أو كلتيهما) .

(7 – 4 – 2) تقاطع الحادثتين B أو A أي $A \cap B$ أو AB

تتكون الحادثة $A \cap B$ من عناصر فضاء العينة S الموجودة في كل من الحادثة A والحادثة B معاً ، ووقوع الحادثة ($A \cap B$) يعني وقوع A ووقوع B معاً . والحادثة A والحادثة B تسميان حادثتين متنافيتين (منفصلتين) إذا كان $A \cap B = \phi$.

(7 – 4 – 3) الحادثة المكملة A^c أو $\overline{A}$

الحادثة المكملة A^c تتكون من عناصر فضاء العينة S غير الموجودة في الحادثة A . من التعريف نستنتج أن ووقوع الحادثة A^c يقتضي عدم وقوع الحادثة A .

مثال (7 – 5)

رميت قطعة نقود متزنة ثلاث مرات :

1 - أكتب فضاء العينة S وعدد عناصرها .

2 - أكتب الحوادث التالية وعدد عناصر كل منها :

A : الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى .

B : الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل .

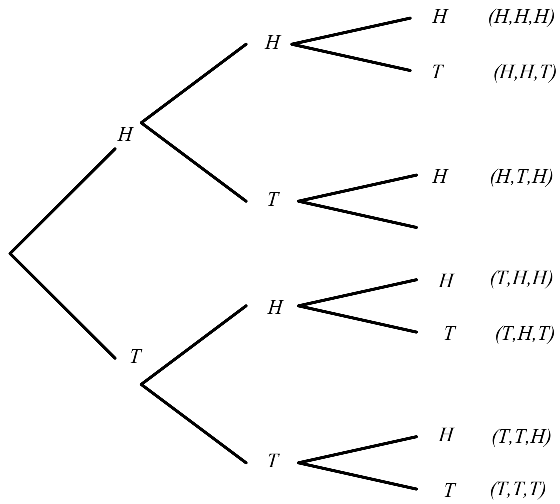
C : الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثالثة .

iii) أوجد الحوادث التالية وعناصر كل منها :

$$A\cap B \ , A\cup C \ , A^c \cup B^c \ , (A\cap B)^c \ , A\cap B^c$$

الحـــل

يمكن الحصول على فضاء العينة باستخدام الشجرة البيانية ، شكل (7 – 5) التالي :



شكل (7 – 5) يمثل الشجرة البيانية لنتائج رمي قطعة عملة ثلاث مرات

(I $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$; $n(S) = 8$

(ii $A = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$; $n(A) = 4$

(iii $B = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$; $n(B) = 7$

$C = \{THH, TTH\}$; $n(C) = 2$

(iii $A\cap B = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$; $n(A\cap B) = 4$

$A\cup C = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, TTH\}$; $n(A\cup C) = 6$

$$A^c = \{THH, THT, TTH, TTT\} \ ; \ n(A^c) = 4$$

$$B^c = \{TTT\} \ ; \ n(B^c) = 1$$

$$A^c\cup B^c = \{THH, THT, TTH, TTT\} \ ; \ n(A^c\cup B^c) = 4$$

$$(A\cap B)^c = S - A\cap B = \{THH, THT, TTH, TTT\} \ ; \ n(A\cap B)^c = 4$$

$$A\cap B^c = \ \phi \ ; \ n(A\cap B^c) = 0$$

وقبل الدخول في تعريف الاحتمال نستعرض بعض الحالات التالية .

(7 – 4 – 4) الحالات المواتية Favourable Cases

هي الحالات التي تؤدي إلى تحقق حادثة معينة .

ففي حالة رمي قطعة النقود فإن ظهور صورة يعتبر مواتيا أو مفضلا وذلك إذا كنا مهتمين بالحادثة " ظهور صورة " . وفي حالة رمي حجر نرد فإن ظهور وجه يحمل الرقم 2 أو 4 أو 6 تعتبر حالات مواتية أو مفضلة وذلك إذا كان اهتمامنا هو الحادثة " ظهور رقم زوجي عند إلقاء حجر النرد" .

(7 – 4 – 5) الحالات المتماثلة أو المتساوية الفرصة Equality Likely Cases

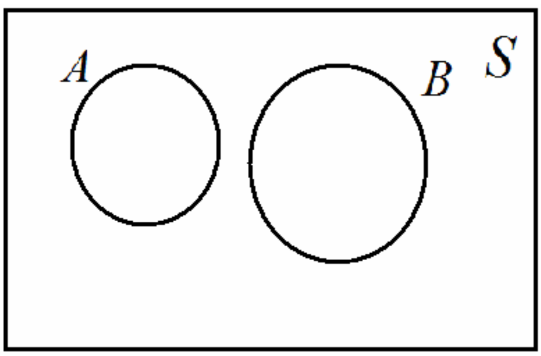
إذا كان لدينا تجربة عشوائية وكانت جميع نتائج التجربة متساوية الفرصة في الظهور ، وتكون المصادفة وحدها هي التي تحدد ذلك فإنه يقال لنتائج التجربة متكافئة الفرص ومتماثلة .

مثال ذلك عند قذف قطعة من نقود متزنة فإن فرصة ظهور الصورة H مساوية لفرصة ظهور الكتابة T ، ويعتبر ظهور الصورة أو الكتابة حالتين متماثلتين . وعند رمي حجر نرد متجانس ومنتظم ، فإن ظهور أي وجه من الأوجه الستة يعتبر حالة متماثلة . وعند سحب كرة من صندوق به مجموعة من الكرات متساوية الحجم والكثافة والملمس هي أيضاً حالة متماثلة .

(7 – 4 – 6) الحالات المتنافية Mutually Exclusive Events

إذا استحال وقوع الحادثتين A و B معاً فإنه يقال إن الحادثتين A و B متنافيتان أو مانعتان بعضهما بعضاً ويكون $A \cap B = \phi$ كما هو موضح بشكل (7 – 6) :

فمثلاً عند قذف قطعة نقود فإن وقوع الحادثة A وهي تمثل ظهور الصورة (H) أي $A = \{H\}$ ينفي وقوع الحادثة B والتي تمثل ظهور الكتابة (T) أي أن $B = \{T\}$. وكذلك عند رمي حجر النرد فإن ظهور الوجه الذي يحمل رقم 1 ينفي ظهور أي وجه آخر من الستة الأوجه الأخرى .



شكل (7 – 6) يمثل شكل فن للحادثتين المتنافيتين A, B

(7 – 4 – 7) الحوادث الشاملة

إذا كان لدينا مجموعة من الحوادث $A_1, A_2, \ldots , A_n$ عند إجراء تجربة عشوائية ما . فإنه يقال لهذه الحوادث السابقة حوادث شاملة إذا كان لابد من حدوث إحداهما عند إجراء هذه التجربة .

مثال ذلك عند إلقاء حجر نرد فإن الحوادث البسيطة $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ تعتبر حوادث شاملة .

(7 – 5) الاحتمال Probability

هناك عدة تعاريف للاحتمال نذكر منها:

(7 – 5 – 1) التعريف الكلاسيكي للاحتمال Classical Definition

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متماثلة أي أنها متساوية الفرصة في الظهور وكان فضاء العينة لها S يحتوي على عدد منتهٍ من العناصر $n(S)$ وكان لدينا حادثة A تحتوي على $n(A)$ من العناصر المتماثلة فإن الاحتمال الكلاسيكي للحادثة A ويرمز له $P(A)$ (ويقرأ احتمال A) ويحسب كالتالي :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \qquad (1-7)$$

مثال (7 – 6)

إذا قذفت قطعة نقود متزنة مرتين أوجد احتمال الحصول على الصورة مرتين .

الحـــل

فضاء العينة S هو :

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \ ; n(S) = 4$$

الحادثة A تمثل ظهور الصورة مرتين هي :

$$A = \{HH\} \quad , n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

(7 – 5 – 2) الاحتمال النسبي

عيب التعريف الكلاسيكي أنه مبني على تساوي الفرص في الظهور لكل نتيجة من جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ، وهناك تعريف آخر لاحتمال حدوث حادثة ما هو ما يسمى بالاحتمال التجريبي (النسبي) وهو مبني على فكرة التكرار النسبي فإذا ما كررنا تجربة عشوائية n من المرات وكان عددت مرات ظهور الحادثة A هو $r(A)$ فإن الاحتمال $P(A)$ يعطى بالعلاقة :

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{r(A)}{n} \qquad (2-7)$$

فمثلاً عند رمي قطعة عملة متزنة عدد n من المرات وكانت عدد مرات حدوث الحادثة A (الحادثة A تمثل الصورة H) هو $r(A)$ فإن الاحتمال $P(A)$ هو (أنظر أمثلة المحاكاة في الملحق) :

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{r(A)}{n} = \frac{1}{2}$$

وعلى الرغم من أن هذا التعريف مفيد إلا أننا لا نستطيع أن نؤكد أننا سوف نحصل على النسبة نفسها إذا أجريت التجربة n من المرات في وقت آخر . وكذلك له صعوباته من وجهة النظر الرياضية ، فقد تكون هذه النهاية غير موجودة بالفعل . لذلك فقد ظهر التعريف الرياضي للاحتمال الذي يعتمد على عدة فرضيات تتناسب مع فكرتنا الإدراكية لمعنى الاحتمال وهذه الفرضيات هي ما تسمى بمسلمات الاحتمال وهي التي سوف نتعرض لها فيما بعد .

(7 – 6) حقل سجما فصل الحوادث

حقل سجما هو عبارة عن مجموعة عناصرها تتكون من بعض المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من فراغ العينة S . ويرمز لحقل سجما بالرمز ع (لأننا سوف نقتصر دراستنا على فضاء العينة المنته فإن هذا التعريف كافٍ لأغراضنا) .

مثال (7 – 7)

أ) أوجد مجموعة القوى P_A المرتبطة برمي حجر نرد مرة واحدة .

ب) أذكر مثالاً لأحد حقول سجما المرتبط برمي حجر نرد مرة واحدة .

الحـــــل

أ) $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

ومن فراغ العينة هذا الذي يحتوي على جميع الحوادث الأولية يمكن تكوين المجموعات الجزئية التالية التي تعتبر عناصر مجموعة القوى P_A . ونلاحظ أن هذه المجموعات الجزئية عبارة عن حوادث يطلق عليها اسم الحوادث العشوائية وتتكون من :

$\binom{6}{0} = 1$ وهي الحادثة المستحيلة

$\binom{6}{1} = 6$ وهي الحوادث الأولية (ذات العنصر الواحد)

$\binom{6}{2} = 15$ وهي الحوادث التي تحتوي على عنصرين

$\binom{6}{3} = 20$ وهي الحوادث التي تحتوي على ثلاثة عناصر

$\binom{6}{4} = 15$ وهي الحوادث التي تحتوي على أربعة عناصر

$\binom{6}{5} = 6$ وهي الحوادث التي تحتوي على خمسة عناصر

$\binom{6}{6} = 1$ وهي الحوادث التي تحتوي على ستة عناصر

نلاحظ أن عدد عناصر مجموعة القوى هو 64 مجموعة جزئية (2^6) وبوجه عام إذا كان فضاء العينة S يحتوي n من الحوادث الأولية فإن مجموعة القوى P_n يحتوي على (2^n) من الحوادث العشوائية .

ب) $\xi = \{ \Phi, S, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\} \}$

ملاحظة

إذا كان فضاء العينة S غير منتهٍ وقابل للعدّ فإن حقل سجما ع يجب أن يحقق شرط الانغلاق لكل من المتممة والاتحاد لجميع الحوادث العشوائية التي هي عناصر في ع ، ويحتوي أيضاً على ϕ و S .

(7 – 7) مسلّمات (بديهيات) الاحتمالات Probability Axioms

إذا كان لدينا تجربة عشوائية لها فضاء عينة S و كان ع حقل سجما ، وأن P دالة حقيقية معرفة على ع وكان لدينا الحادثة A فإن P تسمى دالة احتمال ويسمى العدد $P(A)$ باحتمال الحادثة A إذا تحققت المسلمات التالية :

I - لكل حادثة A فإن $P(A) \geq 0$

II - احتمال فراغ العينة S يكون مساوياً 1. أي $P(S) = 1$

III - لأي متابعة من الحوادث $A_1, A_2, \ldots$ المتنافية مثنى مثنى

أي أن :

$$(A_i \cap A_i = \phi ; i, j = 1, 2, \ldots , i \neq j)$$

فإن $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \cdots$

أي أن $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$

وهذه المسلّمة تعني إذا كانت الحوادث متنافية فاحتمال اتحادها يساوي مجموع احتمالاتها .

(7 – 7 – 1) بعض النتائج الأساسية لمسلّمات الاحتمال

نتيجة (7 – 1)

$$P(\phi) = 0$$

البرهان

نأخذ المتوالية $A_1, A_2, \ldots$

حيث $A_1 = S$ و $A_i = \phi$ لكل $i > 1$

وعليه فإن : $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

وبما أن هذه الحوادث متنافية مثنى مثنى فإنه حسب المسلمة III يكون :

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$P(S) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\phi)$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} P(\phi) = P(S) - P(S) = 0$$

أي أن $P(\phi) = 0$

نتيجة (7 – 2)

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث متنافية مثنى مثنى بحيث $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ فإن :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

البرهان

نأخذ المتوالية $A_1, A_2, \ldots$

بحيث $A_i = \phi$ لكل $i > n$ نلاحظ أن :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

وباستخدام المسلّمة III :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\phi)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A)_i$$ وهو المطلوب

ملاحظة :

عندما $n = 2$ في النتيجة (7 – 2) يكون :

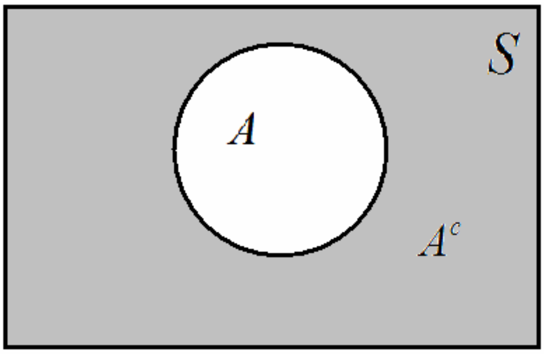
$$P\left(\sum_{i=1}^{2} A_i\right) = P\left(A_1 \cup A_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right)$$

نتيجة (7 – 3)

$$P\left(A^c\right) = 1 - P\left(A\right)$$

البرهان :

نوضح الحادثتين A^c, A بشكل فن ، شكل (7 – 7) التالي :



شكل (7 – 7) يمثل فن الحادثتين A , A^c

الحادثتان A^c, A تحققان التالي :

$$A \cap A^c = \Phi \ ; \ A \cup A^c = S$$

ومن المسلّمة III فإن :

$$P(A \cup A^c) = P(S)$$

$$P(A) + P(A^c) = P(S)$$

ومن المسلمة II

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

أي أن :

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

وهو المطلوب .

مثال (7 – 8)

إذا كان احتمال نجتح محمد $\frac{5}{8}$ فما هو احتمال رسوبه .

الحـــل

$A = \{$ نجاح محمد $\}$, $P(A) = \frac{5}{8}$

$A^c = \{$ رسوب محمد $\}$, $P(A^c) = ?$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

نتيجة (7 – 4)

لأي حادثتين B و A نجد أن :

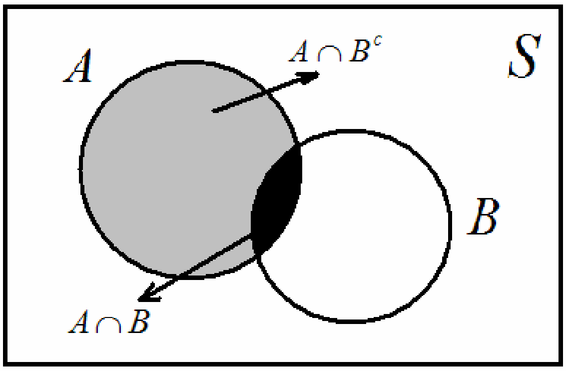
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(AB)$$

أو

$$P(A) = P(AB) + P(AB^c)$$

البرهان

نوضح الحوادث A, B, S بشكل فن ، شكل (7 – 8) التالي :



شكل (7 – 8) يمثل شكل فن للحوادث $A \cap B, \ A \cap B^c$

الحادثتان AB^c و AB متنافيتان فيكون :

$$(AB)\,(AB^c) = \phi$$

$$A = AB \cup AB^c$$

ومن المسلمة III

$$P(AB) + P(AB^c) = P(A)$$

أي أن :

$$P(AB^c) = P(A) - P(AB)$$

وهو المطلوب .

مثال (7 – 9)

إذا كان احتمال نجاح محمد هو $\frac{5}{8}$ واحتمال نجاح أحمد ومحمد هو $\frac{1}{8}$ فأحسب احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد .

الحــــل

نفرض أن الحادثتين B و A هما :

$A = \{$ نجاح محمد $\}$, $B = \{$ نجاح أحمد $\}$

$$P(A) = \frac{5}{8} \quad , \quad P(AB) = \frac{1}{8}$$

$AB^c = \{$ نجاح محمد ورسوب أحمد $\}$, $P(AB^c) = ?$

$$\because \quad P(AB^c) = P(A) - P(AB)$$
$$\therefore \quad P(AB^c) = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

وهو المطلوب

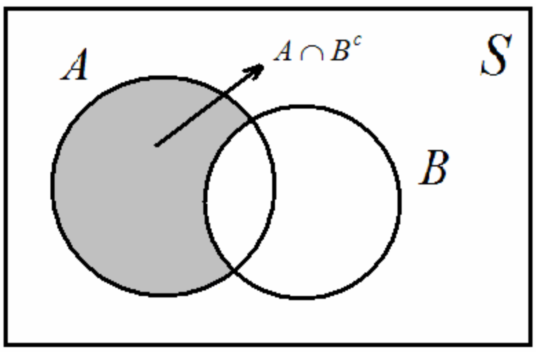
نتيجة

لأي حادثتين A, B فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

البرهان

شكل فن ، شكل (7 – 9) للحوادث A, B, S التالي :



شكل (7 – 9) يمثل شكل فن للحوادث A, B, AB^c

من شكل فن الحادثتين B و AB^c متنافيتان أي أن :

$$(AB^c)\ (B) = \phi$$

وأن :

$$A \cup B = (AB^c) \cup B$$

بتطبيق المسلمة (III)

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$$

وبالتعويض عن الاحتمال $P(A\ B^c)$ من نتيجة (4 – 8) نحصل على :

$$P(A \cup B) = P(A) - P(AB) + P(B)$$

أي أن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(AB) + P(B)$$

وهو المطلوب

مثال (7 – 10)

إذا كان احتمال نجاح محمد $\frac{1}{4}$ واحتمال رسوب أحمد $\frac{1}{3}$ واحتمال نجاح محمد وأحمد $\frac{1}{6}$ أوجد احتمال نجاح أحدهما على الأقل .

الحـــل

نكتب الحوادث التالية :

$A = \{$ نجاح محمد $\}$, $P(A) = \frac{1}{4}$

$B = \{$ نجاح أحمد $\}$, $B^c = \{$ رسوب أحمد $\}$, $P(A) = \frac{1}{3}$

$AB = \{$ نجاح محمد ,احمد $\}$, $P(A) = \frac{1}{6}$

$A \cup B = \{$ نجاح محمد أو أحمد أو كليهما $\}$, $P(A \cup B) = ?$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$P\ (A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$\therefore P\ (A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+8-2}{12} = \frac{9}{12}$$

نتيجة (7 – 6)

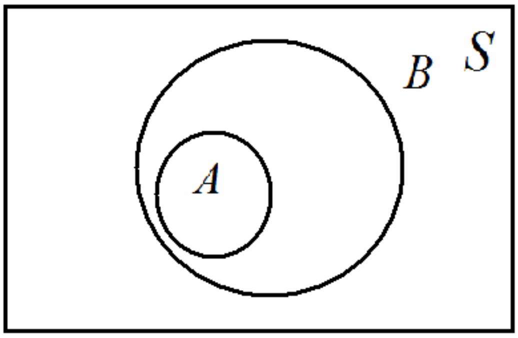
إذا كان $A \subset B$

فإن

$$P(A) \le P(B)$$

البرهان

تمثل الحوادث A, B, S بشكل فن ، شكل (7- 10) التالي :



شكل (7- 10) يمثل شكل فن للحادثة $A \subset B$

يمكن التعبير عن الحادثة B كالتالي :

$$B = A \cup (A^c B)$$

حيث $A \cap (A^c \cap B) = \phi$

$$P(B) = P(A \cup (A^c B))$$

ومن المسلّمة III

$$P(B) = P(A) + P(A^c B)$$

$$P(B) - P(A) = P(A^c B)$$

$$P(B) - P(A) \ge 0$$

حيث إنه لأي حادثة $A^c B$ يكون

$$P(A^c B) \ge 0$$

وعليه فإن :

$$P(A) \le P(B)$$

وهو المطلوب

(7 – 7 – 2) أمثلة متنوعة

مثال (7 – 11)

قذفت قطعة نقود متزنة مرتين .

أحسب الاحتمالات التالية :

$$P(A), P(B), P(C), P(AB), P(A \cup B), P(\overline{A \cup B}), P(B\overline{C}), P(\overline{B} \cup \overline{C})$$

حيث A, B, C كالتالي :

A الحادث الدال على ظهور صورة في الرمية الأولى .

B الحادث الدال على ظهور كتابة في الرمية الأولى .

C الحادث الدال على ظهور صورة واحدة على الأقل .

الحـــــل

نكتب فراغ العينة S وهو :

$$S = \{\text{HH, HT, TH, TT}\}$$

$$n(S) = 4$$

ونكتب الحوادث A, B, C وكذلك احتمال كل حادثة على حده كالتالي :

$$A = \{HH, HT\}, \quad n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{TH, TT\}, \quad n(B) = 2$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{HH, HT, TH\}, \quad n(C) = 3$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

$$AB = \phi \quad , \quad n(AB) = 0$$

$$P(AB) = \frac{n(AB)}{n(S)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$p(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1$$
$$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-1=0$$
$$BC=\{TH\} \quad , \quad P(BC)=\frac{n(BC)}{n(S)}=\frac{1}{4}$$
$$P(B\overline{C})=P(B)-P(BC)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$
$$P(BC)=\frac{1}{4}$$
$$P(\overline{B}\cup\overline{C})=P(\overline{BC})=1-P(BC)$$
$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال (7 – 12)

إذا كان لدينا حادثتان A, B بحيث :

$$P(A)=\frac{1}{5}\ ,\ P(B)=\frac{2}{5}\ ,\ P(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

أحسب :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-P(AB)$$
$$P(AB)=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$
$$P(AB^c)=P(A)-P(A\,B)$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$$
$$P(A^cB^c)=P(A\cup B)^c=1-P(A\cup B)$$
$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال (7 – 13)

اختير رقم من الأرقام الصحيحة من 1 إلى 50 بطريقة عشوائية (بحيث إن احتمال ظهور الأرقام متساوٍ) .

أحسب احتمال أن يكون الرقم هو 4 أو مضاعفتها .

الحـــل

فراغ العينة S هو :

$$S = \{1, 2, 3, \ldots.. , 50\} \ , \ n\,(S) = 50$$

$$A = \{\ \text{الرقم 4 أو مضاعفات الـ 4}\ \}$$

$$A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\} \ , \quad n\,(A) = 12$$

$$P\,(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$$

مثال (7 – 14)

إذا اخترنا ورقتين من أوراق اللعب ما هو احتمال أن يكون لونهما أسود ؟

الحـــل

عدد أوراق اللعب الكلية = 52 ورقة

عدد الأوراق التي لونها أسود = 26 ورقة

الحادثة A هي أن الورقتين المسحوبتين لونهما أسود .

عدد حالات النجاح في الحصول على ورقتين لونهما أسود $n(A) = \binom{26}{2}$

عدد الحالات الكلية $n(S) = \binom{52}{2}$

$$P\,(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} = \frac{\binom{22}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{26 \times 25}{52 \times 51} = 0.245$$

(7 – 8) الاحتمال الشرطي Conditional probability

عندما نتحدث عن احتمال وقوع الحدث A فإننا في الحقيقة نعني تعريف احتمال وقوع A منسوباً إلى فضاء عينة محدد (في هذه الحالة S) . لكن عند تطبيق نظرية الاحتمالات ترد أوضاع نحتاج فيها إلى إيجاد احتمال الحدث A علماً بوقوع الحدث B .

فمثلاً :

1) نفرض أن صندوقاً يحتوي على 100 مصباح ، 5 منها معيبة ثم سحبنا مصباحين بدون إرجاع . أوجد احتمال أن يكون المصباح المسحوب ثانياً معيباً علماً بأن المصباح المسحوب أولاً كان سليماً .

2) أوجد احتمال أن يستمر المصباح صالحاً لمدة 100 ساعة علماً بأنه ظل صالحاً لمدة 24 ساعة .

يفهم مما سبق أننا نريد إيجاد احتمال الحدث A ، منسوباً لفضاء عينة جديد هو فضاء العينة المكون من عناصر الحدث B ، وأن الحدث B هو فضاء العينة الجديد ويسمى بالفضاء المختزل $B \subset S$. ومرادنا هو احتمال حدوث A بشرط حدوث B .

ونوضح الاحتمال الشرطي باعتبار المثال العددي التالي :

إذا صنفنا طلاب شعبتين لمقرر 101 إحص حسب تخصص الإحصاء ومن خارج تخصص الإحصاء وكانت نتيجة التصنيف كما هو موضح بالجدول التالي :

الشعبة / التخصص	الشعبة الأولى	الشعبة الثانية	المجموع
تخصص إحصاء	30	25	55
من خارج تخصص الإحصاء	10	15	25
المجموع	40	40	80

فإذا اخترنا طالباً بطريقة عشوائية فإننا نلاحظ أن :

i) احتمال أن يكون الطالب من الشعبة الأولى وتخصصه إحصاء يساوي $\frac{30}{80}$.

ii) فإذا علمنا أن الطالب المختار من الشعبة الأولى فإن احتمال أن يكون تخصصه إحصاء يساوي $\frac{30}{40}$.

والاحتمال (i) ناتج من أن عدد الحالات المواتية 30 ، وعدد الحالات الممكنة هي 80 ، والاحتمال (ii) هو احتمال أن يكون الطالب من تخصص الإحصاء إذا علم أنه من الشعبة الأولى ويسمى احتمالاً شرطياً . فإذا رمزنا للحادثة A بأن الطالب المختار من تخصص الإحصاء ، وللحادثة B بأن الطالب المختار من الشعبة الأولى ، فإن احتمال (i) هو $P(AB)$ وأن الاحتمال (ii) هو $P(A|B)$. ويقرأ احتمال حدوث A إذا حدث B (أو احتمال حدوث A بشرط حدوث B) ، ونلاحظ أن :

$$P\left(A|B\right)=\frac{30}{40}=\frac{30}{80}/\frac{40}{80}=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}$$

من التعريف النسبي للاحتمال نجد أن $P(A|B)$ يمثل نسبة العناصر في فضاء العينة S والمشتركة بين الحدثين A, B منسوبة لعناصر الحدث B أي أن :

$$P\left(A|B\right)=\frac{n\left(AB\right)}{n\left(B\right)}=\frac{n\left(AB\right)/n\left(S\right)}{n\left(B\right)/n\left(S\right)}$$

حيث $n(S)$ عدد العناصر فضاء العينة S .

وينتج من هذا أن :

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)} \qquad (3-7)$$

بحيث إن $P(B)\neq 0$

مثال (7 – 15)

إذا كان احتمال أن ينجح محمد هو $\frac{1}{3}$ واحتمال أن ينجح محمد وأحمد هو $\frac{1}{4}$ أوجد احتمال نجاح أحمد إذا علم أن محمداً قد نجح .

الحـــل

نكون الحوادث التالية :

$$B=\{\text{نجاح محمد}\}\ , \qquad P(B)=\frac{1}{3}$$

$A = \{$ نجاح أحمد $\}$,

$AB = \{$ نجاح محمد وأحمد $\}$

$A|B = \{$ نجاح أحمد بشرط نجاح محمد $\}$

وبذلك يكون المطلوب هو حساب : $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

(7 – 9) احتمال الحوادث المستقلة Independent Events

يقال أن الحادثتان A و B مستقلتان إذا كان حدوث إحداهما لا يؤثر في حدوث الآخر. فمثلا عند رمي قطعة نقود متزنة مرتين فإن ظهور صورة في الرمية الأولى A لا يؤثر على ظهور صورة في الرمية الثانية B ويقال إن ظهور صورة في الرمية الأولى وفي الرمية الثانية حادثتان مستقلتان ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$P(B|A) = P(B) \qquad (4-7)$$

ومن تعريف الاحتمال الشرطي نحصل على :

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(AB) = P(A).P(B) \qquad (5\text{-}7)$$

ومن ذلك القول إن الحادثتين A, B مستقلتان إذا تحقق أحد الشروط التالية :

i) $P(A|B) = P(A)$

ii) $P(B|A) = P(B)$

iii) $P(AB) = P(A) . P(B)$

مثال (7 – 16)

إذا كان احتمال أن يصيب محمد هدفاً معيناً هو $\frac{3}{4}$ واحتمال أن يصيب أحمد الهدف نفسه هو $\frac{1}{3}$. فأوجد احتمالات الحوادث التالية :

1) أن لا يصيب محمد الهدف .

2) أن لا يصيب أحمد الهدف .

3) أن يصيبا الهدف معاً .

4) على الأقل يصيب الهدف أحدهما .

5) محمد يصيب الهدف وأحمد لا يصيبه .

6) أن لا يصيبا الهدف معاً .

$A = \{$ يصيب محمد الهدف $\}$, $P(A) = \frac{3}{4}$

$B = \{$ يصيب أحمد الهدف $\}$, $P(A) = \frac{1}{3}$

1) $A^c = \{$ لا يصيب محمد الهدف $\}$, $P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{1}{4}$

2) $B^c = \{$ لا يصيب أحمد الهدف $\}$, $P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$

3) $AB = \{$ يصيبا الهدف معاً $\}$

وحيث إن إصابة محمد مستقلة عن إصابة أحمد فإن :

$$P(A \cap B) = P(A).\,P(B) = \frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

4) $A \cup B = \{$ على الأقل يصيب الهدف أحدهما $\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A\,B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$$

5) $AB^c = \{$ محمد يصيب وأحمد لا يصيب $\}$

$$P(AB^c) = P(A) - P(AB)$$

$$P(AB^c) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

6) $\left(\overline{A \cap B}\right)$ = { أن لا يصيبا معاً الهدف }

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

مثال (7 – 17)

إذا كانت الحادثتين A, B مستقلتين أثبت أن الحادثتين A, B^c مستقلتان .

أي أثبت أن :

$$P(AB^c) = P(A) . P(B^c)$$

الحـــل

$$P(AB^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

ولكن A, B مستقلتان فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

ومن ذلك نحصل على :

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A) . P(B)$$
$$= P(A) [1 - P(B)]$$
$$= P(A) . P(B^c)$$

وهو المطلوب

مثال (7 – 18)

إذا كانت A, B مستقلتين فأثبت أن الحادثتين A^c, B^c مستقلتان .

أي أثبت أن :

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) . P(B^c)$$

الحـــل

من قانون ديمورجن $A^c B^c = (A \cup B)^c$

$$P(A^c B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B)$$
$$P(A^c B^c) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$$

ولكن A, B مستقلتان فإن :

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\begin{aligned} P(A^c B^c) &= 1 - [\, P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \,] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= [\, 1 - P(A) \,] - P(B) + P(A) . P(B) \\ &= [\, 1 - P(A) \,] - P(B) [\, 1 - P(A) \,] \\ &= P(A^c) - P(B) \cdot P(A^c) \\ &= P(A^c) [\, 1 - P(B) \,] \end{aligned}$$

$$P(A^c B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$$

وهو المطلوب

مثال (7 – 19)

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

$$= P(A) \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$$

$$= P(A \cap B \cap C)$$

= الطرف الأيسر

مثال (7 – 20)

صندوق يحتوي على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء أخذت عينة مكونة من كرتين واحدة بعد الأخرى أوجد احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض .

أ) إن كان السحب بدون إرجاع .

ب) إن كان السحب بإرجاع .

الحـــل

$A =$ { الكرة الأولى لونها بيضاء }

$B =$ { الكرة الثانية لونها أبيض }

$AB =$ { الكرتان لونهما أبيض }

أ) في حالة السحب بدون إرجاع :

$$P(AB) = P(A) \,.\, P(B|A)$$
$$= \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29}$$

ب) في حالة السحب بإرجاع

$$P(AB) = P(A) \,.\, P(B)$$
$$= \frac{20}{30} \cdot \frac{20}{30}$$

مثال (7 – 21)

حل المثال (7 – 20) إذا كانت العينة المسحوبة مكونة من ثلاث كرات .

الحـــــل

$A =$ { الكرة الأولى بيضاء }

$B =$ { الكرة الثانية بيضاء }

$C =$ { الكرة الثالثة بيضاء }

$ABC =$ { العينة كلها بيضاء }

أ) في حالة السحب بدون إرجاع

$$P(ABC) = P(A).\, P(B|A).\, P(C|AB)$$
$$= \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{20}{30}$$

ب) في حالة السحب بإرجاع

$$P(ABC) = P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$$
$$= \frac{20}{30} \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{20}{30}$$

مثال (7 – 22)

في مثال (7 – 20) إذا سحبت عينة مكونة من 4 كرات بطريقة عشوائية . ما هو احتمال الحصول على 3 كرات حمراء وواحدة لونها أبيض ؟

الحـــل

A = { العينة بها 3 كرات حمراء وواحدة بيضاء }

S = { العينة بها 4 كرات من 30 كرة }

باستخدام طرق العدّ

عدد الطرق للحصول على 3 كرات حمراء = $\binom{10}{3}$

عدد الطرق للحصول على كرة واحدة بيضاء = $\binom{20}{1}$

عدد الطرق للحصول على 4 كرات منها 3 حمراء ، وواحدة بيضاء = $n(A)$

باستخدام قاعدة الضرب يكون :

$$n(A)=\binom{10}{3}\binom{20}{1}$$

عدد الطرق للحصول على 4 كرات من 30 كرة هي $n(S)$ حيث :

$$n(S)=\binom{30}{4}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{10}{3}\binom{20}{1}}{\binom{30}{4}}$$

$$P(A)=\frac{10\times20\times24\times12}{30\times29\times28\times27}=0.088$$

(7 – 10) نظرية بيــز Bayes Theorem

تهتم نظرية بيز بحساب احتمال أن يكون هناك سبباً ما هو مصدر حدوث حادثة معينة نعلم مسبقاً بحدوثها ، وأن حدوثها يرجــع إلى عدد من الأسباب المعروف احتمال حدوث كل منها ، كما نعلم أيضاً احتمال حدوث الحادثة إذا تحقق سبب ما من هذه الأسباب .

إذا كان لدينا مجموعة الحوادث :

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

الشاملة والمتنافية بالتبادل (تجزيء فضاء العينة S) أي أن :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S \,,\, A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j = 1, \dots, n$$

بحيث $P(A_i) \neq 0 \quad , i = 1 \,, \dots , n$

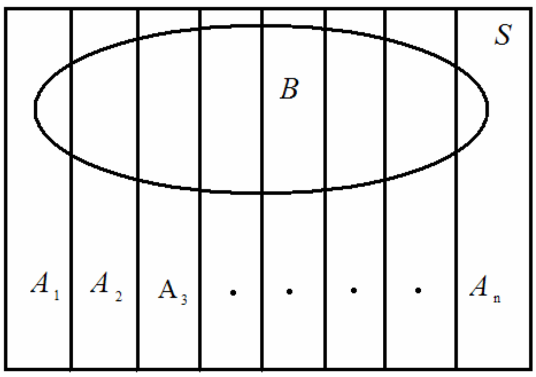
لأي حادثة B معرفة على فضـــاء العينة S نفسه بحيث $P(B) \neq 0$ فإنه لقيم i التالية $i = 1, 2, \dots , n$ يكون :

$$P\left(A_i \middle| B\right) = \frac{P\left(B \middle| A_i\right) P\left(A_i\right)}{P\left(B\right)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$P\left(A_i \middle| B\right) = \frac{P\left(B \middle| A_i\right) P\left(A_i\right)}{\sum_{k=1}^{n} P\left(B \middle| A_k\right) . P\left(A_k\right)} \qquad (8-7)$$

البرهـــان

يمكن توضيح أن الحادثة B وفراغ العينة بشكل فن ، شكل (7 – 11) التالي :



شكل (7 – 11) يمثل شكل فن لتجزيء فراغ العينة S والحادثة B

من الشكل يتضح أن الحادثة B عبارة عن اتحاد مجموع الحوادث المتنافية التالية :

$$A_1B,\ A_2B,\ \ldots\ ,\ A_nB$$

أي أن :

$$B = A_1B \cup A_2B \cup \ldots \cup A_nB$$

وباستخدام المسلّمة الثالثة نحصل على :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1B) + P(A_2B) + \ldots + P(A_nB) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_kB) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(B|A_2)P(A_k) \qquad (1) \end{aligned}$$

ومن تعريف الاحتمال الشرطي فإن :

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{P(B)} \qquad (2)$$

من (2) , (1) نحصل علي :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)\,P(A_k)}\ ;\ i, k = 1, \ldots, n$$

وهو المطلوب .

ملاحظة هامة :

تسمى العلاقة :

$$P(B) = P(B|A_1)\ P(A_1) + \ldots. + P(B|A_n)\ P(A_n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)\,.\,P(A_k)$$

بقانون الاحتمال الكلي .

مثال (7 – 23)

مصنع به ثلاثة ماكينات III ,II ,I وكانت الماكينة I تنتج % 20 من الإنتاج ، والماكينة II تنتج % 30 من الإنتاج ، والماكينة III تنتج % 50 من الإنتاج ، وكانت نسبة الإنتاج المعيب للماكينات الثلاث على الترتيب هو % 4 و % 3 و % 2 .

فإذا اختيرت وحدة من الإنتاج بشكل عشوائي ، أحسب الاحتمالات التالية :

i) ما هو احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من الإنتاج معيبة ؟

ii) إذا كانت الوحدة المسحوبة معيبة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الماكينة II .

الحـــل

نُعرف الحوادث التالية :

$D =$ { الوحدة معيبة }

$A =$ { الوحدة من إنتاج الماكينة I } ; $P(A) = 0.20$

$B =$ { الوحدة من إنتاج الماكينة II } ; $P(B) = 0.30$

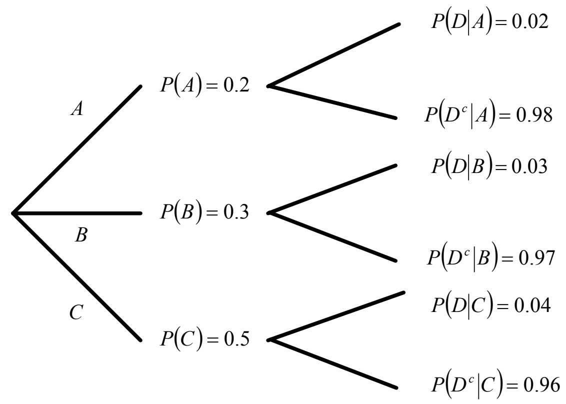
$C =$ { الوحدة من إنتاج الماكينة III } ; $P(C) = 0.50$

$$P(D|A) = 0.02$$

$$P(D|B) = 0.03$$

$$P(D|C) = 0.04$$

ونوضح الحل باستخدام الشجرة البيانية ، شكل (7 – 12) التالي :



شكل (7 – 12) يمثل الشجرة البيانية لاحتمالات الإنتاج للماكينات الثلاث

المطلوب هو إيجاد $P(D)$

i) $$P(D) = P(A)\,P(D|A) + P(B)\,P(D|B) + P(C)\,P(D|C)$$

$$= 0.20 \times 0.02 + 0.30 \times 0.03 + 0.50 \times 0.04$$

$$= 0.004 + 0.009 + 0.020$$

$$= 0.033$$

ii) $$P(B|D) = \frac{P(D|B)\,P(B)}{P(D)}$$

$$= \frac{0.03 \times 0.30}{0.033} = \frac{0.009}{0.033} = 0.273$$

مثال (7 – 24)

صندوقان الأول بـه 4 كرات بيضـاء ، 6 كرات سـوداء والصندوق الثاني بـه 8 كرات بيضاء ، 3 كرات سوداء . اختير أحد الصناديق عشوائياً واختيرت منه كرة بطريقة عشوائية أوجد :

i) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة لونها أسود .

ii) إذا اختيرت كرة ووجد أنها سوداء ما هو احتمال أن تكون من الصندوق الأول .

الحـــــل

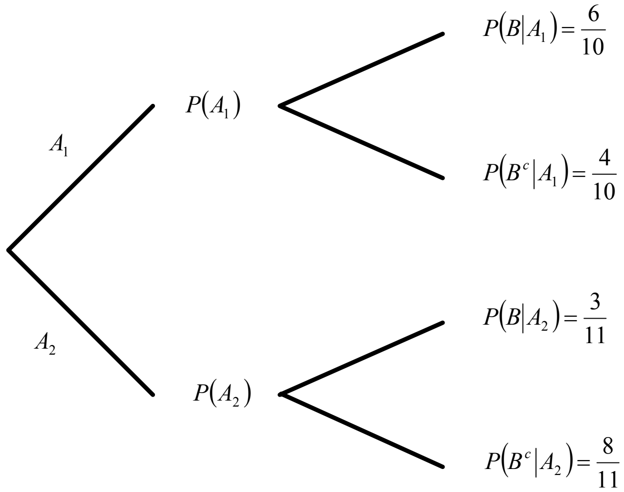
نفرض الحوادث التالية :

$A_1 =$ { الكرة المسحوبة من الصندوق الأول } . $P(A_1) = \frac{1}{2}$

$A_2 =$ { الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني } . $P(A_2) = \frac{1}{2}$

$B =$ { الكرة المسحوبة سوداء } . $P(B) = ?$

نوضح الحل باستخدام الشجرة البيانية كما في شكل (7 – 13) التالي :



شكل (7 – 13) يمثل الشجرة البيانية لاحتمالات سحب كرة من أحد الصندوقين

i) المطلوب إيجاد $P(B)$:

$$P(B) = P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2)$$

$$P(B) = \frac{6}{10}.\frac{1}{2} + \frac{3}{11}.\frac{1}{2} = 0.436$$

ii) المطلوب هو إيجاد $P(A_1|B)$:

ويمكن إيجاد هذا الاحتمال باستخدام نظرية بيز كما يلي :

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \,.\, P(A_1)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{6}{10} \times \frac{1}{2}}{0.436} = 0.688$$

(7 – 11) ملحق 7

أمثلة على الإحتمالات باستخدام Excel:

يعتبر هذا الفصل من الكتاب حول مبادئ الإحتمالات نظري بحت والأمثلة فية رياضية تحليلية ولهذا سوف نستعرض خواص الإحتمالات عن طريق المحاكاة وطرق إعادة المعاينة Resampling Methods .

بعض العلاقات المنطقية لتمثيل المجموعات في إكسل:

$NOT(\log ical)$ $OR(\log ical1, \log ical2, \ ...)$ $AND(\log ical1, \log ical2, \ ...)$	$A^c = NOT(A)$ $A \cup B = OR(A,B)$ $A \cap B = AND(A,B)$

محاكاة رمي عملة متزنة:

سوف نحاكي أولا عملية رمي عملة متزنة، سوف نرمز لوجه العملة المحتوي على الصورة بالرمز H وللوجه المحتوي على الكتابة بالرمز T. للعملة المتزنة إحتمال ظهور أي من الوجهين متساوي أي:

$$P(H) = P(T) = 0.5$$

في هذا المثال نرمي العملة 1500 مرة في كل إجراء للمحاكاة ونوجد نسبة عدد الوجوه التي ظهرت وعليها صورة وكذلك التي عليها كتابة فتكون كل من هاتين النسبتين مقدرات للإحتمالات الصحيح.

في صفحة من إكسل أدخل التالي:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Prob.	CDF	Face	Sample		n		Prob.		
2		0.5	0	H	=VLOOKUP(RAND(),$C$2:$D$3,2)	Number of H=	=COUNTIF($E$2:$E$1501,"H")	Prob(H) =	=G2/G4	error 1 =	=0.5-I2
3		0.5	0.5	T	=VLOOKUP(RAND(),$C$2:$D$3,2)	Number of T=	=COUNTIF($E$2:$E$1501,"T")	Prob(T) =	=G3/G4	error 2 =	=0.5-I3
4					=VLOOKUP(RAND(),$C$2:$D$3,2)	Sample# =	=COUNTA(E2:E1501)	Prob = 1	=I2+I3		

لاحظ العنونة المطلقة في الخلايا E2 و G2 و G3. محتويات الخلية E2 هي:

=VLOOKUP(RAND(),$E$2:$E$1501,2)

محتوى الخلية E2 ينسخ حتى الخلية E1501 (بعدد حجم العينة المطلوب). في الخلية G2 ندخل

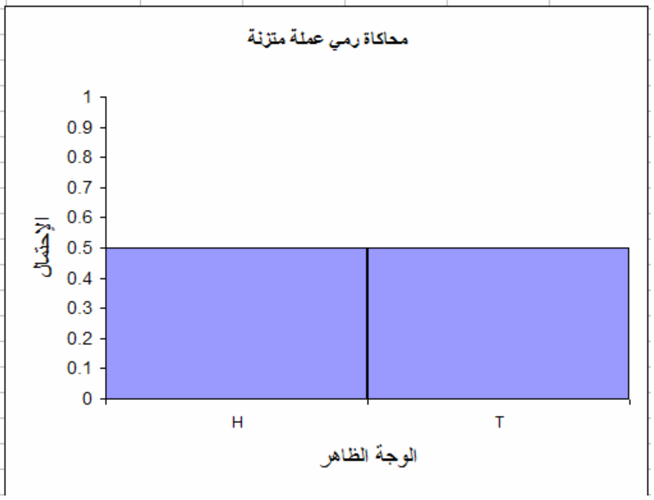
=COUNTIF($E$2:$E$1501,"H")

وهذا يعد عدد الصور في العينة وبالمثل ندخل في الخلية G3 الأمر

=COUNTIF($E$2:$E$1501,"T")

وهذا يعطي عدد الكتابة في العينة. ثم تحسب بقية الكميات كما في الشكل السابق. فينتج التالي:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Prob.	CDF	Face	Sample		n		Prob.		
2		0.5	0	H	T	Number of H=	751	Prob(H) =	0.500667	error 1 =	-0.00067
3		0.5	0.5	T	H	Number of T=	749	Prob(T) =	0.499333	error 2 =	0.000667
4					T	Sample# =	1500	Prob = 1	1		
5					H						
6					H						
7					H						
8					T						
9					H						
10					T						
11					T						
12					T						
13					H						
14					H						
15					H						
16					T						
17					T						
18					T						
19					T						
20					T						
21					H						
22					H						
23					T						
24					T						



بالضغط على مفتاح F9 يعاد حساب الصفحة ونحصل على عينة جديدة من 1500 رمية لعملة متزنة. كما ان المدرج التكراري سوف يتغير تفاعليا مع كل إجراء. لاحظ قيم الإحتمالات و الخطأ في كل إجاء.

مثال (7 – 5)

محاكاة رمي قطعة نقود متزنة 3 مرات. أدخل التالي في صفحة من إكسل

	A	B	C	D	E	F	G
1	CDF	Face	1st Throw	2nd Throw	3rd Throw	HHH	HHT
2	0	H	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=IF(AND($C2="H",$D2="H",$E2="H"),1,0)	=IF(AND($C2="H",$D2="H",$E2="T"),1,0)
3	0.5	T	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=IF(AND($C3="H",$D3="H",$E3="H"),1,0)	=IF(AND($C3="H",$D3="H",$E3="T"),1,0)

	H	I	J	K
1	HTH	HTT	THH	THT
2	=IF(AND($C2="H",$D2="T",$E2="H"),1,0)	=IF(AND($C2="H",$D2="T",$E2="T"),1,0)	=IF(AND($C2="T",$D2="H",$E2="H"),1,0)	=IF(AND($C2="T",$D2="H",$E2="T"),1,0)
3	=IF(AND($C3="H",$D3="T",$E3="H"),1,0)	=IF(AND($C3="H",$D3="T",$E3="T"),1,0)	=IF(AND($C3="T",$D3="H",$E3="H"),1,0)	=IF(AND($C3="T",$D3="H",$E3="T"),1,0)

	L	M	N	O	P	Q	R
1	TTH	TTT	Must be 1	#HHH =	=SUM(F:F)		
2	=IF(AND($C2="T",$D2="T",$E2="H"),1,0)	=IF(AND($C2="T",$D2="T",$E2="T"),1,0)	=SUM(F2:M2)	#HHT =	=SUM(G:G)		
3	=IF(AND($C3="T",$D3="T",$E3="H"),1,0)	=IF(AND($C3="T",$D3="T",$E3="T"),1,0)	=SUM(F3:M3)	#HTH =	=SUM(H:H)		
4	=IF(AND($C4="T",$D4="T",$E4="H"),1,0)	=IF(AND($C4="T",$D4="T",$E4="T"),1,0)	=SUM(F4:M4)	#HTT =	=SUM(I:I)		
5	=IF(AND($C5="T",$D5="T",$E5="H"),1,0)	=IF(AND($C5="T",$D5="T",$E5="T"),1,0)	=SUM(F5:M5)	#THH =	=SUM(J:J)		
6	=IF(AND($C6="T",$D6="T",$E6="H"),1,0)	=IF(AND($C6="T",$D6="T",$E6="T"),1,0)	=SUM(F6:M6)	#THT =	=SUM(K:K)		
7	=IF(AND($C7="T",$D7="T",$E7="H"),1,0)	=IF(AND($C7="T",$D7="T",$E7="T"),1,0)	=SUM(F7:M7)	#TTH =	=SUM(L:L)		
8	=IF(AND($C8="T",$D8="T",$E8="H"),1,0)	=IF(AND($C8="T",$D8="T",$E8="T"),1,0)	=SUM(F8:M8)	#TTT =	=SUM(M:M)		
9	=IF(AND($C9="T",$D9="T",$E9="H"),1,0)	=IF(AND($C9="T",$D9="T",$E9="T"),1,0)	=SUM(F9:M9)	n =	=SUM(P1:P8)	must be =	=SUM(N:N)
10	=IF(AND($C10="T",$D10="T",$E10="H"),1,0)	=IF(AND($C10="T",$D10="T",$E10="T"),1,0)	=SUM(F10:M10)				
11	=IF(AND($C11="T",$D11="T",$E11="H"),1,0)	=IF(AND($C11="T",$D11="T",$E11="T"),1,0)	=SUM(F11:M11)	P(HHH)=	=P1/P9	ERROR=	=0.125-P11
12	=IF(AND($C12="T",$D12="T",$E12="H"),1,0)	=IF(AND($C12="T",$D12="T",$E12="T"),1,0)	=SUM(F12:M12)	P(HHT)=	=P2/P9	ERROR=	=0.125-P12
13	=IF(AND($C13="T",$D13="T",$E13="H"),1,0)	=IF(AND($C13="T",$D13="T",$E13="T"),1,0)	=SUM(F13:M13)	P(HTH)=	=P3/P9	ERROR=	=0.125-P13
14	=IF(AND($C14="T",$D14="T",$E14="H"),1,0)	=IF(AND($C14="T",$D14="T",$E14="T"),1,0)	=SUM(F14:M14)	P(HTT)=	=P4/P9	ERROR=	=0.125-P14
15	=IF(AND($C15="T",$D15="T",$E15="H"),1,0)	=IF(AND($C15="T",$D15="T",$E15="T"),1,0)	=SUM(F15:M15)	P(THH)=	=P5/P9	ERROR=	=0.125-P15
16	=IF(AND($C16="T",$D16="T",$E16="H"),1,0)	=IF(AND($C16="T",$D16="T",$E16="T"),1,0)	=SUM(F16:M16)	P(THT)=	=P6/P9	ERROR=	=0.125-P16
17	=IF(AND($C17="T",$D17="T",$E17="H"),1,0)	=IF(AND($C17="T",$D17="T",$E17="T"),1,0)	=SUM(F17:M17)	P(TTH)=	=P7/P9	ERROR=	=0.125-P17
18	=IF(AND($C18="T",$D18="T",$E18="H"),1,0)	=IF(AND($C18="T",$D18="T",$E18="T"),1,0)	=SUM(F18:M18)	P(TTT)=	=P8/P9	ERROR=	=0.125-P18
19	=IF(AND($C19="T",$D19="T",$E19="H"),1,0)	=IF(AND($C19="T",$D19="T",$E19="T"),1,0)	=SUM(F19:M19)	Total Prob	=SUM(P11:P18)	Sum of err	=SUM(R11:R18)

المجال A2:B3 سميناه CDF. ادخلنا في الخلايا C2:E2 الأمر

=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)

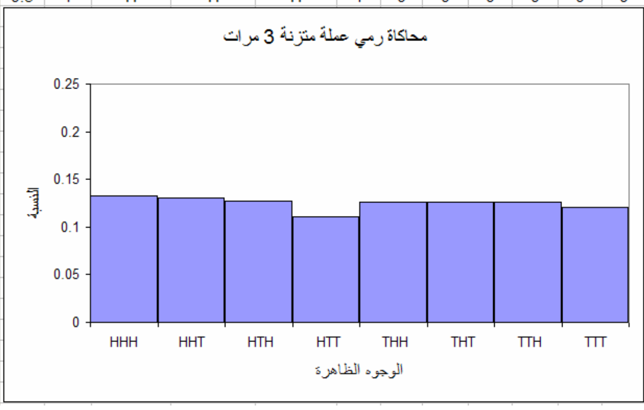
ثم نسخت حتى C1504:E1504.

لكي نلاحظ الوجوه التي عليها HHH فقط ندخل في الخلية F2 التالي:

=IF(AND($C2=”H”,$D2=”H”,$E2=”H”),1,0)

ثم ينسخ حتى F1504 (للنسخ حتى نهاية المجال في حالة مثل هذه، نختار الخلية الأولى ثم نضع المؤشر في الركن الأيمن السفلي منها فيتحول شكل المؤشر إلى + فنضغط مرتين فيتم النسخ تلقائيا). تنسخ الخلية F2 للخلايا G2 وحتى M2 مع التغييرات المناسبة لملاحظة بقية الوجوه ثم تنسخ هذه الخلايا حتى نهاية المجال. ثم تحسب بقية الكميات كما هو موضح فينتج:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	CDF	Face	1st Throw	2nd Throw	3rd Throw	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT	Must be 1	#HHH =	199		
2	0	H	T	T	H	0	0	0	0	0	0	1	0	1	#HHT =	196		
3	0.5	T	H	H	H	1	0	0	0	0	0	0	0	1	#HTH =	192		
4													0	1	#HTT =	167		
5													0	1	#THH =	189		
6													0	1	#THT =	190		
7													0	1	#TTH =	189		
8													0	1	#TTT =	182		
9													0	1	n =	1504	must be =	1504
10													0	1				
11													0	1	P(HHH)=	0.13231383	ERROR=	-0.00731383
12													0	1	P(HHT)=	0.130319149	ERROR=	-0.005319149
13													0	1	P(HTH)=	0.127659574	ERROR=	-0.002659574
14													0	1	P(HTT)=	0.111037234	ERROR=	0.013962766
15													0	1	P(THH)=	0.125664894	ERROR=	-0.000664894
16													0	1	P(THT)=	0.126329787	ERROR=	-0.001329787
17													0	1	P(TTH)=	0.125664894	ERROR=	-0.000664894
18													0	1	P(TTT)=	0.121010638	ERROR=	0.003989362
19													0	1	Total Prob	1	Sum of err	0
20													1	1				
21													0	1				
22													0	1				



لاحظ وضعنا بعض القياسات للتأكد من أن المحاكاة تعطي النتائج المطلوبة مثل العمود N والخلايا R9 و P19 و من Q9:R19.

هذه المحاكاة ايضا تفاعلية ويعاد حساب الصفحة وتجديد الرسم كلما ضغطنا مفتاح F9.

الأمر التالي يوجد عدد عناصر A: الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى ويدخل في S2

=IF($C2="H",1,0)

وينسخ حتى S1505. مجموع S2:S1505 يعطي عدد عناصر A في 1504 رمية ويكون عدد العناصر المقدر =8*SUM(S2:S1505)/1504 وهو ما ندخلة في الخلية P21 :

O	P	Q	R	S	T	U	V	W
#HHH =	183			A	B	C	A∩B	A∪C
#HHT =	177			0	0	0	0	0
#HTH =	188			0	1	1	0	1
#HTT =	196			0	1	0	0	0
#THH =	201			0	1	0	0	0
#THT =	198			1	1	0	1	1
#TTH =	179			1	1	0	1	1
#TTT =	182			1	1	0	1	1
n =	1504	must be =	1504	0	0	0	0	0
				1	1	0	1	1
P(HHH)=	0.121675532	ERROR=	0.003324468	1	1	0	1	1
P(HHT)=	0.11768617	ERROR=	0.00731383	0	1	1	0	1
P(HTH)=	0.125	ERROR=	0	1	1	0	1	1
P(HTT)=	0.130319149	ERROR=	-0.005319149	1	1	0	1	1
P(THH)=	0.133643617	ERROR=	-0.008643617	0	0	0	0	0
P(THT)=	0.131648936	ERROR=	-0.006648936	0	1	1	0	1
P(TTH)=	0.119015957	ERROR=	0.005984043	1	1	0	1	1
P(TTT)=	0.121010638	ERROR=	0.003989362	1	1	0	1	1
Total Prob	1	Sum of err	0	0	1	0	0	0
				1	1	0	1	1
# A =	3.957446809	(True=4)		0	0	0	0	0
# B =	7.031914894	(True=7)		0	0	0	0	0
# C =	2.122340426	(True=2)		0	0	0	0	0
# A∩B =	3.957446809	(True=4)		0	0	0	0	0
# A∪C =	6.079787234	(True=6)		1	1	0	1	1

وهكذا للحادثة B: الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل ندخل الأمر التالي في T2

=IF(OR($C2="H",$D2="H",$E2="H"),1,0)

وينسخ حتى T1505 (يستخدم النسخ الذاتي في إكسل وذلك بالضغط مرتين على علامة + بعد إختيار الخلية المراد نسخها لنهاية المجال) وبنفس الطريقة السابقة نقدر عدد عناصر B.

وللحادثة C: الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الثانية ندخل التالي في U2

=IF(AND($C2="T",$D2="H"),1,0)

وبالمثل للحدث $A\cap B$ ندخل التالي في V2

=IF(AND($S2=1,$T2=1),1,0)

وللحدث $A\cup B$ ندخل في W2 التالي

=IF(OR($S2=1,$U2=1),1,0)

الأحداث A^c و $A^c\cup B^c$ و $(A\cap B)^c$ عناصرها واحدة وتوجد A^c بالأمر التالي

=IF(NOT($C2="H"),1,0)

مثال (7 – 6)

قذفت قطعة نقود متزنة مرتين. أوجد إحتمال الحصول على صورة مرتين. وتحاكى كالتالي:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	CDF	Face	Obs.	1st Throw	2nd Throw	HH		
2	0	H	1	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=IF(AND($D2="H",$E2="H"),1,0)	n({HH}) =	=SUM(F2:F2001)
3	0.5	T	2	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=IF(AND($D3="H",$E3="H"),1,0)	P({HH}) =	=H2/2000

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	CDF	Face	Obs.	1st Throw	2nd Throw	HH		
2	0	H	1	T	T	0	n({HH}) =	498
3	0.5	T	2	T	H	0	P({HH}) =	0.249
4			3	H	H	1		

لاحظ أن القيمة النظرية هي 0.25

مثال (7 – 11)

قذفت قطعة نقود متزنة مرتين. فإذا كانت A: ظهور صورة في الرمية الأولى. و B: ظهور كتابة في الرمية الأولى. و C: ظهور صورة واحدة على الأقل.

أوجد عن طريق المحاكاة مقدرات للإحتمالات التالية:

$$P(A),P(B),P(C),P(A\cap B),P(A\cup B),P\left(\overline{A\cup B}\right),P\left(B\cap\bar{C}\right),P\left(\bar{B}\cup\bar{C}\right)$$

في صفحة من إكسل أدخل التالي:

D2 => =VLOOKUP(RAND(),CDF,2)

E2 => =VLOOKUP(RAND(),CDF,2)

F2 => =IF($D2="H",1,0)

G2 => =IF($D2="T",1,0)

H2 => =IF(OR($D2="H",$E2="H"),1,0)

I2 => =IF(AND($D2="H",$D2="T"),1,0)

J2 => =IF(OR($D2="H",$D2="T"),1,0)

K2 => =IF(NOT(OR($D2="H",$D2="T")),1,0)

L2 => =IF(AND(D2="T",NOT(OR(D2="H",E2="H"))),1,0)

M2 => =IF(OR(D2="H",AND(D2="T",E2="T")),1,0)

تنسخ جميع الأعمدة حتى نهاية السطر المناسب لحجم العينة المطلوبة (هنا n =2000) ثم تجمع محتويات كل الأعمدة وتقسم على حجم العينة فينتج:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	CDF	Face	Obs.	1st Throw	2nd Throw	A	B	C	$A \cap B$
2	0	H	1	H	T	1	0	1	0
3	0.5	T	2	T	H	0	1	1	0

J	K	L	M	N	O	P
$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$B \cap \bar{C}$	$\bar{B} \cup \bar{C}$			
1	0	0	1	P(A) =	0.5105	(True=0.5)
1	0	0	0	P(B) =	0.4895	(True=0.5)
1	0	0	1	P(C) =	0.754	(True=0.75)
1	0	1	1	P($A \cap B$)=	0	(True=0)
1	0	0	1	P($A \cup B$)=	1	(True=1)
1	0	1	1	P($\overline{A \cup B}$)=	0	(True=0)
1	0	0	0	P($B \cap \bar{C}$)=	0.246	(True=0.25)
1	0	1	1	P($\bar{B} \cup \bar{C}$)=	0.7565	(True=0.75)

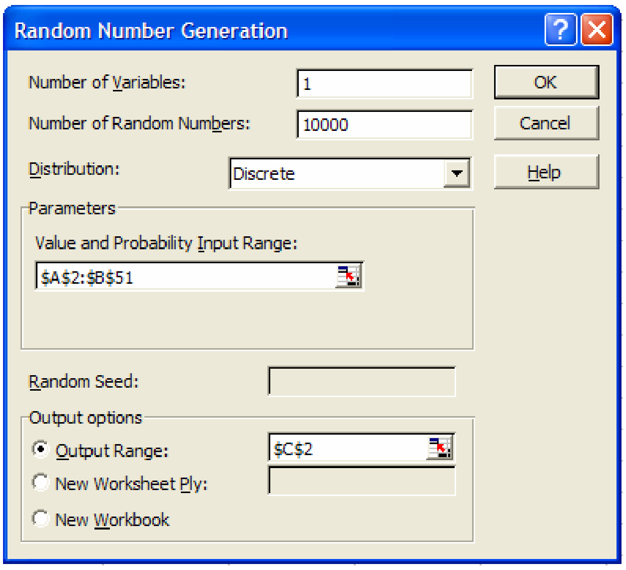
لاحظ القيم في العمود O تعطي المقدرات والتي في العمود P تعطي القيم النظرية الحقيقية.

مثال (7 – 13)

اختير رقم من الارقام الصحيحة بين 1 و 50 بطريقة عشوائية بحيث ان إحتمال ظهور اي رقم متساوي.

احسب إحتمال ان يكون الرقم 4 أو مضاعفاتها.

أدخل الأرقام من 1 إلى 50 في العمود A ثم أدخل الإحتمال 0.2 = 1/50 في جميع خلايا العمود B من القائمة الرئيسة اختار Tools => Data Analysis => Random Numbers Generation فتظهر النافذة:



نريد أن نولد عينة واحدة حجمها 1000 من الأعداد في العمود A والمعاينة تكون حسب الإحتمالات في العمود B ونخزن العينة في العمود C.

من العينة المكونة من 10000 مفردة في العمود C نحدد القيم التي تقبل القسمة على 4 بإدخال الأمر

=MOD(C2,4)

في الخلية D2 ثم ننسخها لنهاية مجال D. جميع القيم التي تقبل القسمة على 4 في العمود C سوف تعطي القيمة 0 في العمود D. لكي نوجد عدد الخلايا المساوية 0 في العمود D ندخل الأمر

=COUNTIF(D:D,0)

في الخلية E2 ونجد أن 2416 قيمة من أصل 10000 قيمة تقبل القسمة على 4 ويكون تقدير

$P(A) = 0.2416$

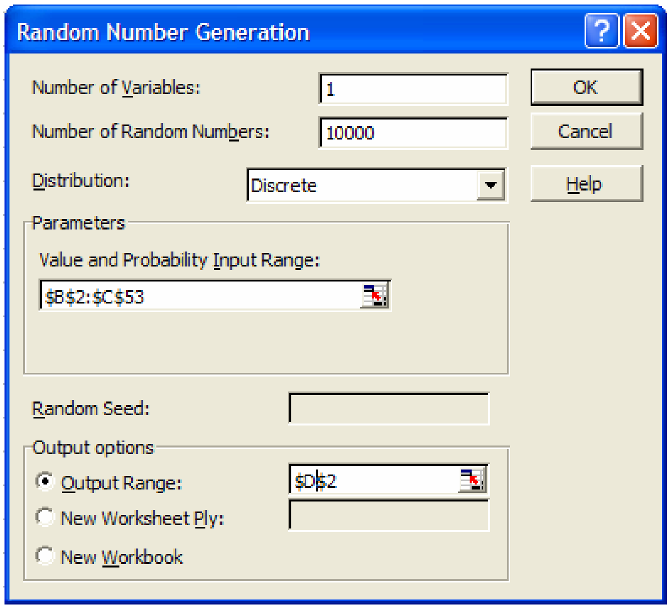
حيث A هو الحدث الحصول على 4 أو مضاعفاتها. لاحظ ان القيمة النظرية هي 0.24

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	P(x)	Sample	Div. By 4	How many		
2	1	0.02	20	0	2416		
3	2	0.02	6	2	P(A) =	0.2416	True=0.24
4	3	0.02	30	2			

مثال (7 -14)

إذا أخترنا ورقتين من أوراق اللعب، ماهو إحتمال أن يكون لونهما أسود؟ علما أن عدد أوراق اللعب الكلية هي 52 ورقة منها 26 ورقة سوداء.

ندخل الأرقام من 1 إلى 52 في العمود B وهذه تمثل عدد أوراق اللعب سوف نعتبر الأرقام من 27 وحتى 52 الأوراق السوداء. ندخل إحتمال ظهور أي ورقة (1/52 =) في الخلية C2 ثم ننسخها لبقية المجال. من القائمة الرئيسة نختار Tools ثم Data Analysis ثم Random Numbers Generation وندخل البيانات كالتالي:



هذا يعطي 10000 سحبة (معاينة) للورقة الأولى. نكرر ماسبق لسحب 10000 عينة للورقة الثانية في العمود E. لكي نحدد عدد المشاهدات التي تعطي ورقتين سوداء في السحبتين ندخل في الخلية F2 الأمر

=IF(AND(D2>26,E2>26),1,0)

هذا سيعطي 1 إذا كانت كل من السحبتين ورقة سوداء و 0 غير ذلك. تنسخ الخلية F2 حتى نهاية المجال. الأمر

=COUNTIF(F:F,1)

يعطي عدد الخلايا التي تحوي 1 وهو عدد المرات التي تظهر فيها ورقتين سوداء في السحبتين، بقسمة هذا العدد على حجم العينة (10000) نحصل على تقدير للإحتمال المطلوب:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Face	Prob	1st draw	2nd draw	2 Black			
2		1	0.019231	35	31	1	# 2 Blacks	2494	
3		2	0.019231	1	26	0	P(2 Black)	0.2494	True=0.245
4		3	0.019231	29	13	0			
5		4	0.019231	11	48	0			

ملاحظة:

لاحظ أن القيمة المقدرة هي 0.2495 وهي دقيقة نوعا ما مقارنة بالقيمة النظرية 0.245 . ولكن كما يجب دائما في المحاكاة تعتبر هذة مشاهدة واحدة ويجب تكرارها للحصول على عينة من المقدرات لاتقل عن 30 مشاهدة وأخذ متوسطها لكي نحصل على مقدر جيد.

مثال (7 – 20)

صندوق يحتوي على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء أخذت عينة مكونة من كرتين واحدة بعد الأخرى أوجد احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض .

أ) إن كان السحب بدون إرجاع .

ب) إن كان السحب بإرجاع .

أ) اولا السحب بدون إرجاع:

نعاين في السحبة الأولى من الكرات جميعها ثم نعاين في السحبة الثانية من الكرات التي سحبت في العينة الأولى والتي يتحقق فيها شرط أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء كالتالي:

في D2 أدخل الأمر

=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)

والذي يعاين الكرات بإحتمال 10/30 للكرة الحمراء و 20/30 للكرة البيضاء ثم تنسخ لبقية المجال. في E2 أدخل الأمر

=IF(D2=$B$3,VLOOKUP(RAND(),CDF,2),"")

والذي يعاين من الكرات فقط إذا كانت الكرة الأولى بيضاء. الأمر في F2 التالي:

=IF(AND(D2=$B$3,E2=$B$3),1,0)

يحسب عدد نقاط العينة الثانية التي تكون بيضاء معطى أن الكرة المسحوبة أولا بيضاء. الأمر في G2

=COUNTIF(F:F,"=1")

يحسب عدد نقاط العينة التي تحقق شرط أن الكرة الثانية بيضاء معطى ان الكرة الأولى بيضاء.

نلاحظ في الشكل التالي أن تقدير الإحتمال المطلوب يساوي 0.4369 والإحتمال النظري 0.43678 كما نلاحظ أن الخطأ في هذا الإجراء يساوي 0.00012- .

كما ذكرنا سابقا في المحاكاة تعتبر هذة مشاهدة واحدة ويجب تكرارها للحصول على عينة من المقدرات لاتقل عن 30 مشاهدة وأخذ متوسطها لكي نحصل على مقدر جيد.

الشكل التالي يعطي نتائج المحاكاة:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	CDF	Ball	Sample #	1st Draw	2nd Draw	All W	How many	Prob
2	0	R	1	R		0	4369	0.4369
3	0.333333	W	2	W	W	1	Sample Size	True=
4			3	W	W	1	10000	0.436782
5			4	R		0		error=
6			5	R		0		-0.00012
7			6	W	W	1		
8			7	W	W	1		
9			8	W	R	0		
10			9	W	W	1		
11			10	W	R	0		
12			11	R		0		
13			12	R		0		
14			13	W	W	1		
15			14	W	W	1		
16			15	W	W	1		
17			16	W	W	1		
18			17	W	W	1		
19			18	W	W	1		
20			19	W	W	1		
21			20	W	R	0		
22			21	W	W	1		
23			22	W	R	0		

يترك للطالب إجراء محاكاة في حالة السحب بإرجاع كتمرين (أسهل بكثير من الحالة السابقة).

مثال (7 – 21)

يحل بنفس طريقة المثال السابق ويترك كتمرين للطالب.

مثال (7 – 22)

صندوق يحتوي على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء. سحبت عينة من 4 كرات بطريقة عشوائية. ماهو إحتمال الحصول على 3 كرات حمراء و 1 بيضاء.

في صفحة من إكسل أدخل الأمر

=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)

D2:G2 ثم أنسخها لبقية المجال حسب حجم العينة. هذا يحاكي 4 سحبات.

الأمر

=CONCATENATE(D2,E2,F2,G2)

يجعل النصوص في الخلايا من D2:G2 نص واحد.

الأمر

=IF(H2="RRRW",1,IF(H2="RRWR",1,IF(H2="RWRR",1,IF(H2="WRRR",1,0))))

يعطي السحبات التي تتكون من 3 كرات حمراء و 1 بيضاء الرقم 1 وبقية السحبات 0 وبهذا يكون عدد الخلايا التي تحوي 1 هو عدد أفراد العينة التي تحقق الشرط المطلوب ونوجد الإحتمال المطلوب بقسمة هذا العدد على حجم العينة فينتج التالي:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	CDF	Ball	Sample	1st Draw	2nd Draw	3rd Draw	4th Draw	Draw	In A?	# in A	2652
2	0	R	1	R	W	W	W	RWWW	0	P(A) =	0.096771
3	0.333333	W	2	W	W	R	W	WWRW	0	True =	0.0876
4			3	R	W	W	W	RWWW	0	error =	-0.00917
5			4	W	R	R	W	WRRW	0		
6			5	W	W	W	W	WWWW	0		
7			6	R	R	W	W	RRWW	0		
8			7	W	W	W	W	WWWW	0		
9			8	R	R	W	W	RRWW	0		
10			9	W	W	W	W	WWWW	0		
11			10	W	W	W	R	WWWR	0		
12			11	W	W	W	R	WWWR	0		
13			12	R	R	R	W	RRRW	1		

مثال (7 – 23)

مصنع به ثلاثة ماكينات I, II, III وكانت الماكينة I تنتج 20 % من الإنتاج ، والماكينة II تنتج 30 % من الإنتاج ، والماكينة III تنتج 50 % من الإنتاج ، وكانت نسبة الإنتاج المعيب للماكينات الثلاث على التريب هو 4 % و 3 % و 2 % .

فإذا اختيرت وحدة من الإنتاج بشكل عشوائي ، أحسب الاحتمالات التالية :

i) ما هو احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من الإنتاج معيبة ؟

ii) إذا كانت الوحدة المسحوبة معيبة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الماكينة II .

في صفحة من إكسل أدخل التالي:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	CDF	Machine	CDFI	TypeI	CDFII	TypeII	CDFIII	TypeIII
2	0	I	0	DI	0	DII	0	DIII
3	0.2	II	0.02	GI	0.03	GII	0.04	GIII
4	0.5	III						

في العمود I أدخل أرقام متسلسلة من 1 وحتى حجم العينة المطلوب. أدخل الأمر التالي في J2

=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)

وهذا يحاكي أي من المكائن الثلاثة تسحب منها العينة. الأمر في K2 التالي

=IF(J2="I",VLOOKUP(RAND(),CDFI,2),IF(J2="II",VLOOKUP(RAND(),CDFII,2),VLOOKUP(RAND(),CDFIII,2)))

يحدد نوع وحدة الإنتاج المسحوبة من أحد الماكنات الثلاثة. الأمر في L2

=IF(K2="DI",1,IF(K2="DII",1,IF(K2="DIII",1,0)))

يحدد الإنتاج المعيب. والأمر في M2

=IF(K2="DII",1,0)

يحدد الوحدة المعيبة من الماكنة الثانية من كل الوحدات المعيبة. باقي الخلايا كالمعتاد تعطي الإحتمالات المقدرة والأخطاء.

I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
Sample	WHICH M	Draw	Is D?	Is DII ?	# D	# DII				
1	III	GIII	0	0	310	84				
2	I	GI	0	0						
3	III	GIII	0	0	P(D)=	0.031	True=	0.033	ERROR=	0.002
4	III	GIII	0	0	P(DII)=	0.270968	True=	0.273	ERROR=	0.002032
5	I	GI	0	0						

مثال (7 – 24)

صندوقان الأول به 4 كرات بيضاء ، 6 كرات سوداء والصندوق الثاني به 8 كرات بيضاء ، 3 كرات سوداء . اختير أحد الصناديق عشوائياً واختيرت منه كرة بطريقة عشوائية أوجد :

i) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة لونها أسود .

ii) إذا اختيرت كرة ووجد أنها سوداء ما هو احتمال أن تكون من الصندوق الأول .

أدخل التالي في صفحة من إكسل:

	A	B	C	D	E	F
1	CDF	Box	CDFB1	Ball B1	CDFB2	Ball B2
2	0	Box 1	0	W1	0	W2
3	0.5	Box 2	0.4	B1	0.7273	B2

	H	I
1	Which Box	Which Ball
2	=VLOOKUP(RAND(),CDF,2)	=IF(H2="Box 1",VLOOKUP(RAND(),CDFB1,2),VLOOKUP(RAND(),CDFB2,2))

J	K
Black?	B1?
=IF(OR(I2="B1",I2="B2"),1,0)	=IF(I2="B1",1,0)

L	M	N	O
# Black	=COUNTIF(J:J,1)		
P(Black)=	=M1/MAX(G:G)	True =	0.436
#B1	=COUNTIF(K:K,1)		
P(B1|B)=	=M3/M1	True =	0.688
		ERROR1=	=O2-M2
		ERROR2=	=O4-M4

	A	B	C	D	E	F
1	CDF	Box	CDFB1	Ball B1	CDFB2	Ball B2
2	0	Box 1	0	W1	0	W2
3	0.5	Box 2	0.4	B1	0.7273	B2

النتائج:

G	H	I	J	K	L	M	N	O
Sample	Which Box	Which Ball	Black?	B1?	# Black	4320		
1	Box 1	B1	1	1	P(Black)=	0.432	True =	0.436
2	Box 2	B2	1	0	#B1	2970		
3	Box 1	B1	1	1	P(B1|B)=	0.6875	True =	0.688
4	Box 1	W1	0	0			ERROR1=	0.004
5	Box 2	B2	1	0			ERROR2=	0.0005

(7 – 12) تمـــــارين

(1) أكتب عناصر فضاء العينات التالية :

i) $S = \{ x : 7$ مقسوماً على x عدد صحيح بين 40 ، 1 $\}$

ii) $S = \{ x : x^2 + x - 12 = 0 \}$

iii) مجموعة النتائج الممكنة عند قذف حجر نرد وقطعة نقود على الترتيب .

iv) مجموعة النتائج الممكنة عند قذف حجري نرد مرة واحدة .

(2) الحادثتان $A,\ B$ معرفتان على فضاء العينة لتجربة عشوائية عبّر بكلمات واضحة للحوادث التالية :

$$A^c, B^c, A \cup B, A\ B, A^cB, AB^c, A^c\ B^c,\ A^c \cup B^c, (A \cup B)^c, (A\ B)^c$$

(3) الحوادث A, B, C معرفة على فضاء عينة لتجربة عشوائية . عبّر عن الحوادث التالية باستخدام الرموز :

i) حدوث A مع عدم حدوث B مع عدم حدوث C .

ii) حدوث A, B مع عدم حدوث C .

iii) حدوث الحوادث الثلاث معاً .

iv) حدوث حادثة واحدة على الأقل .

v) حدوث حادثة واحدة فقط .

vi) عدم حدوث أي حادثة .

(4) رمي حجر نرد مرة واحدة :

i) أكتب فضاء العينة .

ii) أكتب الحادثة A الدالة على ظهور رقم أكبر من 3 .

iii) أكتب الحادثة B الدالة على ظهور رقم زوجي .

(5) قذفت قطعتان نقديتان متزنتان معاً :

i) أكتب فضاء العينة .

ii) أكتب الحوادث التالية :

A : الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة فقط .

B : الحادثة الدالة على ظهور صورة على الأقل .

C : الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية .

(6) رمي حجري نرد مرة واحدة

i) أكتب فضاء العينة .

ii) أكتب الحوادث التالية :

A : الحادثة الدالة على ظهور رقمين متساويين .

B : الحادثة الدالة على ظهور رقمين مجموعهما أكبر من 7 .

C : الحادثة الدالة على ظهور رقم 4 على الحجر الثاني .

iii) أكتب الحوادث التالية :

$$A \cup B \; , A \; B \; , A \; C \; , A \cup B$$

(7) استخدم رسوم فن لإثبات العلاقات التالية :

(I $\quad A \cup (A \; B) = A$

(Ii $\quad (A \; B) \cup (A \; \overline{B}) = A$

(Iii $\quad \overline{A \; B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(Iv $\quad A \cup B = (A \; B) \cup (A \; \overline{B}) \cup (\overline{A} \; B)$

(v $\quad A \; (B \cup C) = (A \; B) \cup (A \; C)$

(8) إذا كان الحادثتان A, B بحيث :

$$P(\overline{B}) = \frac{5}{8}, \; P(A \cup B) = \frac{3}{4}, \; P(A) = \frac{1}{2}$$

i) أحسب قيمة كل من :

$$P(AB), P(\overline{A} \cap \overline{B}), P(\overline{A} \cup \overline{B}), P(B\overline{A}), P(\overline{B}A), P(A \mid B), P(B \mid \overline{A})$$

ii) هل A, B مستقلتان ؟ أذكر السبب .

(9) إذ كان $\quad P(A) = 0.2 \; , P(A \cup B) = 0.7$

أ - أوجد $P(B)$ في كل حالة من الحالات التالية :

I) A, B حادثتان مستقلتان .

ii) A, B حادثتان متنافيتان .

iii) الحادثة A حادثة جزئية من الحادثة B .

ب - إذا كان :

$$P(C)=\frac{1}{3},\ P(D|C)=\frac{1}{2},\ P(C\cup D)=\frac{4}{5}$$

هل C, D مستقلتان ؟ أذكر السبب .

(10) أ - بين الخطأ والصواب في كل مما يلي مع التعليل :

i) احتمال أن ينجح خالد في مقرر 101 إحص هو 0.7 واحتمال أن لا ينجح في هذا المقرر هو 0.2 .

ii) A, B حادثتان بحيث إن :

$$P(A) = 0.3\ ,\ P(B) = 0.4,\ P(A\cap B) = 0.8$$

ب - A, B حادثتان بحيث إن :

$$P(B)=\frac{2}{3},\ P(A\cap B)=\frac{1}{2},\ P(A\cap B^{c})=\frac{1}{4}$$

أحسب كلاً من :

$$P(A)\ ,\ P(A\cap B)^{c}\ ,\ P(A^{c}\cap B^{c})$$

(11) مصنع لإنتاج مصابيح كهربائية سحبت منه عينة مكونة من ثلاث مصابيح واحد بعد الآخر ، فإذا رمزنا للمصباح المعيب بالرمز D وللمصباح السليم بالرمز G ، أكتب فضاء العينة وكذلك الحوادث التالية :

$A =$ { العينة كلها معيبة }

$B =$ { واحد على الأقل معيب }

$C =$ { واحد على الأكثر معيب }

ثم أحسب :

$$A\cap B\ ,\ B\cup C\ ,\ \overline{B}\cap C$$

(12) صندوق به 15 قطعة من قطع غيار لنوع معيّن من الماكينات يحتوي على 10 قطع جيدة (G) و 5 قطع معيبة (D) . فإذا سحبنا عشوائياً ثلاث قطع من الصندوق فما احتمال :

أ - أن تكون جميعها قطعاً جيدة .

ب ـ أن تكون جميعها معيبة .

جـ ـ أن تكون قطعتان جيدتين .

د ـ أن تكون على الأقل قطعتان جيدتين .

(13) وعاء به 4 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء . سحبت كرة من الوعاء وأضيفت كرة من اللون المخالف للكرة المسحوبة ثم سحبت بعد ذلك كرة ثانية من الوعاء .

i) أوجد احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء .

ii) إذا كانت الكرتان المسحوبتان من اللون نفسه فما هو احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض .

(14) إذا علم أن احتمال أن يكون الجو ملبداً بالغيوم هو 0.3 واحتمال أن يكون الجو إما ملبداً بالغيوم أو عاصفاً هو 0.58 . أوجد الاحتمالات التالية إذا كان احتمال أن الجو عاصف هو 0.4 .

أ ـ أن يكون الجو ملبداً بالغيوم وعاصفاً .

ب ـ أن يكون الجو ملبداً بالغيوم وغير عاصف .

جـ ـ أن يكون الجو غير ملبد بالغيوم وغير عاصف .

(15) إذا علمت أن :

$$P(G) = 0.46 \ , \ P(H) = 0.53 \ , \ P(GH) = 0.21$$

أوجد :

$$P(\overline{G}) \ , \ P(\overline{H}) \ , \ P(G \cup H) \ , \ P(\overline{G} \cap H) \ , \ P(\overline{G} \cap \overline{H})$$

(16) يحتوي صندوق على 12 علبة من الحليب المجفف 5 منها من الحجم الصغير و 4 منها من الحجم المتوسط و 3 منها من الحجم الكبير ، واحدة من كل نوع خالية من الدسم والباقي كامل الدسم ، اخترنا من الصندوق بصورة عشوائية ولنرمز بـ A لحادثة الحصول على علبة صغيرة و B لحادثة الحصول على علبة متوسطة و C لحادثة الحصول على علبة خالية من الدسم . المطلوب :

أ ـ حساب الاحتمالات التالية :

$$P(A \cup B) \ , \ P(C) \ , \ P(C|A)$$

ب ـ هل الحادثتان A, C مستقلتان ؟ ولماذا ؟

(17) يحتوي صندوق على 9 قطع نقود من الأنواع ذات التواريخ المبينة في الجدول التالي :

ربع ريال	1376	1378	1400	1402
نصف ريال	1376	1400	1402	
ريال	1400	1403		

سحبنا قطعة بصورة عشوائية . لتكن A حادثة سحب ربع ريال ، B حادثة سحب نصف ريال ، C حادثة سحب قطعة نقود تحمل التاريخ 1400 والمطلوب حساب :

أ - $P(C)$, $P(C|A)$.

ب - $P(C|B^c)$.

جـ - هل (A, C) مستقلتان ؟ علل إجابتك .

د - هل (C, B) مستقلتان ؟ علل إجابتك .

(18) صندوقان في الأول ، 4 كرات بيضاء و 6 كرات خضراء والثاني به 4 كرات بيضاء وكرة واحدة خضراء ، أجب على الأسئلة التالية :

أ - سحبت كرة عشوائياً من الصندوق الأول ما هو احتمال أن تكون الخضراء .

ب - اختيرت عينة عشوائية من كرتين بدون إرجاع من الصندوق الأول ، ما هو احتمال أن تكون من لونين مختلفين .

جـ - سحبنا عشوائياً كرة من كل من الصندوق فما هو احتمال أن تكونا من اللون نفسه .

(19) بعد إجراء بعض الفحوصات الطبية على شخص وجد أن فشل الكلية اليسرى مستقل عن فشل الكلية اليمنى وكان احتمال فشل الكلية اليسرى 0.15 واحتمال فشل إحدى الكليتين على الأقل يساوي 0.2 .

أ - أوجد احتمال فشل الكلية اليسرى علماً بأن الكلية اليمنى قد فشلت .

ب - أوجد احتمال عدم فشل الكلية اليمنى علماً بأن الكلية اليسرى لم تفشل .

(20) إذا كان لدينا حادثتان A, B بحيث كان :

$$P(A) = t \ , \ P(A \cup B) = \frac{1}{2} \ , \ P(B) = \frac{1}{3}$$

أوجد ما يأتي :

أ ـ قيمة t إذا كانت A, B متنافيتين .

ب ـ قيمة t إذا كانت A, B مستقلتين .

(21) إذا كان احتمال أن يصيب محمد هدفاً هو $\frac{1}{3}$ واحتمال أن يصيب أحمد الهدف نفسه هو $\frac{1}{5}$. أوجد احتمال أن يصيب واحد منهما على الأقل الهدف .

(22) صنعت قطعة نقود بحيث إن احتمال ظهور الصورة $P(H)=\frac{1}{3}$ واحتمال ظهور الكتابة $P(T)=\frac{2}{3}$. ألقيت هذه القطعة مرة واحدة ثم نختار عدداً عشوائياً من 1 إلى 11 إذا ظهرت صورة أما إذا ظهرت كتابة نختار بطريقة عشوائية عدداً من 1 إلى 7 . ما هو احتمال أن يكون العدد المختار فردياً .

(23) أثبت أن دالة الاحتمال الشرطي $P(.|A)$ تحقق المسلمات الثلاثة لدالة الاحتمال .

(24) وجد أن 0.4 من المراجعين في عيادة ما يشكون من ارتفاع في ضغط الدم وأن 0.2 من المراجعين مصابون بمرض الكبد وأن 0.1 يشكون من المرضين معاً أوجد :

أ ـ احتمال أن أحد المراجعين يشكو من أحد المرضين على الأقل .

ب ـ هل ارتفاع ضغط الدم ومرض الكبد مستقلان ؟

(25) سحبت كرتان من صندوق به 15 كرة بيضاء ، 8 كرات سوداء ، سحبت عينة مكونة من كرتين واحدة بعد الأخرى بدون إرجاع ، أوجد الاحتمالات التالية :

أ ـ الكرتان من اللون نفسه .

ب ـ الكرتان لونهما أبيض .

جـ ـ الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء .

د ـ أوجد الاحتمالات السابقة إذا كان السحب بإرجاع .

(26) تُرسل الإشارات اللاسلكية على شكل " نقاط " و " خطوط " حيث إن عدد النقاط = $\frac{3}{4}$ عدد الخطوط . وبسبب الأخطاء فإن النقطة تصبح خطاً باحتمال = $\frac{2}{3}$ والخط يصبح نقطة باحتمال = $\frac{1}{4}$.

أ ـ ما احتمال استلام إشارة " نقطة " ؟

ب ـ إذا استملت إشارة " نقطة " فما احتمال أنها أرسلت " نقطة " .

(27) أعلنت إحدى الدوائر الحكومية عن حاجتها إلى عدد من الموظفين وبعد تصنيف مائة متقدم لهذه الوظيفة وفقاً للمؤهل ولسنوات الخبرة حصلنا على الجدول التالي :

المؤهل / الخبرة	يحمل شهادة جامعية	لا يحمل شهادة جامعية
ليس لديه خبرة	20	40
لديه خبرة	10	30

أ ـ اخترنا شخصاً بصورة عشوائية :

i) ما هو احتمال أن يكون ممن يحملون شهادة جامعية ؟

ii) إذا علمت أن الشخص الذي اخترناه لم يكن لديه خبرة فما هو احتمال أن يكون من غير حملة الشهادة الجامعية .

ب ـ إذا اخترنا عشوائياً شخصين على الترتيب ، فما هو احتمال أن يكون الشخص الثاني ممن يحملون شهادة جامعية .

(28) ثلاث ضاربي آلة كاتبة $A,\ B,\ C$ يقومون بطباعة جميع الأوراق الخاصة بإحدى الشركات . الجدول التالي يبيّن النسب المئوية للأوراق التي يطبعها كل منهم والنسب المئوية للأخطاء التي يرتكبها كل منهم في عمله الخاص به .

النسبة المئوية / الناسخون	النسبة المئوية للمطبوعات	النسبة المئوية للأخطاء
A	40 %	3 %
B	25 %	5 %
C	35 %	8 %

سحبنا ورقة بشكل عشوائي من مطبوعات الشركة :

أ ـ أوجد احتمال أن يوجد بها خطأ مطبعي .

ب ـ إذا علمت أن إحدى الأوراق المسحوبة تحوي خطأ طباعياً فما احتمال أن B طبعها .

(29) أربع طرق تؤدي إلى بئر ماء . اختار شخص أحد هذه الطرق عشوائياً . فإذا اختار الطريق الأول A فإن احتمال وصوله إلى البئر يساوي $\frac{1}{8}$ وإذا اختار الطريق الثاني B فإن احتمال وصوله يساوي $\frac{1}{6}$. أما إذا اختار الطريق الثالث C إن احتمال وصوله يساوي $\frac{1}{4}$ وأخيراً الطريق الرابع D فإن احتمال وصوله يساوي $\frac{9}{10}$.

والمطلوب :

أ ـ احتمال أن يصل الشخص إلى بئر الماء ؟

ب ـ إذا نجح الشخص في الوصول إلى البئر . ما هو احتمال أن يكون قد اختار :

i) الطريق D .

ii) الطريق A .

(30) ثلاث قطع نقود ، الأولى متزنة والثانية والثالثة غير متزنة . وإذا قذفنا الأولى فإن احتمال الحصول على صورة يساوي 0.5 ، وإذا قذفنا الثانية فإن احتمال الحصول على صورة يساوي 0.75 . اخترنا إحدى القطع الثلاث عشوائياً وقذفناها والمطلوب ما يلي :

أ ـ أوجد احتمال الحصول على صورة .

ب ـ إذا علمت أن نتيجة القذفة كانت كتابة فما هو احتمال أن القطعة المقذوفة هي القطعة المتزنة .

(31) تنوي أسرة قضاء إجازة نهاية الأسبوع في الأماكن السياحية A أو B أو C . إذا كان احتمال سقوط المطر في A هو 0.6 وفي B هو 0.7 وفي C هو 0.5 وإذا اختارت الأسرة مكان الإجازة عشوائياً فأحسب :

أ ـ احتمال أن تقضي الأسرة إجازة ممطرة .

ب ـ إذا علمت أن الأسرة قضت إجازة ممطرة فما هو احتمال أن إجازتها كانت في المكان B ؟

(32) في إحدى مباني إسكان الجامعة يوجد 150 طالب منهم 111 يجيدون اللغة الإنجليزية ، 50 يجيدون اللغة الفرنسية ، 30 لا يجيدون أي لغة . اختير طالب عشوائياً أوجد احتمال :

أ - أن يجيد اللغة الإنجليزية واللغة الفرنسية .

ب - أن يجيد اللغة الفرنسية علماً بأنه لا يجيد اللغة الإنجليزية .

جـ - أن يجيد لغة واحدة على الأقل .

د - أن يجيد لغة واحدة فقط من الإنجليزية أو الفرنسية .

(33) إذا كان نظام الدراسة في الدورة المكثفة للغة الإنجليزية يقضي أن النتيجة إما راسب أو ناجح . نرمز للنجاح بالرمز s وللرسوب بالرمز f . اخترنا 3 طلاب منهم :

أ - عين فضاء العينة لنتائجهم . ثم عين نقاط الحوادث التالية :

$A =$ { أن ينجح اثنان منهم فقط }

$B =$ { ينجح واحد منهم على الأقل }

$C =$ { ألا ينجح أي منهم }

ب - إذا علمنا أن فرصة نجاح الطالب مثل فرصة رسوبه عين احتمالات الحوادث A, B, C .

جـ - أحسب احتمالات حدوث A علماً بأن B قد وقعت . هل B, A مستقلتان . أذكر السبب .

(34) ضع إشارة (√) إذا كان الجواب صحيحاً أو إشارة (x) إذا كان الجواب خطأ :

أ - احتمال أن ينجح طالب في مقرر الإحصاء هو 0.9 واحتمال أن لا ينجح في هذا المقرر 0.15 . ☐

ب - إذا كانت الحادثتان B, A معرفتين بحيث :

$$P(A) = 0.3,\ P(B) = 0.4,\ P(A \cup B) = 0.2$$

فإن :

(i) $P(A \cup B) = 0.7$ ☐

(ii) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.5$ ☐

(iii) $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0.65$ ☐

(iv) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.8$ ☐

جـ - إذا كانت الحادثتان A, B مستقلتين فإن :

☐ $P(A \cup B) = P(A) + P(B).P(\overline{A})$

(35) أكمل كلاً من الرفاغات التالية :

أ - الحادثة هي ....

ب - إذا كان $P(A \cup B) = 0.85$ فإن .... $= P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

جـ - إذا كان $P(A) = 0.3$ و $P(AB) = 0.2$ فإن .... $= P(A\overline{B})$.

د - إذا سحبنا مع الإعادة كرتين من صندوق يتضمن خمس كرات بيضاء وخمس كرات حمراء فإن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من اللون الأبيض هو ....

هـ - الشرط اللازم والكافي لاستقلال الحادثتين A, B هو ....

و - الشرط اللازم والكافي لتنافي الحادثتين A, B هو ....