الفصل الرابع

مقاييس التشتت

Measures of Dispersion

(4 – 1) مقدمـــــة

لقد سبق لنا دراسة طرق عرض البيانات جدولياً وبيانياً والتعرف على أشكالها وتوزيعاتها الإحصائية المختلفة وكذلك دراسة مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) وذلك لوصف البيانات عددياً لهذه التوزيعات الإحصائية المختلفة . ولكن طرق عرض البيانات وحساب المتوسطات للمجموعات المختلفة من البيانات غير كافٍ للمقارنة بين هذه المجموعات ، ولتوضيح ذلك نأتي بمثال لدراسة درجات ثلاث مجموعات مختلفة من الطلاب Z وY وX والتي كانت درجاتهم كالآتي :

X : 59, 61, 62, 58, 60

Y : 50, 60, 66, 54, 70

Z : 19, 65, 46, 78, 72

بحساب المتوسط الحسابي للمجموعات الثلاث نجده يساوي 60 درجة لكل منها . ولكن عند النظر إلى درجات المجموعة الأولى نجدها متقاربة ، ودرجات المجموعة الثانية أقل تقارباً من المجموعة الأولى ، والمجموعة الثالثة أقل تقارباً من المجموعة الثانية . أي أن المجموعات الثلاث مختلفة التجانس على الرغم من أن المتوسط الحسابي لكل منها هو نفسه . وبذلك تكون مقاييس النزعة المركزية غير كافية للمقارنة بين طبيعة البيانات الإحصائية . لذلك نشأت الحاجة إلى إيجاد مقاييس تقيس درجة تجانس (تقارب) أو تشتت (تباعد) مفردات البيانات بعضها عن بعض وهذه المقاييس هي ما تسمى بمقاييس التشتت . وهي كثيرة وسوف نعرض منها : المدى ، نصف المدى الربيعي ، الانحراف المتوسط ، التباين والانحراف المعياري ، ومعامل الاختلاف (التغيير) ومقاييس الالتواء والتفلطح ، وسوف نتناول كلاً منها بالشرح والتفصيل والأمثلة كلاً على حده .

(4 – 2) المـــدى Range

يعـرف **المـــــدى** بأنــه الفـرق بـين أكبـر مشـاهدة وأصـغر مشـاهدة فـي مجموعـة مـن المشـاهدات . أي أن (المـدى = أكبـر مشـاهدة – أصـغر مشـاهدة) ، وذلـك فـي حالـة البيانـات المباشرة . أما في حالة البيانات المبوبة فإن المدى يعرف بـأكثر مـن طريقـة نـذكر منهـا فيمـا يلـي طريقتين :

i) المـــدى : الفرق بين مركزي الفئة العليا والفئة الدنيا .

ii) المـــدى : الحد الأعلى للفئة العليا مطروحاً منه الحد الأدنى للفئة الدنيا

ونوضح ذلك بالأمثلة في حالة البيانات المباشرة والمبوبة كما يلي :

مثال (4 – 1)

أحسب المدى (R) لدرجات الطلاب الآتية :

82, 40, 62, 70, 30, 80

الحـــل

أكبر قراءة = 82 درجة ، أصغر قراءة = 30 درجة .

$R = 82 - 30 = 52$ (درجـة)

مثال (4 – 2)

أوجد المدى (R) لدرجات مجموعة من الطلاب معطاة بالجدول الآتي :

90-99	80-89	70-79	60-69	50-59	40-49	الفئات
1	2	11	15	9	2	التكرار

الحـــل

يمكن إيجاد المدى بطريقتين :

الطريقة الأولى :

مركز الفئة العليا = 94.5 و مركز الفئة الدنيا = 44.5

$R = 94.5 – 44.5 = 50$ درجة

الطريقة الثانية :

الحد الأعلى للفئة العليا (الحقيقي) = 99.9

الحد الأدنى للفئة الدنيا (الحقيقي) = 39.5

$R = 99.5 - 39.5 = 60$ درجة

ونلاحظ اختلاف كل من الطرفين في حساب قيمة المدى وتستخدم الطريقة الأولى غالباً في إيجاد المدى .

(4 – 2 – 1) بعض مميزات المدى

1) سهل الحساب جداً .

2) يعطي فكرة سريعة عن طبيعة البيانات ويستخدم كثيراً في مراقبة جودة الإنتاج وكذلك في وصف الأحوال الجوية .

(4 – 2 – 2) بعض عيوب المدى

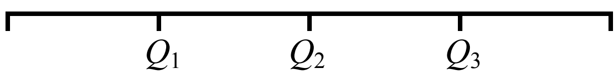
1) يعتمد في حسابه على قيمتين فقط من البيانات مع إهمال باقي البيانات .

2) يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة (انظر ملحق 3) لذلك فهو مقياس تقريبي لا يعتمد عليه .

(4 – 3) نصف المدى الربيعي Semi-interquartile Range

من أهم عيوب المدى أنه يتأثر كثيراً بالقيم الشاذة ومن ثم فهو لا يعطي صورة صادقة عن طبيعة البيانات ؛ لذلك دعت الحاجة إلى إيجاد مقياس آخر يتخلص من تأثير هذه القيم الشاذة وهذا المقياس هو ما **يسمى بنصف المدى الربيعي** ويعرف كما يلي :

إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات عددها n قراءة فإن القراءات ترتب ترتيباً تصاعدياً وتقسم إلى أربعة أقسام متساوية كما هو موضح على الخط الأفقي التالي :



تسمى القيمة التي يسبقها ربع القراءات بالربيع الأدنى ويرمز لها بالرمز Q_1 ورتبته $\frac{n}{4}$

وتسمى القيمة التي يسبقها ثلاثة أرباع القراءات بالربيع الأعلى ويرمز له بالرمز Q_3 ورتبته

$\frac{3}{4}n$ كما يسمى المقدار الناتج من الفرق بين Q_3 و Q_1 بالمدى الربيعي وهو يمثل النصف الأوسط للقراءات ويؤخذ نصف هذا المدى مقياساً للتشتت ويسمى بنصف المدى الربيعي ويرمز له بالرمز Q ويعطى بالعلاقة :

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \qquad (1-4)$$

ويلاحظ أن Q_2 هو الربيع الثاني وهو القيمة التي يسبقها نصف البيانات ورتبته $\frac{n}{2}$ أي أن Q_2 هو الوسيط الذي سبق شرحه في مقاييس النزعة المركزية . وسوف نتناول شرح نصف المدى الربيعي Q في كل من البيانات المباشرة والبيانات المبوبة كالتالي :

(4 – 3 – 1) نصف المدى الربيعي للبيانات المباشرة

يحسب كالتالي :

1) نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً .

2) نوجد قيمة Q_1 وهي القيمة التي يسبقها ربع القراءات .

3) نوجد قيمة Q_3 وهي القيمة التي يسبقها ثلاثة أرباع القراءات .

وبتطبيق القانون : $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

يتم حساب نصف المدى الربيعي .

مثال (4 – 3)

أوجد نصف المدى الربيعي لأوزان مجموعة الطلاب التالية :

67, 65, 69, 58, 55, 71, 72, 70

الحـــل

نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً نحصل على :

$$55,58\overset{\uparrow}{,}65,67,69,70\overset{\uparrow}{,}71,72$$

$$Q_1 = \frac{58+65}{2} = 61.5 \quad ; \quad Q_3 = \frac{70+71}{2} = 70.5$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{70.5 - 61.5}{2} = 4.5$$

مثال (4 – 4)

أوجد نصف المدى الربيعي لأوزان مجموعة الطلاب التالية :

59, 67, 65, 69, 58, 55, 70, 72, 74

الحـــل

بترتيب البيانات تصاعدياً نحصل على :

$$50,\ 58,\ \boxed{59},\ 65,\ 67,\ 69,\ \boxed{70},\ 72,\ 74$$

$$Q_1 = 59 \quad , \quad Q_3 = 70$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{70 - 59}{2} = 5.5$$

(4 – 3 – 2) نصف المدى الربيعي للبيانات المبوبة

يحسب نصف المدى للبيانات المبوبة بطريقتين الأولى حسابية والثانية بيانية وسوف نستعرض كل طريقة على حدة كما يلي :

نصف المدى الربيعي بالطريقة الحسابية

يتم حساب نصف المدى الربيعي بنفس الطريقة التي سبق شرحها لحساب الوسيط وهو طريقة الفروق " لبيرسون " ويحسب الربيع الأدنى Q_1 بوضع $\frac{n}{4}$ بدلاً من $\frac{n}{2}$ في قانون الوسيط ويحسب الربيع الأعلى Q_3 بوضع $\frac{3n}{4}$ بدلاً من $\frac{n}{2}$ في قانون الوسيط وبعد ذلك نحسب نصف المدى الربيعي من العلاقة (4 – 1) ويوضح طريقة حساب Q_1, Q_3 بالعلاقتين الآتيتين أي أن :

$$Q_1 = A_1 + \frac{\frac{n}{4} - f_1}{f_2 - f_1} . \mathrm{L} \qquad (2-4)$$

$$Q_3 = A_2 + \frac{\frac{3n}{4} - f_1'}{f_2' - f_1'} . \mathrm{L} \qquad (3-4)$$

مثال (4 – 5)

أوجد نصف المدى الربيعي حسابياً لدرجات الطلاب في مثال (4- 2) .

الحـــل

نكوّن الجدول المتجمع الصاعد كما يلي :

	التكرار المتجمع الصاعد		حدود الفئات		
	0		أقل من	39.5	
f_1	2		أقل من	49.5	A_1
f_2	11		أقل من	59.5	
f_1'	26		أقل من	69.5	A_2
f_2'	37		أقل من	79.5	
	39		أقل من	89.5	
	40		أقل من	99.5	

$$n = 40,\ \ \frac{n}{4} = \frac{40}{4} = 10,\ \ \frac{3n}{4} = \frac{120}{4} = 30,\ \ L = 10$$

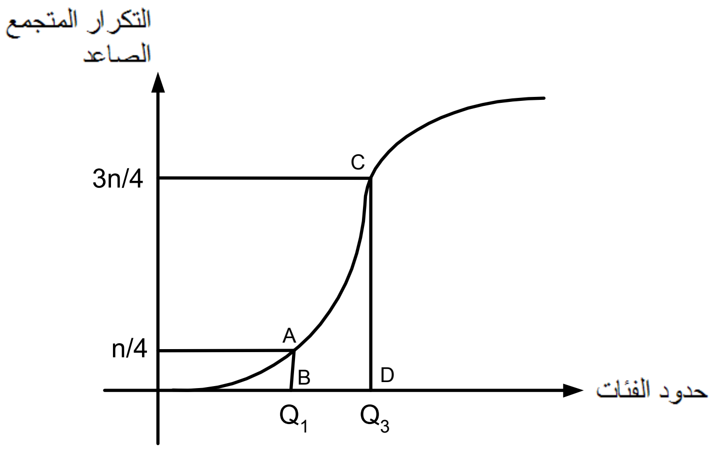
$$Q_1 = A_1 + \frac{\frac{n}{4} - f_1}{f_2 - f_1} . L = 49.5 + \frac{10-2}{11-2} \times 10 = 49.5 + 8.89 = 58.39$$

$$Q_3 = A_2 + \frac{\frac{3n}{4} - f_1'}{f_2' - f_1'} . L = 69.5 + \frac{30-26}{37-26} \times 10 = 69.5 + 3.64 = 73.14$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{73.14 - 58.39}{2} = 7.38$$

نصف المدى الربيعي بالطريقة البيانية

يُرسم المنحنى المتجمع الصاعد ثم يحدد على محور التكرارات المتجمعة الصاعدة $\frac{n}{4}$ ومنها يرسم خط يوازي محور الفئات حتى يقطع المنحنى المتجمع في نقطة A ومن A نسقط عموداً رأسياً يقابل محور الفئات في نقطة ولتكن B تكون القيمة عندها هي Q_1 ونحدد قيمة $\frac{3n}{4}$ على محور التكرارات المتجمعة الصاعدة ثم نرسم خطاً أفقياً يقطع المنحنى المتجمع الصاعد في نقطة C ومن C نسقط عموداً رأسياً يقطع محور الفئات في نقطة D يكون عندها قيمة Q_3 ونحسب نصف المدى الربيعي باستخدام العلاقة (4 – 1) ويوضح ذلك بالرسم ، شكل (4 – 1) التالي :



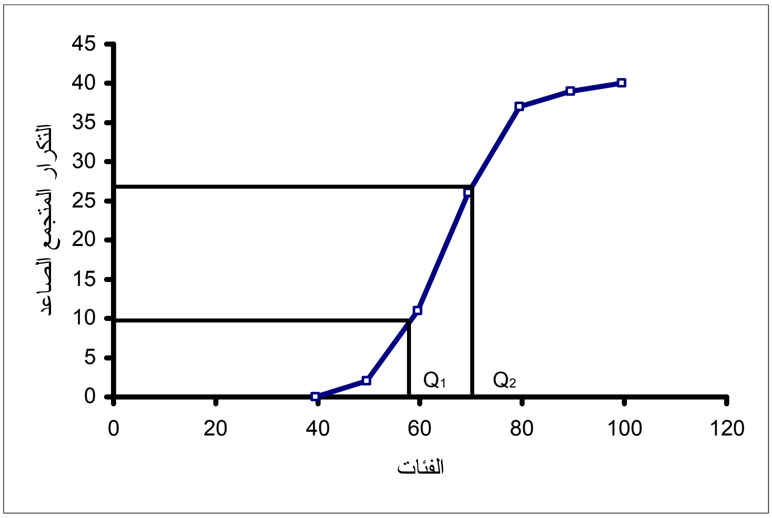
شكل (4 – 1) يوضح قيمة كل من Q_2 ، Q_1 بيانياً

مثال (4 – 6)

أوجد نصف المدى الربيعي لدرجات الطلاب في مثال (4 – 2) السابق .

الحـــل

باستخدام الجدول المتجمع الصاعد في مثال (4 – 5) نرسم منه المنحنى المتجمع الصاعد ومن الرسم نوجد قيمة Q_3 و Q_1 ونحسب من العلاقة (4 – 1) قيمة نصف المدى الربيعي Q كما في شكل (4 – 2) التالي :



شكل (4 – 2) يبين قيمة Q_3 , Q_1 لدرجات الطلاب بيانياً

تقريباً من الرسم : $Q_1 = 58$, $Q_3 = 70$

وعليه فإن :

$$Q = \frac{70 - 58}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{درجات}$$

(4 – 3 – 3) مميزات نصف المدى الربيعي

1) يتخلص من القيم المتطرفة الشاذة نحو الكبر أو الصغر (انظر ملحق 3).

2) يمكن حسابه من التوزيعات التكرارية المفتوحة من طرف واحد أو من الطرفين .

(4 – 3 – 4) عيوب نصف المدى الربيعي

1) لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار .

2) لا يسهل التعامل معه في التحليل الإحصائي .

(4 – 4) الانحراف المتوسط Mean Deviation

يعرف الانحراف المتوسط بأنه متوسط الانحرافات المطلقة للمشاهدات عن وسطها الحسابي $\bar{x}$ ويرمز له بالرمز $M.D.$ ويعرف رياضياً كالتالي :

$$M.D. = \frac{1}{n}\sum\left|x - \bar{x}\right| \qquad (4-4)$$

والسبب في اخذ القيم المطلقة للانحرافات هو أن مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً (برهن ذلك) . والتعريف السابق (4 – 4) يكون بالنسبة للبيانات المباشرة ولكن في حالة البيانات المبوبة يعطي الانحراف المتوسط بالعلاقة الآتية :

$$M.D. = \frac{\sum f\left|x - \bar{x}\right|}{n} \qquad (5-4)$$

ونوضح ذلك بالأمثلة التالية :

مثال (4 – 7)

أوجد الانحراف المتوسط لأعمار مجموعة الطلاب

6, 5, 7, 7, 8, 9, 9, 5

الحـــل

نكوّن جدول الحل التالي :

x	$x-\overline{x}$	$\lvert x-\overline{x}\rvert$
6	-1	1
5	-2	2
7	0	0
7	0	0
8	1	1
9	2	2
9	2	2
5	-2	2
56	0	0

$$\overline{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{56}{8}=6$$

وباستخدام العلاقة (4 – 4) نحصل على :

$$M.D.=\frac{10}{8}=1.25$$ ســـــنة

مثال (4 – 8)

أوجد الانحراف المتوسط لدرجات الطلاب في مثال (4 – 2) .

الحـــل

يكون جدول الحل كما يلي :

	الفئات	x	f	fx	$x-\overline{x}$	$\lvert x-\overline{x}\rvert$	$f\lvert x-\overline{x}\rvert$
	40-49	44.5	2	89	-21.25	21.25	42.5
	50-59	54.5	9	490.5	-11.25	11.25	101.25
	60-69	64.5	15	967.5	-1.25	1.25	18.75
	70-79	74.5	11	819.5	8.75	8.75	96.25
	80-89	84.5	2	169.0	18.75	18.75	37.5
	90-99	94.5	1	94.5	28.75	28.75	28.75
$\sum$			40	2630			325

$$\overline{x}=\frac{\sum fx}{n}=\frac{2630}{40}=65.75$$ درجـــــة

$$M.D.=\frac{\sum f\lvert x-\overline{x}\rvert}{n}=\frac{325}{40}=8.125$$ درجـــــة

ملاحظة :

أحياناً يعرّف الانحراف المتوسط باستخدام الوسيط بدلاً من الوسط الحسابي أو أي متوسطات أخرى غير الوسط الحسابي وهذا يجعله لايتأثر بالقيم المتطرفة (انظر ملحق 3).

(4 – 5) الانحراف المعياري Standard Deviation

من الصعب التعامل رياضياً (تحليلياً) مع الانحراف المتوسط ولذلك دعت الحاجة إلى استخدام مقياس للتشتت بقوة الانحراف المتوسط نفسها أو أكثر ولكي يكون من السهل التعامل معه تحليلياً وبما أن الفكرة هي التخلص من الإشارات للانحرافات فإن تربيع الانحراف يخلصنا من الإشارة ولهذا فإن الانحراف المعياري يعرّف عن طريق التباين والذي يعرّف بأنه متوسط مربع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز σ^2 ويقرأ (سجما تربيع) والجذر التربيعي للتباين ينتج عنه مقياس من أهم وأدق مقاييس التشتت وهو ما يسمى بالانحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ وسوف نتناول طرق حسابه في حالة البيانات المباشرة والبيانات المبوبة كما يلي :

(4 – 5 – 1) الانحراف المعياري للبيانات المباشرة

إذا كان لدينا مشاهدات من مجتمع إحصائي عدد أفراده N هي :

$$x_1, x_2, \ \ldots\ , x_N$$

ومتوسطات هذه القراءات $\bar{x}$ فإن مربعات انحرافات هذه القيم عن $\bar{x}$ هي :

$$(x_1-\bar{x})^2,\ (x_2-\bar{x})^2, \ldots,\ (x_N-\bar{x})^2$$

ويعرف التباين σ^2 كالتالي :

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2}{N}$$

أي :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(x-\bar{x})^2 \qquad (\ 6-4\ )$$

والانحراف المعياري هو :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(x-\bar{x})^2} \qquad (\ 7-4\ )$$

ويفضل عند حساب الانحراف المعياري σ أن يحسب التباين σ^2 من المعادلة (4 – 6) ويأخذ الجذر التربيعي للنتيجة النهائية لكي نحصل على σ وفي حالة العينة التي حجمها n المأخوذة من المجتمع فإن الانحراف المعياري في هذه الحالة يرمز له بالرمز s والتباين s^2 ويعرف بقسمة مجموع مربعات الانحراف على $(n\text{-}1)$ بدلاً من N كما في حالة σ^2 ويكتب كما يلي :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x - \bar{x})^2 \qquad (8-4)$$

وعليه فإن الانحراف المعياري s يكون :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x - \bar{x})^2} \qquad (9-4)$$

وذلك في حالة البيانات المباشرة. إن s يعطي تقديراً أفضل للانحراف المعياري σ للمجتمع الذي أخذت منه العينة . وإذا كان عدد مفردات العينة كبيراً (أكبر من 30) فإن قيمة σ^2, s^2 متساويتان تقريباً من الناحية العملية .

مثال (4 – 9)

أحسب الانحراف المعياري s لأعمار مجموعة من الطلاب في المرحلة الابتدائية التالية:

8, 9, 7, 6, 5 سـنة

	x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
	8	1	1
	9	2	4
	7	0	0
	6	-1	1
	5	-2	4
$\sum$	35		10

حيث :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7 \quad \text{سنوات}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x-\bar{x})^2 = \frac{10}{5-1} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$s = \sqrt{2.5} = 1.591 \quad \text{سنة}$$

ويمكن تبسيط العلاقة (8 – 4) السابقة كالتالي:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}\right] \qquad (10-4)$$

الاثبات :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x-\bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum x^2 - 2\bar{x}\sum x + n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum x^2 - n\bar{x}^2\right)$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}\right)$$

ويلاحظ أن العلاقة (4 – 10) تحتاج حساب كل من $\sum x^2$ ، $\sum x$ فقط .

مثال (4 – 10)

أحسب الانحراف المعياري لأعمار الطلاب في مثال (4 – 9) باستخدام العلاقة (4 – 10) .

الحــــل

نكوّن جدول الحل كما يلي :

x	x^2
8	64
9	81
7	49
6	36
5	25
35	225

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(255 - \frac{(35)^2}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(255-245\right) = \frac{10}{4} = 2.5$$
$$s = \sqrt{2.5} = 1.581$$

وهي النتيجة نفسها في مثال (4 – 9) السابق .

(4 – 5 – 2) بعض خصائص الانحراف المعياري

الخاصية الأولى :

إذا أضفنا أو طرحنا مقداراً ثابتاً c من جميع المشاهدات لمجموعة البيانات المعطاة فإن الانحراف المعياري للقيم الجديدة هو الانحراف المعياري للقيم الأصلية نفسه ويمكن إثبات ذلك كالتالي :

نفرض أن القيم الأصلية هي :

$$x_1, x_2, \dots , x_n$$

ونفرض أن القيم الجديدة هي :

$$d_1, d_2, \dots , d_n$$

حيث :

$$d_1 = x_1 \pm c, \ \ d_2 = x_2 \pm c, \ \dots , \ \ d_n = x_n \pm c$$

أي أن :

$$d = x \pm c$$

وحيث إن :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x-\overline{x}\right)^2$$

إذن :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left[\left(d \pm c\right)-\left(\overline{d} \pm c\right)\right]^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(d-\overline{d}\right)^2$$

أي أن :

$$s^2 = \frac{1}{n}\left[\sum \mathrm{d}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum d\right)^2\right] \qquad (11-4)$$

ويمكن أن تستخدم هذه الخاصية في تبسيط القراءات وخاصة عندما تكون قيمتها كبيرة كما يتضح ذلك في المثال التالي :

مثال (4 – 11)

استخدم الخاصية الأولى السابقة في حل مثال (4 – 9) باختيار الثابت c يساوي 5 .

الحـــل

نطرح المقدار الثابت $c = 5$ من كل القراءات كما هو موضح بالجدول الآتي :

x	$d = x - 5$	d^2
8	3	9
9	4	16
7	2	4
6	1	1
5	0	0
$\sum$	10	30

وبالتعويض في (4 – 11) نحصل على :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum d^2 - \frac{\left(\sum d\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{4}.\left(30 - \frac{(10)^2}{5}\right) = \frac{10}{4}$$

$$s^2 = 2.5, \qquad s = \sqrt{2.5} = 1.581$$

وهي النتيجة نفسها التي في (4 – 9) السابق .

الخاصية الثانية

إذا ضربنا جميع المشاهدات في مقدار ثابت أو قسمناها على مقدار ثابت فإن الانحراف المعياري يتأثر بذلك ، وسوف نثبت ذلك في حالة الضرب ويمكن إتباع الخطوات نفسها في حالة القسمة كما يلي :

نفرض أن القراءات هي : $x_1, x_2, \ldots, x_n$

فإذا ضربنا هذه القيم في مقدار ثابت c تكون القيم الجديدة :

$$d_1, d_2, \ldots, d_n$$

حيث :

$$d_1 = cx_1, \; d_2 = cx_2, \; \ldots, \; d_n = cx_n$$

وعليه فإن :

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x - \bar{x}\right)^2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{d}{c} - \frac{\bar{d}}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\frac{1}{n-1}\sum\left(d - \bar{d}\right)^2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{c^2}s_d^2 \;, \quad s_x = \frac{1}{c}s_d \qquad (12-4)$$

أي أن الانحراف المعياري للمشاهدات الأصلية في حالة الضرب يساوي الانحراف المعياري للمشاهدات الجديدة مقسوماً على المقدار الثابت كما هو موضح بالعلاقة (12 – 4) أما في حالة القسمة فإنه يمكن إثبات أن :

$$s_x = |c| s_d \qquad (13-4)$$

حيث $|c|$ القيمة المطلقة للثابت c (الموجبة) .

أي أن الانحراف المعياري للمشاهدات الأصلية يساوي الانحراف المعياري للمشاهدات الجديدة مضروباً في المقدار c كما هو موضح بالعلاقة (4 – 13) .

الخاصية الثالثة

مجموع مربعات الانحراف للمشاهدات عند وسطها الحسابي $\bar{x}$ تكون أصغر من مجموع مربعات الانحراف للمشاهدات عن أي وسط فرضي آخر a حيث $a \neq \bar{x}$.

الإثبات

$$\begin{aligned}
\sum (x-a)^2 &= \sum (x+\bar{x}-\bar{x}-a)^2 \\
&= \sum \left[(x-\bar{x}) + (\bar{x}-a) \right]^2 \\
&= \sum (x-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-a)^2 + 2(\bar{x}-a)\sum (x-\bar{x}) \\
&= \sum (x-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-a)^2
\end{aligned}$$

وذلك لأن $\sum (x-\bar{x}) = 0$. نلاحظ أن المقدار $n(\bar{x}-a)^2$ مقدار موجب دائماً ونستنتج من ذلك أن :

$$\sum (x-\bar{x})^2 < \sum (x-a)^2$$

وهو المطلوب .

الخاصية الرابعة

إذا كانت هناك عينتان مجموع تكرارهما هو n_1, n_2 وتباينهما هو s_1^2 , s_2^2 على الترتيب ولهما المتوسط $\bar{x}$ نفسه فإن التباين المشترك لهما هو :

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-1}$$

الإثبات

نفرض المجموعتين هما : $x_1,....,x_{n_1}; y_1,...,y_{n_2}$

$$s_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i-\overline{x}\right)^2,\quad s_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i-\overline{x}\right)^2$$

$$s_1^2\left(n_1-1\right)=\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$$

$$s_2^2\left(n_2-1\right)=\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i-\overline{x}\right)^2$$

$$s_1^2\left(n_1-1\right)+s_2^2\left(n_2-1\right)=\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i-\overline{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i-\overline{x}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1+n_2}\left(x_i-\overline{x}\right)^2;\quad x_i=y_i,\ \ i=n_1+1,...,n_1+n_2$$

$$\because s^2=\frac{1}{n_1+n_2-1}\sum_{i=1}^{n_1+n_2}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$$

$$\therefore s^2=\frac{s_1^2\left(n_1-1\right)+s_2^2\left(n_2-1\right)}{n_1+n_2-1}$$

الخاصية الخامسة

الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات أكبر من الانحراف المتوسط لها (على الطالب التحقق من ذلك) .

(4 – 5 – 3) الانحراف المعياري للبيانات المبوبة

في هذه الحالة إذا كانت لدينا تكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ولها مراكز فئات $x_1, x_2, \ldots, x_k$ على الترتيب فإن المعادلات السابقة (4 – 8) ، (4 – 9) ، (4 – 10) ، (4- 11) السابقة تصبح كالتالي :

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum f\left(x-\overline{x}\right)^2, s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum f\left(x-\overline{x}\right)^2} \qquad (14-4)$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum fx^2-\frac{\left(\sum fx\right)^2}{2}\right) \qquad (15-4)$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum fd^2-\frac{\left(\sum fd\right)^2}{2}\right) \qquad (16-4)$$

وسوف نبين طريقة حساب الانحراف المعياري باستخدام العلاقات السابقة (4 – 14) ، (4 – 15) ، (4 – 16) .

مثال (4 – 13)

أوجد الانحراف المعياري لدرجات الطلاب في مثال (4 – 2) وذلك باستخدام العلاقات (4 – 14) ، (4 – 15) ، (4 – 16) .

الحـــل

(i) باستخدام العلاقة (4- 14) يكون جدول الحل كالتالي :

الفئات	x	f	fx	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
40-49	44.5	2	89.0	-21.25	451.56	903.13
50-59	54.5	9	490.5	-11.25	126.56	1139.06
60-69	64.5	15	967.5	-1.25	1.56	23.44
70-79	74.5	11	819.5	8.75	67.56	842.19
80.89	84.5	2	169.0	18.75	351.56	703.13
90-99	94.5	1	94.5	28.75	826.56	826.56
$\sum$		40	2630			4437.5

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum fx=\frac{1}{40}(2630)=65.75$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum f(x-\bar{x})^2=\frac{1}{40-1}(4437.51)=113.78$$

$s = 10.67$ درجة

(ii) باستخدام العلاقة (4 – 15) يكون جدول الحل كالتالي :

الفئات	x	f	fx	fx^2
40-49	44.5	2	89.0	3960.5
50-59	54.5	9	490.5	26732.25
60-69	64.5	15	967.5	62403.75
70-79	74.5	11	819.5	61052.75
80-89	84.5	2	169.0	12280.5
90-99	94.5	1	94.0	8930.25
			2630	177360

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum fx^2 - \frac{\left(\sum fx\right)^2}{2}\right) = \frac{1}{39}(177360 - 172922.5)$$

$$s^2 = 113.78, \quad s = \sqrt{113.78} = 10.67 \quad \text{درجــــة}$$

وهي النتيجة السابقة نفسها .

(iii) باستخدام العلاقة (4 – 16) ويأخذ المقدار الثابت (الوسط الفرضـي) $c = 64.5$ وهو مركز الفئة التي يقابلها أكبر تكراراً (وذلك لتبسيط الحسابات) كما هو موضح بجدول الحل التالي :

الفئات	x	f	d=x-64.5	fd	fd^2
40-49	44.5	2	-20	-40	800
50-59	54.5	9	-10	-90	900
60-69	64.5	15	0	0	0
70-79	74.5	11	10	110	1100
80-89	84.5	2	20	40	800
90-99	94.5	1	30	30	900
		40		50	4500

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum fx^2 - \frac{\left(\sum fx\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{39}(4500 - 62.5)$$

$$s^2 = 113.78 \;, \quad s\sqrt{113.78} = 10.67 \quad \text{درجــــــة}$$

ملاحــظة

عنـد اسـتخدام الخاصـية الثانيـة فـي حـل المثـال السـابق ، لاحظنـا أنـه باسـتخدام الوسـط الفرضي وهو مركز الفئة التي يقابلها أكبر تكرار، ادى إلى تبسيط الحسابات كثيـراً ويمكـن تبسيط الحسابات أكثر وذلك بقسمة انحرافات القيم عن الوسط الفرضي علـى طـول الفئـة (وتسـتخدم هـذه الطريقة في حالة الفئات المنتظمة) وبذلك يصبح الحل كما يلي :

الفئات	x	f	$d=x-64.5$	$d'=\frac{d}{10}$	fd'	fd'^2
40-49	44.5	2	-20	-2	-4	8
50-59	54.5	9	-10	-1	-9	9
60-69	64.5	15	0	0	0	0
70-79	74.5	11	10	1	11	11
80-89	84.5	2	20	2	4	8
90-99	94.5	1	30	3	3	9
		40			5	45

$$s_{d'}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum fd'^2 - \frac{\left(\sum fd'\right)^2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{39}\left(45 - \frac{(5)^2}{40}\right) = 1.1378$$

$$s_{d'} = 1.067 \quad , \quad s_x = 10 s_{d'} = 10.67 \quad \text{درجـــة}$$

وهي النتيجة السابقة نفسها .

مميزات الانحراف المعياري وعيوبه هي مميزات الوسط الحسابي وعيوبه نفسها التي سبق ذكرها في الفصل الثالث .

(4 – 6) معامل الاختلاف Coefficient of Variation

من المعلوم أن الانحراف المعياري لمجموعة من المشاهدات يأخذ وحدات المشاهدات نفسها فإذا كانت المشاهدات تمثل الأطوال مقيسة بالسنتيمترات فإن الانحراف المعياري يكون بالسنتيمتر وإذا كانت المشاهدات تمثل الأوزان فإنها تكون مقيسة بالكيلوجرام ويكون الانحراف المعياري مقيساً بالكيلوجرام أيضا، فإذا أردنا مقارنة تجانس مجموعة من الأوزان أو تشتتها بمجموعة من الأطوال فلا يمكن استخدام الانحراف المعياري للمقارنة لأنه لا يمكن مقارنة السنتيمتر بالكيلوجرام ، لذا دعت الحاجة إلى إيجاد مقياس لا يعتمد على الوحدات وهذا المقياس هو ما يسمى بمعامل الاختلاف أو التشتت النسبي ويعرف كالتالي :

$$C.V. = \frac{s}{\bar{x}} \qquad (17-4)$$

$$C.V. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \qquad (18-4)$$

مثال (4 – 14)

أحسب معامل الاختلاف لدرجات الطلاب في مثال (4 – 13) السابق بطريقتين مختلفتين :

الحـــل

الطريقة الأولى :

سبق حساب المتوسط والانحراف المعياري s في مثال (4- 13) حيث :

$$s = 10.67 \quad , \quad \bar{x} = 65.75 \quad \text{درجـــة}$$

باستخدام العلاقة (4- 17) السابقة نحصل على :

$$C.V. = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{10.67}{65.75} = 0.167$$

الطريقة الثانية

سبق حساب Q_1 (الربيع الأدنى) ، Q_3 الربيع الأعلى في مثال (4 – 5) السابق حيث :

$$Q_1 = 58.39 \quad , \quad Q_3 = 73.14 \qquad (5-4)$$

وباستخدام العلاقة (4 – 18) السابقة نحصل على :

$$C.V. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{73.14 - 58.39}{73.14 + 58.39} = \frac{14.75}{132.53} = 0.111$$

المقياس $C.V.$ يعطي درجة التفاوت بين المفردات ولا يعتمد على الوحدات .

(4 – 7) نظرية تشيبشيف

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات ذات متوسط $\bar{x}$ وانحراف معياري s فإنه توجد نسبة تساوي على الأقل $1 - \frac{1}{k^2}$ من هذه البيانات تقع بين $(\bar{x} - ks \, , \, \bar{x} + ks)$ حيث k قيمة عددية أكبر من الواحد.

فمثلاً إذا كان لدينا مجموعة من البيانات لها متوسط 7 وانحراف معياري 5 فإنه لقيمة $k = 2$ يمكن القول إن % 75 على الأقل من هذه البيانات تقع بين (17 ,3-) . وهذه النظرية تستخدم لوصف البيانات التي لا يكون معلوماً عنها سوى المتوسط والانحراف المعياري (أنظر التمارين) .

(4 – 8) المتغير المعياري والدرجات المعياري (مقياس التمركز)

إذا كان لدينا المتغير X له القيم $x_1, \ x_2, \ \dots \ , \ x_n$ والتي متوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري s فإن المتغير Z والذي له القيم $z_1, z_2, \dots, z_n$ والتي تعطى بالعلاقة التالية :

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}, \quad i = 1,\ 2\ , \dots\ , n \qquad (19-4)$$

حيث z_i تقيس الانحرافات عن المتوسط الحسابي بوحدات من الانحراف المعياري يسمى بالمتغير المعياري ويستخدم للمقارنة بين التوزيعات المختلفة ، ونوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (4 – 15)

حصل طالب على 82 درجة في مقرر للإحصاء حيث كان متوسط الدرجات هو 75 درجة وانحراف معياري 10 درجات ثم حصل على 89 درجة في مقرر للرياضيات وكان متوسط الدرجات للرياضيات هو 81 درجة وانحراف معياري 16 درجة في أي من المقررين كانت درجة استيعاب هذا الطالب أعلى ؟

الحـــل

إذا كانت z_1 ترمز للدرجة المعيارية للإحصاء فإن :

$$z_1 = \frac{82 - 75}{10} = 0.7$$

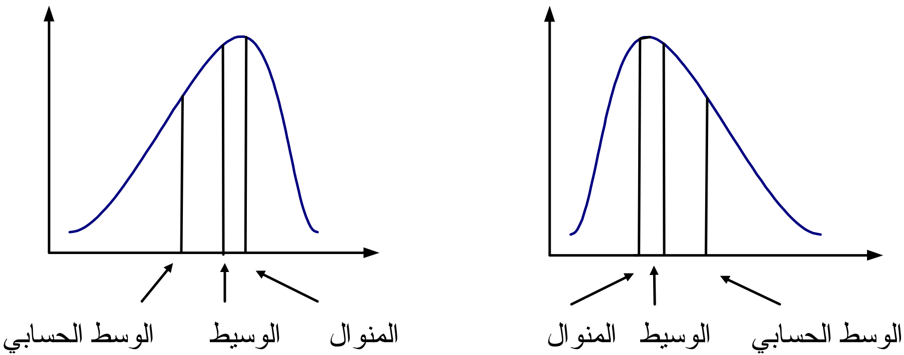
وإذا كانت z_2 ترمز للدرجة المعيارية للرياضيات فإن :

$$z_2 = \frac{89 - 81}{16} = 0.5$$

وهذا يعطي أن استيعاب الطالب النسبي لمقرر الإحصاء أعلى من الرياضيات .

(4 – 9) مقاييس الالتواء (الشكل) Skewness

لقد سبق أن تكلمنا عن طريق عرض البيانات جدولياً وبيانياً ثم مقاييس النزعة المركزية والتي تحدد موقع أو نقطة مركزية تتوزع حولها البيانات، ومقاييس التشتت والتي تبين مدى تباعد أو تشتت البيانات حول قيمتها المركزية ولم نتعرض لأي مقياس يوضح درجة التواء توزيع البيانات حول قيمتها المركزية أو مقدار تركيز غالبية المشاهدات في المنحنى التكراري . وبهذا يكون الالتواء هو مقياس لبعد المنحنى التكراري عن التماثل ،ويمكن قياس الإلتواء بملاحظة انه إذا كان منحنى التوزيع التكراري ملتوياً نحو اليمين فهذا يعني أن القيم المتطرفة تتركز نحو اليمين وتؤثر على الوسط الحسابي وتسحبه نحو اليمين وبذلك يكون الوسط الحسابي أكبر من الوسيط والمنوال ، أما إذا كان التوزيع ملتوياً نحو اليسار فإن الوسط الحسابي يكون أصغر من الوسيط والمنوال كما هو موضح بشكل (4 – 3) التالي:



شكل (4 – 3) يبين الالتواء نحو اليمين ونحو اليسار

ويؤخذ هذا الفرق بين الوسط الحسابي وكل من الوسيط والمنوال كمقياس للإلتواء لاحظ العلاقة:

$$\frac{(\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال})}{3} = (\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})$$

أو $\bar{x} - mod = 3(\bar{x} - med)$ وتؤخذ كل من هذه الكميتين بعد معايرتها كمقاييس للإلتواء.

مقياس الالتواء (v) له صور مختلفة نذكر ثلاثاً منها هي :

$$v = \frac{3\ (\bar{x} - med)}{s} \qquad (20 - 4)$$

أو

$$v = \frac{(\bar{x} - mod)}{s} \qquad (21 - 4)$$

وتستخدم طريقة العزوم وتعطى بـ :

$$v = \frac{m_3}{s^3} \qquad (22-4)$$

حيث :

$$m_3 = \frac{\sum (x-\bar{x})^3}{n} \qquad \text{بيانات مباشرة}$$

$$m_3 = \frac{\sum f (x-\bar{x})^3}{n} \qquad \text{بيانات مبوبة}$$

مثال (4 – 16)

أوجد معامل الالتواء لدرجات الطلاب في مثال (4- 13) .

الحـــــل

سبق الحساب لدرجات الطلاب القيم التالية :

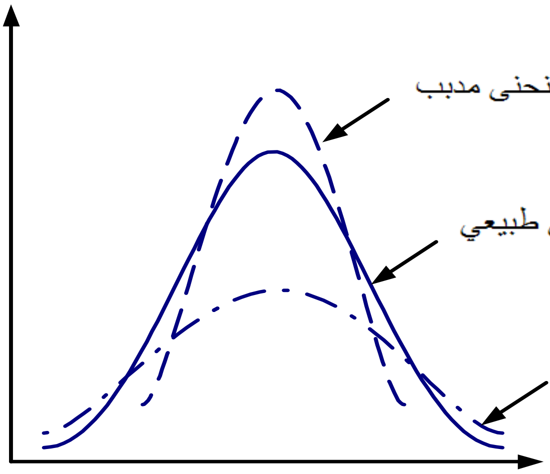
$$\bar{x} = 65.75, \quad mod = 65.5, \quad med = 65.5, \quad s = 10.67$$

معامل الالتواء من العلاقة (4 – 20) هو $v = \frac{3(65.75-65.5)}{10.67} = 0.70$

معامل الالتواء من العلاقة (4 – 21) هو $v = \frac{65.75-65.5}{10.67} = 0.023$

(4 – 10) التفلطح Kurtosis

وهو يقيس درجة تمركز البيانات حول قيمتها المركزية أو الكثافة التي تتوزع بها البيانات حول مركزها ويبدو ذلك في مدى التدبب (أو الاستواء أو التفلطح) لمنحنى الكثافة عند المتوسط ، وهو أيضاً مقياس يقيس درجة علو أو انخفاض أي منحنى توزيع تكراري بالنسبة للمنحنى الطبيعي (وهو منحنى متماثل حول محور رأسي يمر بالمتوسط) كما في شكل (4 – 4) التالي :



شكل (4 – 4) يبين بعض أشكال التفلطح

ويُعطى التفلطح k بالعلاقة التالية:

$$k = \frac{m_4}{s^4} \qquad (23-4)$$

حيث :

(بيانات مباشرة) $$m_4 = \frac{\sum (x-\bar{x})^4}{n}$$

(بيانات مبوبة) $$m_4 = \frac{\sum f(x-\bar{x})^4}{n}$$

(4 – 11) ملحق 4

حل أمثلة الفصل الرابع باستخدام إكسل :

المدى:

المدى = أكبر مشاهدة - أصغر مشاهدة

مثال (4-1)

أحسب المدى للبيانات التالية 80, 30, 70, 62, 40, 82

ادخل البيانات في صفحة من إكسل كالتالي:

	A	B
1	البيان	المدى =
2	80	=MAX(A2:A7)-MIN(A2:A7)
3	30	
4	70	
5	62	
6	40	
7	82	

فينتج

	A	B
1	البيان	المدى =
2	80	52
3	30	
4	70	
5	62	
6	40	
7	82	

<u>نصف المدى الربيعي:</u>

نصف المدى الربيعي = (الربيع الثالث - الربيع الأول) / 2

مثال (4-3)

أوجد نصف المدى الربيعي للبيانات 70, 72, 71, 55, 58, 69, 65, 67

ادخل البينات في صفحة من إكسل كالتالي:

B	A	
نصف المدى الربيعي =	البيان	1
=(QUARTILE(A2:A9,3)-QUARTILE(A2:A9,1))/2	70	2
	72	3
	71	4
	55	5
	58	6
	69	7
	65	8
	67	9

فينتج

B	A	
نصف المدى الربيعي =	البيان	1
3.5	70	2
	72	3
	71	4
	55	5
	58	6
	69	7
	65	8
	67	9

ملاحظة:

إكسل يستخدم صيغة خطية Interpolation لحساب رتب البيانات التي تقع بين بيانين وقد يعطي نتائج مختلفة خاصة للبيانات ذات الحجم الصغير.

مثال (4-4):

أوجد نصف المدى الربيعي للبيانات 74, 72, 70, 55, 58, 69, 65, 67, 59

ادخل البينات في صفحة من إكسل كالتالي:

	A	B
1	البيان	نصف المدى الربيعي =
2	74	=(QUARTILE(A2:A10,3)-QUARTILE(A2:A10,1))/2
3	72	
4	70	
5	55	
6	58	
7	69	
8	65	
9	67	
10	59	

فينتج

	A	B
1	البيان	نصف المدى الربيعي =
2	74	5.5
3	72	
4	70	
5	55	
6	58	
7	69	
8	65	
9	67	
10	59	

الإنحراف المتوسط:

وهو متوسط مجموع الإنحرافات المطلقة للبيانات عن متوسطها أي:

$$M.D. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|$$

مثال (4-7):

أوجد الإنحراف المتوسط للبيانات 5, 9, 9, 8, 7, 7, 5, 6

ادخل البينات في صفحة من إكسل كالتالي:

B	A	
الإنحراف المتوسط =	البيان	1
=AVEDEV(A2:A9)	5	2
	9	3
	9	4
	8	5
	7	6
	7	7
	5	8
	6	9

الدالة AVEDEV في إكسل تعطي الإنحراف المتوسط لبيانات في مجال معين.

وينتج

C	B	A	
	الإنحراف المتوسط =	البيان	1
	1.25	5	2
		9	3
		9	4
		8	5
		7	6
		7	7
		5	8
		6	9

الإنحراف المعياري:

الإنحراف المعياري لبيانات حجمها n يعطى بالعلاقة

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

مثال (4-9):

أحسب الإنحراف المعياري للبيانات 5, 6, 7, 9, 8

ندخل البيانات في صفحة من إكسل

	A	B
1	البيان	الإنحراف المعياري =
2	5	=STDEV(A2:A6)
3	6	
4	7	
5	9	
6	8	

الدلة STDEV في إكسل تعطي الإنحراف المعياري لبيانات معطاة في مجال معين.

وينتج

	A	B	C
1	البيان	الإنحراف المعياري =	
2	5	1.581139	
3	6		
4	7		
5	9		
6	8		

معامل الإختلاف:

معامل الإختلاف يعطى بأحد الصيغتين

$$C.V. = \frac{s}{\bar{x}}$$

$$C.V. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

مثال (4-14):

أوجد معامل الإختلاف للبيانات 5, 6, 7, 9, 8

ندخل البيانات في إكسل

	A	B
1	البيان	معامل الإختلاف =
2	5	0.225876976
3	6	0.142857143
4	7	
5	9	
6	8	

القيمة الأولى تحسب بالعلاقة

```
=STDEV(A2:A6)/AVERAGE(A2:A6)
```

و القيمة الثانية من العلاقة

```
=(QUARTILE(A2:A6,3)-QUARTILE(A2:A6,1))/(QUARTILE(A2:A6,3)+QUARTILE(A2:A6,1))
```

المتغير المعياري والدرجات المعيارية:

المتغير المعياري

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s}$$

ولقيمة معينة أو لبيان تسمى الدرجة المعيارية.

مثال:

أوجد الدرجات المعيارية للبيانات 5, 6, 7, 9, 8

في صفحة من إكسل ندخل البيانات

	A	B
1	البيان	الدرجات المعيارية
2	5	-1.26491106
3	6	-0.63245553
4	7	0
5	9	1.264911064
6	8	0.632455532

وتحسب الدرجات المعيارية بالعلاقة

```
=STANDARDIZE(A2,AVERAGE($A$2:$A$6),STDEV($A$2:$A$6))
```

تمرين: أي قيمة من البيانات التي تكون درجتها المعيارية صفر؟

مقاييس الإلتواء و التفلطح:

مثال:

أوجد مقاييس الإلتواء و التفلطح للبيانات 8, 4, 2, 1, 7, 6, 4, 9, 5, 5, 3, 6

C	B	A	
3.17928E-17	الإلتواء =	البيان	1
-0.51165453	التفلطح =	8	2
		4	3
		2	4
		1	5
		7	6
		6	7
		4	8
		9	9
		5	10
		5	11
		3	12
		6	13

الإلتواء يحسب بالدالة

=SKEW(A2:A13)

و التفلطح يحسب بالدالة

=KURT(A2:A13)

(4 – 12) تمــارين

(1) أحسب المدى ونصف المدى الربيعي والانحراف المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف من البيانات التالية :

$$6, 3, 5, 5, 9, 4, 6, 7, 1, 2, 4, 8$$

(2) فيما يلي أوزان 50 طالباً من طلاب جامعة الملك سعود .

فئات الوزن	58-60	61-63	64-66	67-69	70-72	73-75
عدد الطلاب	2	7	14	15	8	4

أوجد :

أ) مدى أوزان الطلاب .

ب) نصف المدى الربيعي للأوزان حسابياً وبيانياً .

جـ) الانحراف المتوسط والانحراف المعياري .

(3) حدد نسبة الطلبة في المسألة (2) والتي تقع أوزانهم في المدى :

$$(i)\ \ \bar{x} \pm 1(s) \quad , \quad (ii)\ \ \bar{x} \pm 2(s) \quad , \quad (iii)\ \ \bar{x} \pm 3(s)$$

(4) إذا كانت d هي انحرافات مراكز فئات لمجموعة من البيانات عن مقدار ثابت c أثبت أن الانحراف المعياري هو :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum fd^2 - \frac{\left(\sum fd\right)^2}{n}\right)}$$

(5) أحسب مقاييس الالتواء ومقاييس التفلطح من البيانات في المسألة (2) .

(6) مصنع ينتج نوعين من لمبات التلفزيون هما B و A ومتوسط أعمارهما الإنتاجية بالساعة هو $\bar{x}_A = 1200$ و $\bar{x}_B = 1500$ والانحراف المعياري بالساعة هو $s_A = 250$ و $s_B = 3000$ أي من النوعين أكثر تشتتاً .

(7) الجدول التالي يمثل دخل مجموعة من الأسر بمئات الريالات :

فئات الدخل	أقل من 10	10-14	15-19	20-24	25-29	30 فأكثر
عدد الأسر	5	20	35	19	13	8

أي من المقاييس التالية يمكن إيجادها وأي منها لا يمكن إيجادها مع ذكر السبب ؟

المدى ، نصف المدى الربيعي ، معامل الاختلاف

(8) أوجد العزم الأول والثاني والثالث والرابع لمجموعة البيانات :

2, 5, 9, 4, 3, 6

ثم أحسب معامل الالتواء ومعامل التفلطح لهذه البيانات .

(9) عند دراسة أطوال مجموعة من الأطفال حديثي الولادة كانت أطوالهم هي :

70, 70, 70, 70, 70, 70, 70

أحسب مقاييس التشتت لهذه الأطوال .

(10) أخذت عينتان من مجتمعين ، فأعطتا النتائج التالية :

العيّنة الثانية	العيّنة الأولى
$\sum_{i=1}^{40} y_i = 280$	$\sum_{i=1}^{50} x_i = 300$
$\sum_{i=1}^{40} y_i^2 = 2100$	$\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 1950$

أ) أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل من العينتين .

ب) أي من العينيتين أكثر تجانساً .

جـ) إذا دمجت العينتان ما هو الوسط الحسابي للمجموعة الناتجة .

(11) عند دراسة ظاهرة الطول والوزن لمجموعة عمال بأحد المصانع كانت لدينا البيانات التالية :

(i) ظاهرة الطول : $\bar{x} = 160\ cm\ ,\quad s = 8\ cm$

(ii) ظاهرة الوزن : $\sum_{i=1}^{20} x_i = 1200\ kg\ , \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 72687\ kg$

أياً من الظاهرتين أكثر تجانساً .

(12) وجد أن متوسط كمية فيتامين C في نوع معين من الفواكه هو 0.24 ملجم بانحراف معياري قدره 0.004 ملجم . فما هي أقل نسبة من الفاكهة التي تحتوي على مقدار من هذا الفيتامين واقع بين (0.248 , 0.232 ملجم) .

(13) في دراسة قام بها مركز للأغذية وجد أن متوسط كمية فيتامين B في شرائح الخبز هو 0.260 ملجرام بانحراف قدره 0.005 ملجرام . أوجد القيم التي تقع بينها كمية فيتامين B في :

أ - على الأقل نسبة $\frac{35}{36}$ من هذه الشرائح .

ب - على الأقل نسبة $\frac{63}{64}$ من هذه الشرائح .

(14) ادّعت شركة طيران أن سفرياتها بين المدن الداخلية تصل متأخرة عن موعدها بمتوسط قدره 4.6 دقيقة وانحراف معياري مقداره 1.6 دقيقة. فما هي أقل نسبة من سفرياتها تصل متأخرة ما بين (1.8 و 7.4 دقيقة) .

(15) حول مجموعة من القيم التالية :

6, 5, 7, 2, 3, 9

إلى درجات معيارية .

(16) اثبت أن متوسط مجموعة من الدرجات المعيارية هو صفر وانحرافها المعياري هو واحد وضح ذلك باستخدام المسألة رقم (15) السابقة .

(17) ضع الإشارة (√) أما العبارة الصحيحة والإشارة (×) أما العبارة الخاطئة :

أ - تباين مجموعة من القياسات السالبة هو تباين سالب . ☐

ب - يتأثر المدى وبشدة بالقيم الشاذة . ☐

جـ - إذا كان المتغير X يعبر عن أطوال مجموعة من الأشخاص بالسم فإن قياس معامل الاختلاف بالسم أيضاً . ☐

د - تباين مجموعة القيم 9 ,9 ,9 ,9 ,9 هو 81 . ☐

(18) أكمل ما يلي كي تحصل على عبارات صحيحة :

أ - إذا علمت بيان إحصائي لدرجات اختبار يساوي 165 درجة وانحرافه المعياري 5 درجات فيما لا يقل عن ثلاثة أرباع الطلبة نالوا درجات واقعة بين (........................... و ....) .

ب - بعد معايرة القياسات 20 ,19 ,81 ,8 ,15 يصبح متوسط القيم المعيارية .... ويصبح انحرافها المعياري ....

جـ - إذا كان متوسط مجموعة القياسات x_1, x_2, x_3, x_4 وانحرافها المعياري هما على الترتيب $\bar{x} = 15$ و $s = 3$ فإن المتوسط الحسابي والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للمجموعة $4x_1\text{-}5,\ 4x_2\text{-}5,\ 4x_3\text{-}5,\ 4x_4\text{-}5$ هي على الترتيب : المتوسط = ... والانحراف المعياري = ... ومعامل الاختلاف = ...

د - الوسيط لمجموعة القياسات 9- ,9 ,2 ,3- ,7 هو .... ومداها هو ....