الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية أو الموضع
Averages and Measures of Central Tendency

(3 – 1) مقدمـــــة

رأينا في الفصل السابق كيفية عرض البيانات الإحصائية وتلخيصها في جداول تكرارية و رسوم بيانية بهدف الحصول على بعض خصائص المجتمع الإحصائي تحت الدراسة . ومن المعروف أن الرسوم البيانية غير دقيقة في إعطاء تصور للقيم الفعلية لذلك يجب أن يكون لدينا مقاييس عددية تصف لنا هذه البيانات . وسوف نتعرض في هذا الفصل إلى نوع مهم من المقاييس الإحصائية وهي ما تسمى بمقاييس النزعة المركزية أو مقاييس الموضع أو المتوسطات . وهي مقاييس عددية تحدد موقع التوزيع على محور بمقياس معين وهي مهمة في حالة المقارنة بين التوزيعات المختلفة . وتكون فائدتها أكثر في حالة التوزيعات المتشابهة في طبيعتها وشكلها ولكنها مختلفة في مواقعها . فمثلاً : عند دراسة عيّنة من البيانات الإحصائية التي تخص بعض الأسر من البادية حسب فئات الإنفاق الاستهلاكي السنوي ، وعيّنة من البيانات الإحصائية تخص بعض الأسر في الحضر ، حسب فئات الإنفاق الاستهلاكي أيضاً . فإن حساب المتوسط السنوي للإنفاق لكل من البادية والحضر يُمكننا من المقارنة بينهما .

ويمكن تعريف المتوسطات بأنها القيمة النموذجية الممثلة لمجموعة من البيانات . وحيث إن القيمة النموذجية تميل إلى الوقوع في المركز لذلك فإنه يمكن أن تسمى المتوسطات بمقاييس النزعة المركزية . وسوف نتناول في هذا الفصل دراسة المتوسطات في صور مختلفة ، كل منها له مميزاته وعيوبه وهذا يعتمد على طبيعة البيانات والهدف من استخدامها . وبعض المتوسطات الأكثر شيوعاً والتي سوف نتناولها بالشرح والتفصيل والأمثلة وكيفية حسابها هي كل من الوسط الحسابي (المتوسط) والوسط المرجح والوسيط والمنوال والوسط الهندسي والوسط التوافقي وذلك في حالة البيانات المباشرة والمبوَّبة .

(3 – 1 – 1) تعريف رمز التجميع $\sum$

البيانات إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ فإن حاصل جمع هذه المشاهدات يمكن التعبير عنه كما يلي :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

وفي بعض الأحيان يكتب $\sum x$ وهذا معناه حاصل جمع قيم x وإذا كان لدينا مجموعة أخرى من المشاهدات $y_1, y_2, \ldots, y_n$ وكذلك مقدار ثابت c فإنه يمكن إثبات (بسهولة) بعض العلاقات الآتية :

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\text{(iii)} \qquad \sum_{i=1}^{n} c x_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i$$

وهذه العلاقة قد تكون مفيدة في إثبات بعض الخصائص لبعض المقاييس المختلفة .

(3 – 2) الوسط الحسابي أو المتوسط Mean or Arithmetic Mean

المتوسط أو الوسط الحسابي يعتبر من أهم مقاييس الموضع والأكثر استخداماً في الإحصاء والحياة العملية إذ يستخدم عادة في الكثير من المقارنات بين الظواهر المختلفة . ولو أسندت قيمة المتوسط لكل مشاهدة فإن مجموع هذه القيم الجديدة يكون مساوياً لمجموع المشاهدات الأصلية [أنظر مثال (3-1)] ويعرف كالتالي :

إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات للمتغير X وهي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإن الوسط الحسابي يساوي حاصل جمع المشاهدات أو البيانات مقسوماً على عددها ويرمز له بالرمز $\bar{x}$ (ويقرأ x bar) وعليه فإن :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1-3)$$

مثال (3 – 1)

إذا كانت درجات 5 طلاب في إحدى المواد هي :

60, 72, 40, 80, 63

احسب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب .

الحــــل :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 60+72+40+80+63 = 315$$

وبالتعويض في القانون (3 – 1) نحصل على :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(315) = 63$$

الآن لو عوضّنا بدل القراءة الأولى 60 بالمتوسط 63 وبالقراءة الثانية 72 بالمتوسط 63 وبالقراءة الثالثة 40 بالمتوسط 63 ...... الخ نجد :

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 63+63+63+63+63 = 315$$

وذلك كما ذكر في الملاحظة السابقة في تعريف المتوسط .

(3 – 2 – 1) الوسط الحسابي للبيانات المبوبة Grouped Data

إذا كان لدينا عدد k من الفئات ذات المراكز x_k , ... , x_2 , x_1 ولها تكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_k$ على الترتيب ، فإن الوسط الحسابي يعطي بالعلاقة التالية :

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \qquad (2-3)$$

حيث $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$ ونوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (3 – 2)

احسب متوسط أعمار الطلاب $\overline{x}$ للبيانات التالية :

فئات الأعمار	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14
عدد الطلاب	2	5	8	4	1

الحــل :

ولسهولة الحل نضع الجدول التالي :

الفئات	مراكز الفئات x	التكرار f	fx
5-6 7-8 9-10 11-12 13-14	5.5 7.5 9.5 11.5 13.5	2 5 8 4 1	11 37.5 76.0 46.0 13.5
المجموع $\sum$		20	184

وبالتعويض في القانون (2-3) نحصل على :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{20}(184) = 9.2$$ سـنة

(3 – 2 – 2) بعض خصائص الوسط الحسابي

سوف نستعرض ونثبت بعض خصائص الوسط الحسابي وذلك في حالة البيانات المباشرة وسيكون من السهل على الطالب استخدام نفس الطرق لإثباتها في حالة البيانات المبوبة.

الخاصية الأولى :

المجموع الجبري لانحرافات القيم من وسطها الحسابي يساوي صفراً.

أي أنه إذا كانت مجموعة المشاهدات هي x_n , … , x_2 , x_1 وانحرافاتها عن وسطها الحسابي هي d_n , … , d_2 , d_1 حيث :

$$d_i = x_i - \bar{x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

فإن

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} d_i = 0$$

الإثبات

حيث إن :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

أي أن :

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

فإن

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{x}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

الخاصية الثانية :

إذا كان للمتغير X المشاهدات $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ فإذا أضفنا أو طرحنا من القيم الأصلية للمشاهدات مقداراً ثابتاً b ، فإن الانحرافات $d_1 , d_2 , \dots , d_n$ حيث $d_i = x_i \pm b$) وحيث $i = 1, 2, \dots, n$) تعطي المتوسط كالتالي :

$$\bar{x}=\bar{d}\pm b$$

الإثبات :

حيث $d_i = x_i \pm b, \quad i = 1, 2, \dots , n$

فإن : $\sum_{i=1}^{n}d_i=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\pm b\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\pm nb$

بالقسمة على n فإن : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\pm b$

أي أن : $\bar{d}=\bar{x}\pm b$

وعليه فإن : $\bar{x}=\bar{d}\mp b$

وهو المطلوب

مثال (3 – 3)

من مثال (1 – 3) إذا أخذنا $b = 50$ فإن مجموع الانحرافات $\sum_{i=1}^{n}d_i$ يحسب كالتالي :

$$\sum_{i=1}^{n}d_i = (60-50) + (72-50) + (40-50) + (80-50) + (63-50)$$

$$\sum_{i=1}^{n}d_i = 10 + 22 - 10 + 30 + 13 = 65$$

$$\bar{d}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i=\frac{1}{5}(65)=13$$

ويكون : $\bar{x} = \bar{d} + b = 13 + 50 = 63$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في مثال (3 – 1) .

الخاصية الثالثة

إذا كان للمتغير X المشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وضربنا هذه المشاهدات في مقدار ثابت حقيقي a فإن متوسط القيم الجديدة يساوي المتوسط $\bar{x}$ مضروباً في a أي أن :

$$(\overline{ax}) = a\bar{x}$$

ومن الخاصيتين الثانية والثالثة نجد أن :

$$(\overline{ax \pm b}) = a\bar{x} \pm b$$

الخاصية الرابعة

إذا كان للمتغير X المشاهدات $x_1, \; x_2, \; \ldots \; , \; x_n$ فإن مجموع مربعات انحرافات المشاهدات عن أي قيمة حقيقية c يكون أكبر أو يساوي مجموع مربعات انحرافات المشاهدات عن وسطها الحسابي أي أن :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 > \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

حيث : $\bar{x} \neq c$

(3 – 2 – 3) بعض مميزات الوسط الحسابي

1) مقياس سهل حسابه ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة.

2) يأخذ في الاعتبار جميع القيم محل الدراسة.

3) أكثر المقاييس فهماً في الإحصاء.

(3 – 2 – 4) بعض عيوب الوسط الحسابي

1) يتأثر بالقيم المتطرفة (وهي القيم الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً مقارنة ببقية القيم). أنظر الملحق .

2) يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة حيث يتطلب معرفة مركز كل فئة . فعلى سبيل المثال : فتح فئة الأعمار الأولى مثال (3 – 2) من أسفل فتصبح

(6 سنوات فأقل) بدلاً من (6-5) وفتح فئة الأعمار الأخيرة من أعلى لتصبح (13 سنة فأكثر) بدلاً من (14 – 13) .

3) لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية .

(3 – 3) الوسط المرجّح Weighted Mean

في بعض الأحيان تكون المشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مقرونة بأوزان $w_1, w_2, \ldots, w_n$ في هذه الحالة فإن الوسط الحسابي يسمى بالوسط المرجح ويعطى بالعلاقة الآتية :

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad (3-3)$$

ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (3 – 4)

أوجد الوسط المرجّح $\bar{x}_w$ لدرجات طالب في ثلاث مواد إذا كانت الدرجات معطاة بالقيم 65 ,70 ,40 وكانت ساعات الدراسة الأسبوعية لهذه المواد بالترتيب هي 2, 3, 4:

الحل

$$\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3}{w_1 + w_2 + w_3}$$

فإن :

$x_1 = 40 \quad , \quad x_2 = 70 \quad , \quad x_3 = 65$

$w_1 = 2 \quad , \quad w_2 = 3 \quad , \quad w_3 = 4$

وعليه فإن :

$$\bar{x}_w = \frac{2x40 + 3x70 + 4x65}{2+3+4}$$

$$= \frac{1}{9}\ (550)$$

$$= 61.11$$ درجة

ملاحظـة

يمكن اعتبار الوسط الحسابي من الجداول التكرارية وسطاً مرجحاً حيث إنه يمكن وضع القيم $[w_1=f_1, w_2=f_2, \ldots, w_k=f_k]$ في القانون (3 – 3) . ويكون :

$$\bar{x}_w = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

(3 – 4) الوسـيط• Median

عند ترتيب البيانات (أو المشاهدات) ترتيباً تصاعدياً (أو تنازلياً) فالوسيط يكون هو القيمة التي يقع % 50 من البيانات قبلها في الترتيب و % 50 من البيانات بعدها في الترتيب . فإذا كان عدد البيانات فردياً يكون الوسيط هو المشاهدة التي في المنتصف وإذا كان عدد البيانات زوجياً فإن الوسيط هو متوسط المشاهدتين اللتين في المنتصف .

مثال (3 – 5)

أوجد الوسيط لدرجات الطلاب في مثال (3 - 1) حيث كانت درجاتهم كالتالي :

60, 70 , 40, 80, 63

الحــــل

نرتب البيانات تصاعدياً :

$$40\ ,\ 60\ ,\ \boxed{63}\ ,\ 72\ ,\ 80$$

عدد المشاهدات فردي فيكون الوسيط المشاهدة التي في المنتصف .

الوسيط هو 63 (لاحظ أن بيانين يقعان في الترتيب قبل الوسيط وبيانين بعده)

مثال (3 – 6)

أوجد الوسيط لدرجات الطلاب الآتية :

72, 60, 72, 40, 80, 63

• ويمكن إعطاء صيغة رياضية عامة للوسيط كالتالي :
إذا رمزنا بـ $P(X \le x)$ إلى نسبة الوحدات الإحصائية التي لها قيمة x أو أقل فإن الوسيط هو Med بحيث :
$$P(X \le Med) \ge 0.5 \quad , \quad P(X \ge Med) \ge 0.5$$

الحـــل

نرتب البيانات تصاعدياً

$$40 \ , 60 \ , \boxed{63} \ , \boxed{72} \ , 72 \ , 80$$

حيث إن عدد البيانات زوجي فيكون الوسيط هو متوسط المشاهدتين اللتين في المنتصف .

$$Med = \frac{63+72}{2} = 67.5$$

(3 – 4 – 1) الوسيط في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية)

قبل إيجاد قيمة الوسيط حسابياً وبيانياً نعرف الفئة الوسطية كالتالي :

الفئة الوسيطية

هي الفئة التي يقع فيها الوسيط .

إيجاد الوسيط حسابياً

نتبع الخطوات التالية :

1) نكوّن الجدول المتجمع الصاعد (باستخدام الحدود الحقيقية) .

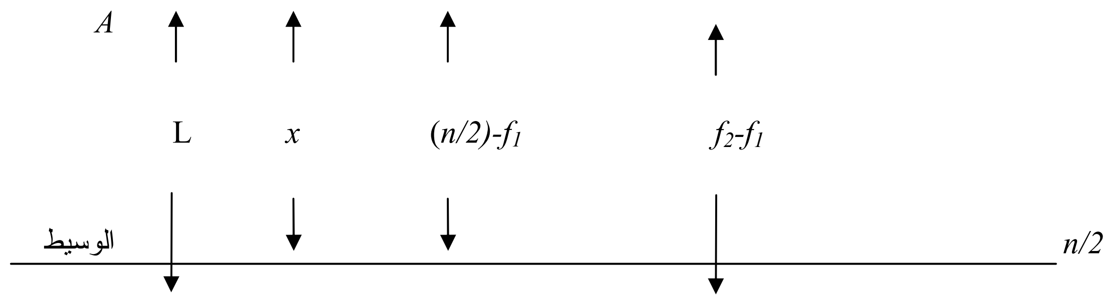
2) نوجد رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$ سواء أكانت n فردية أم زوجية .

3) نحدد مكان الوسيط بعد حساب $\frac{n}{2}$ من التكرارات المتجمعة في الجدول المتجمع الصاعد ونضع خطاً أفقياً يمر داخل الفئة الوسيطية ويكون التكرار المتجمع السابق لهذا الخط هو f_1 والتكرار المتجمع اللاحق له هو f_2 ثم نحدد البداية الحقيقية للفئة الوسيطية ويرمز له بالرمز A ونعين طول الفئة الوسيطية ويساوي الحد الأدنى للفئة التالية مطروحاً منه الحد الأدنى للفئة الوسيطية ويساوي الحد الأدنى للفئة التالية مطروحاً منه الحد الأدنى للفئة الوسيطية ويرمز له بالرمز L ويعطى الوسيط بالعلاقة :

$$Med \ = \ A \ + \frac{\frac{n}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \ L \qquad (4-3)$$

حيث f_1 التكرار المتجمع الصاعد السابق للتكرار المتجمع الوسيطي f_2 التكرار المتجمع الصاعد اللاحق للتكرار المتجمع الوسيطي .

الإثبات



وبإجراء التناسب بين الأطوال والتكرارات نحصل على :

$$\frac{x}{L}=\frac{\frac{n}{2}-f_1}{f_2-f_1}$$

$$x=\frac{\frac{n}{2}-f_1}{f_2-f_1}L$$

$$Med=A+x=A+\frac{\frac{n}{2}-f_1}{f_2-f_1}L$$

مثال (3 – 7)

أحسب الوسيط لأعمار الطلاب في المثال (3 – 2) السابق .

الحـــل

نكوّن الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالآتي :

	التكرارات المتجمعة الصاعدة	فئات التكرارات المتجمعة الصاعدة		
	0	أقل من	4.5	
	2	أقل من	6.5	
F_1	7	أقل من	8.5	A
F_2	15	أقل من	10.5	
	19	أقل من	12.5	
	20	أقل من	14.5	

نحسب $\frac{n}{2}$ وهي تساوي $\frac{20}{2}=10$ ونلاحظ أن 10 تقع بين 15 , 7 فنضع خطاً أفقياً يمثل تكرار الوسيط المتجمع 10 وعليه فيكون :

$$L = 10.5 - 8.5 = 2 \ , \ f_2 = 15 \ \ , f_1 = 7 \ , \ A = 8.5$$

وبتطبيق قانون الوسيط (3 – 4) نحصل على :

$$Med = 8.5 + \frac{10-7}{15-7}.2 \ = \ 8.5 \ + \frac{6}{8} \ = \ 9.25$$ ســنة

إيجاد الوســيط بيانياً

يمكن إيجاد الوسيط بيانياً من المنحنى المتجمع الصاعد أو المنحنى المتجمع الهابط كل على حده أو تقاطع المنحنيين في رسم واحد ، وفي حالة المنحنى المتجمع الصاعد تحدد نقطة $\frac{n}{2}$ على المحور الرأسي للتكرارات ونرسم منها خطاً أفقياً موازياً لمحور الفئات إلى أن يلتقي بالمنحنى في نقطة . نسقط من تلك النقطة عموداً رأسياً يلاقي محور الفئات في نقطة تكون قيمتها هي قيمة الوسيط بيانياً . هذا ويمكن الحصول على قيمة الوسيط أيضاً من المتجمع الهابط ، بأن نتبّع الخطوات السابقة نفسها والتي اتبعناها في حالة المتجمع الصاعد لتحديد قيمة الوسيط بيانياً . أما في حالة تقاطع الصاعد والهابط في نقطة ، نسقط من هذه النقطة عموداً رأسياً على محور الفئات تكون نقطة تقاطعه مع محور الفئات هي قيمة الوسيط ونوضح ذلك بالمثال التالي :

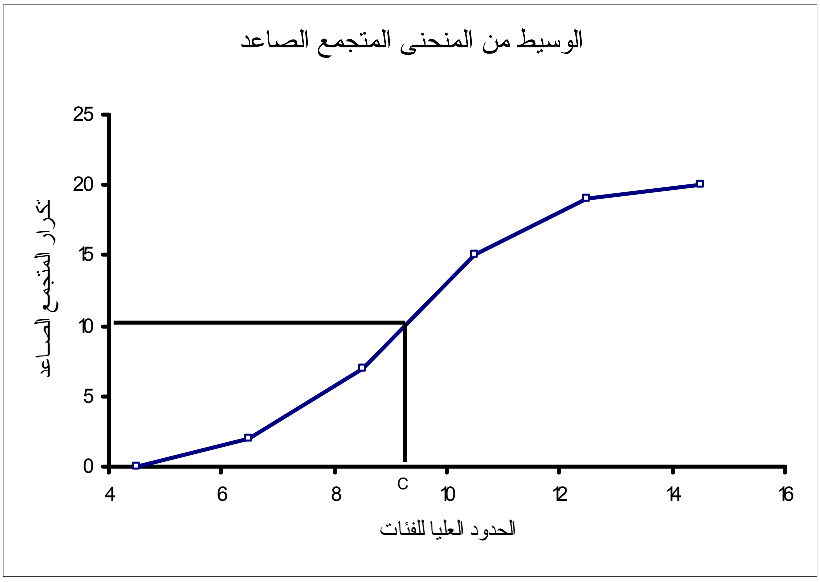
مثال (3 – 8)

أحسب الوسيط بيانياً من مثال (3 – 7) لأعمار الطلاب .

الحـــل

أولاً : إيجاد الوسيط من المنحنى المتجمع الصاعد

من الجدول المتجمع الصاعد في مثال (3 – 7) يمكن رسم المنحنى المتجمع الصاعد شكل (3 – 1) التالي :



شكل (3 – 1) يمثل المنحنى المتجمع الصاعد لإيجاد قيمة الوسيط لأعمار الطلاب بيانياً

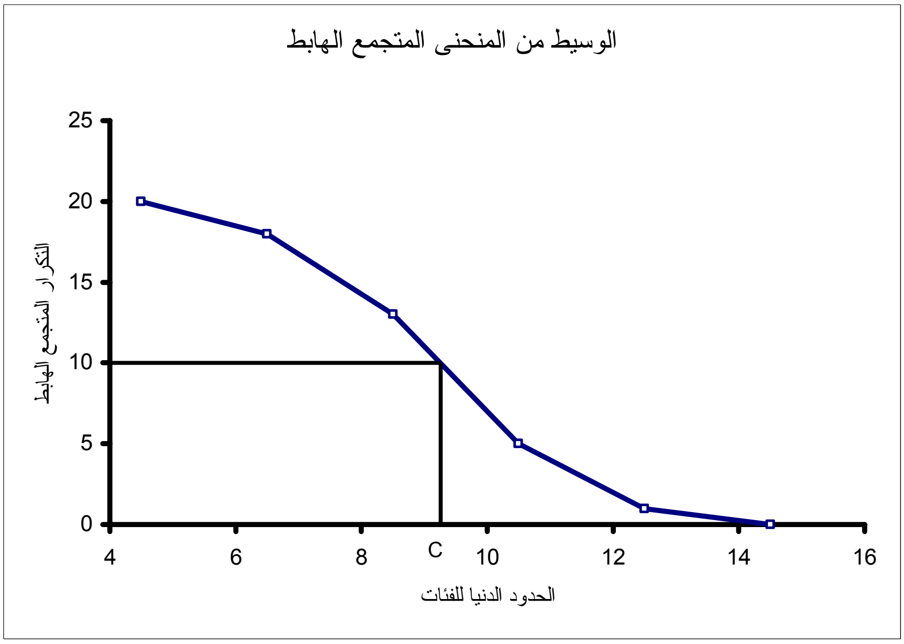
أي أن الوسيط هو القيمة التي عند النقطة C ويساوي تسع سنوات تقريباً .

ثانياً : إيجاد الوسيط من المنحنى المتجمع الهابط

نكوّن الجدول المتجمع الهابط كالتالي :

التكرارات المتجمعة الهابطة	فئات التكرارات المتجمعة الهابطة
20	أكبر من أو يساوي 4.5
18	أكبر من أو يساوي 6.5
13	أكبر من أو يساوي 8.5
5	أكبر من أو يساوي 10.5
1	أكبر من أو يساوي 12.5
0	أكبر من أو يساوي 14.5

نرسم من هذا الجدول المنحنى المتجمع الهابط ، شكل (3 – 2) التالي :

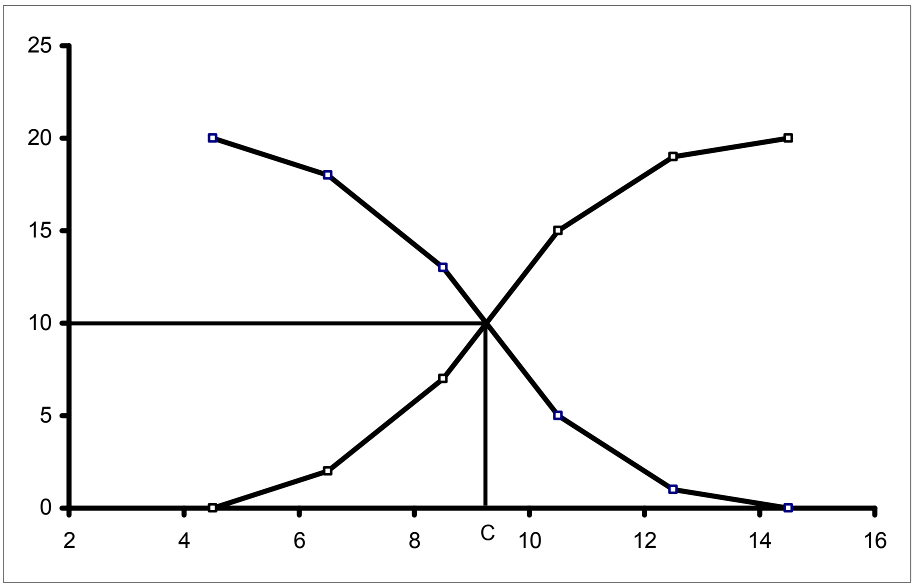


شكل (3 – 2) يمثل المنحنى المتجمع الهابط لإيجاد قيمة الوسيط لأعمار الطلاب بيانياً

أي أن الوسيط هو القيمة عند النقطة C ويساوي تسع سنوات تقريباً .

ثالثاً : إيجاد الوسيط من المنحنيين المتجمعين الصاعد والهابط

نرسم المنحنيين الصاعد والهابط من الجدولين الصاعد والهابط شكل (3 – 3) التالي :

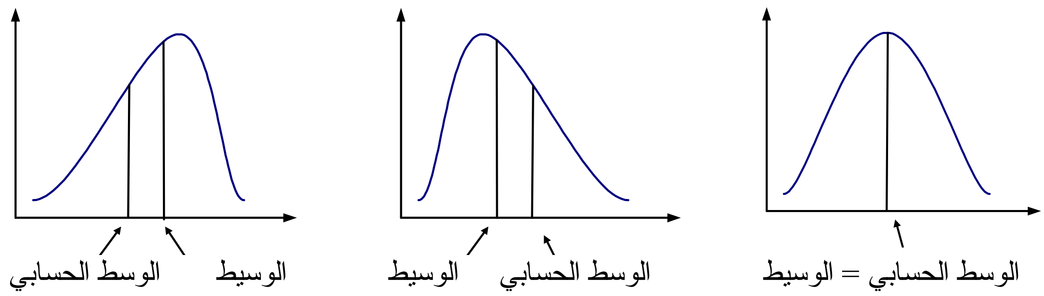


شكل (3 – 3) يمثل المنحنيين الصاعد والهابط لإيجاد الوسيط لأعمار الطلاب بيانياً

أي أن الوسيط هو القيمة عند النقطة c ويساوي تسع سنوات تقريباً .

ملاحظة

يمكن الإشارة إلى أن الوسيط أكبر من الوسط الحسابي في حالة البيانات التي لها منحنيات تكرارية ملتوية نحو اليسار وأصغر من الوسط الحسابي في حالة البيانات التي لها تكرارات ملتوية نحو اليمين ويكون مساوياً للوسط الحسابي في المنحنيات المتماثلة . أنظر الشكل (4 - 3) التالي :



شكل (3 – 4) يمثل وضع الوسيط بالنسبة للوسط الحسابي

(3 – 4 – 2) مميزات الوسيط

1) لا يتأثر بالقيم المتطرفة للبيانات (انظر الملحق).

2) يمكن حساب الوسيط في حالة الجداول التكرارية المفتوحة للبيانات الكمية .

3) يمكن إيجاده في حالة البيانات الوصفية التي يمكن ترتيبها .

4) مجموع الانحرافات المطلقة عن الوسيط أقل ما يمكن ، مقارنة بأي قيمة حقيقية a .

أي أن :

$$\sum\left|x_i - Med\right| \le \sum\left|x_i - a\right|$$

حيث : $a \neq Med$

(3 – 4 – 3) عيوب الوسيط

1) لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه .

2) لا يسهل التعامل معه في التحاليل الإحصائية والرياضية .

(3 – 5) المنوال Mode

هو القيمة الأكثر تكراراً في مجموعة البيانات . قد يكون لمجموعة البيانات منوال واحد وتسمى وحيدة المنوال أو يكون لها أكثر من منوال وتسمى متعددة المنوال وقد لا يكون لمجموعة البيانات منوال و تسمى عديمة المنوال .

مثال (3 – 9)

أحسب المنوال من البيانات التالية :

2, 6, 9, 4, 6, 10, 6

الحـــل

يوجد لهذه البيانات منوال واحد وهي القيمة 6 لأنها تكررت 3 مرات أكثر من غيرها .

مثال (3 – 10)

أحسب المنوال من البيانات التالية :

4, 2, 7, 4, 7, 10, 7

الحـــل

نجد أن القيمة 7 تكررت 3 مرات والقيمة 4 تكررت مرتين وعليه فإن المنوال = 7 .

مثال (3 – 11)

أحسب المنوال من البيانات التالية :

4, 7, 4, 7, 8, 9, 7, 4, 10

الحـــل

نجد من البيانات بأن القيمة 4 تكررت 3 مرات والقيمة 7 تكررت 3 مرات أيضاً ولهذا فإن هذه البيانات يوجد لها منوالان هما : 4 ,7 .

مثال (3 – 12)

أحسب المنوال من البيانات التالية :

4, 9, 8, 12, 11, 7, 15

الحـــل

لا يوجد في هذه البيانات أي قيمة تكررت أكثر من مرة وعليه فإنه لا يوجد منوال لهذه البيانات .

(3 – 5 – 1) المنوال في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية)

في حالة البيانات المبوبة أو الجداول التكرارية لا يمكن القول بأن قيمة معيّنة يكون لها أكبر تكرار لأن القيم تذوب داخل الفئات المختلفة ولذلك يمكن القول بأنه توجد فئات منوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار وفي حالة تساوي تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية مع تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية فإنه يمكن حساب قيمة المنوال بمركز الفئة المنوالية أي في منتصفها وفي حالة عدم تساويهما في التكرار فإنه يمكن حساب المنوال بطريقة حسابية وبيانية كالآتي :

إيجاد المنوال حسابياً

نتبع الخطوات الآتية :

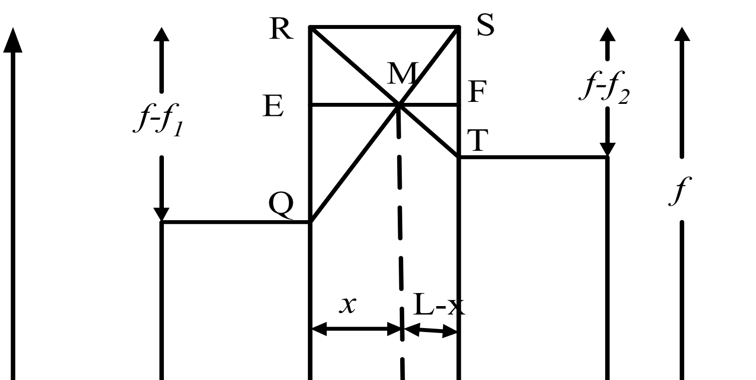
1) نوجد أكبر تكرار f وعليه يمكن إيجاد التكرار السابق له وهو f_1 والتكرار اللاحق له f_2.

2) نأخذ بداية الفئة المنوالية ويرمز له بالرمز A وهي الفئة التي تقابل أكبر تكرار f.

3) نحدد طول الفئة المنوالية L وهو يساوي الفرق بين بداية الفئة المنوالية وبداية الفئة التالية لها ونطبق القانون الآتي :

$$Mod = A + \frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2} . L \qquad (5-3)$$

الإثبات



شكل (3 – 5) يمثل تكرار المتوالي والسابق واللاحق له

ومن تشابه المثلثين MST, MQR في شكل (5 – 3) السابق نحصل على :

$$\frac{x}{f - f_1} = \frac{L - x}{f - f_2}$$

$$x = \frac{f - f_1}{2f - f_2 - f_1} . L$$

أي أن المنوال :

$$Mod = A + x = a + \frac{f - f_1}{2f - f_2 - f_1} L$$

مثال (3– 13)

أوجد المنوال (حسابياً) لأعمار الطلاب في مثال (3 – 2) .

الحـــــل

أعمار الطلاب كما يلي :

فئات الأعمار	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14
التكرار	2	5	8	4	1

من الجدول نجد أن $f = 8, f_1 = 5, f_2 = 4$ وكذلك $A = 8.5$, $L = 10.5 - 8.5 = 2$

ونعوض في قانون المنوال السابق (3 – 5) نحصل على :

$$Mod = 8.5 + \frac{8-5}{16-5-4} x2$$

$$= 9.36 \text{ (سـنة)}$$

إيجاد المنوال بيانياً

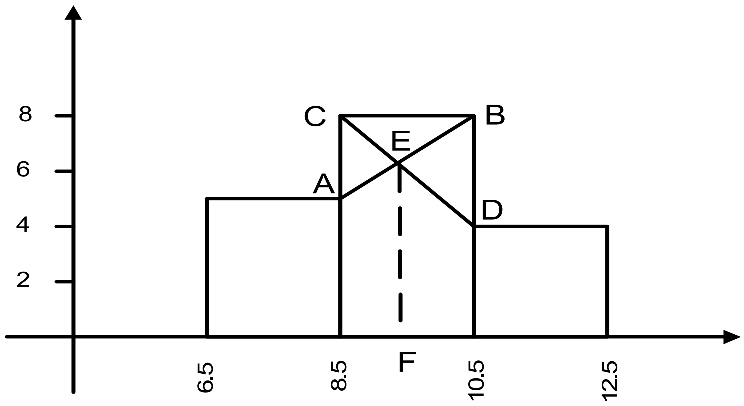
يكفي لإيجاد المنوال بيانياً رسم ثلاث مستطيلات فقط من المدرج التكراري وهي المستطيل الممثل لأكبر تكرار والمستطيل السابق له وكذلك المستطيل اللاحق له ففي شكل (3 – 6) نصل النقطة A بالنقطة B ثم نصل النقطة C بالنقطة D فتكون نقطة E هي نقطة تقاطع المستقيمين CD و AB ويتحدد مكان المنوال بعد إسقاط عمود رأسي من E على محور الفئات الأفقي فتكون نقطة التقاطع F هي قيمة المنوال بيانياً ونوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (3 – 14)

أحسب المنوال بيانياً لأعمار الطلاب في مثال (3– 13) .

الحــل

نرسم ثلاثة مستطيلات من المدرج التكرار كما في شكل (3 – 6) التالي :



شكل (3 – 6) يوضح قيمة المنوال لأعمار الطلاب بيانياً

أي أن المنوال القيمة عند النقطة F ويساوي تسع سنوات تقريباً .

(3 – 5 – 2) مميزات المنوال

1) مقياس سهل حسابه ولا يتأثر بالقيم المتطرفة (انظر الملحق) .

2) يمكن إيجاده للقيم الوصفية والتوزيعات التكرارية المفتوحة .

(3 – 5 – 3) عيوب المنوال

1) في حساب المنوال لا تؤخذ جميع قيم البيانات في الاعتبار.

2) قد يكون لبعض البيانات أكثر من منوال وبذلك لا يمكن تحديد قيمة وحيدة للمنوال.

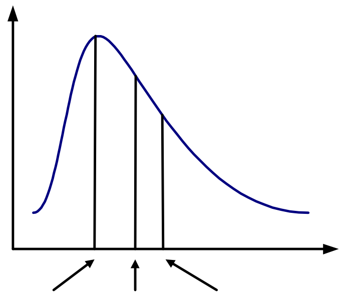
3) في بعض الأحوال قد لا يوجد المنوال.

(3 – 6) العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال

توجد علاقة تجريبية للمقاييس الثلاثة الوسط الحسابي ، والوسيط والمنوال وذلك في حالة التوزيعات التكرارية أحادية المنوال وغير المتماثلة والمتماثلة وذات التواء بسيط وتعطى بالعلاقة الآتية :

$$\frac{(\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال})}{3} = (\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})$$

ولقد وجد أن الوسيط تقع قيمته بين قيمة المنوال والوسط الحسابي كما هو موضح بالرسم ، شكل (3 – 7) التالي :



شكل (3 – 7) يوضح وضع الوسيط بالنسبة للمنوال والمتوسط للمنحنيات ذات الالتواء البسيط

وفي حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة الوحيدة المنوال تنطبق المقاييس الثلاثة الوسط الحسابي ، والوسيط ، والمنوال فتكون قيمة واحدة وفي حالة التوزيعات التكرارية شديدة الالتواء فإن العلاقة السابقة تكون غير صحيحة ولا تصلح للاستخدام في تلك الحالة .

(3 – 7) الوسط الهندسي Geometric Mean

الوسط الهندسي $G.\ M.$ لمجموعة من القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم :

$$G.M. = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \qquad (3-6)$$

يمتاز الوسط الهندسي عن الوسط الحسابي بأنه أقل تأثيراً بالقيم المتطرفة في البيانات لأنه معلوم رياضياً بأن الوسط الهندسي لمجموعة من القيم أقل من وسطها الحسابي وعادة يحسب الوسط الهندسي باستخدام اللوغاريتمات كالتالي :

$$\log G.M. = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right) \qquad (3-7)$$

ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (3 – 15)

أحسب الوسط الهندسي والوسط الحسابي للبيانات :

3, 5, 6, 6, 7, 10, 12

الحــل

باستخدام العلاقة (3 – 6) نحصل على :

$$G.M.=\sqrt[7]{3.5.6.6.7.10.12}$$

وباستخدام اللوغاريتمات كما في العلاقة (3 – 7) يكون الوسط الهندسي :

$$\log G.M.=\frac{1}{7}(\log 3+\log 5+\log 6+\log 6+\log 7+\log 10+\log 12)$$

$$=\frac{1}{7}(0.4771+0.6990+0.7782+0.7782+0.8451+1.0000+1.0729)=0.8081$$

$$=0.8081$$

وعليه فإن : $G.M. = 6.43$

والوسط الحسابي يكون : $\bar{x}=\frac{1}{7}(3+5+6+6+7+10+12)=7$

ونلاحظ أن قيمة الوسط الحسابي $\bar{x}$ الأكبر من الوسط الهندسي $G.M.$ وهذا يوضح حقيقة أن الوسط الهندسي لمجموعة أرقام موجبة غير متساوية ، أقل من وسطها الحسابي .

(3- 7 – 1) الوسط الهندسي في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية)

في هذه الحالة يحسب الوسط الهندسي للفئات التي عددها k ومراكزها هي $x_1, x_2, \ldots , x_k$ وهي التي يقابلها بالترتيب التكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_k$ من القانون الآتي :

$$G.M.=\sqrt[n]{x_1^{f_1}.x_2^{f_2}.....x_k^{f_k}} \qquad (8-3)$$

حيث : $n=\sum_{i=1}^{k} f_i$.

(3 – 8) الوسط التوافقي

يستخدم الوسط التوافقي عندما يكون مقلوب المتغير له دلالة كأن يعين نسبة بين متغيرين مرتبطين مثل السرعة بالنسبة للزمن .

وللوسط التوافقي H لمجموعة n من القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم أي أن :

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \qquad (9-3)$$

$$H = \frac{1}{(1/n)\sum_{i=1}^{n}(1/x_i)} = n/\sum_{i=1}^{n}(1/x_i)$$

ومن الناحية العملية يكون كالتالي :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \qquad (10-3)$$

مثال (3 – 16)

أحسب الوسط التوافقي H للبيانات التالية :

3, 5, 6, 6, 7, 10, 12

الحـــل

باستخدام العلاقة (3 – 10) نحصل على :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{140+84+70+70+60+42+35}{420}\right)$$

$$= \frac{501}{2940}$$

$$\therefore \quad H = \frac{2940}{501} = 5.87$$

ويتضح من المثال السابق أن الوسط التوافق $(H = 5.87)$ أصغر من الوسط الهندسي $(G.M. = 6.43)$ والوسط الحسابي $(\bar{x} = 7)$ لنفس البيانات .

(3 – 8 – 1) الوسط التوافقي في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية)

في هذه الحالة إذا كان لدينا فئات عدد k ولها مراكز فئات : $x_1, x_2, \dots, x_k$ ويقابلها بالترتيب التكرارات : $f_1, f_2, \dots, f_k$ فإن الوسط التوافقي في هذه الحالة يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+\ldots+\frac{f_k}{x_k}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i}{x_i} \qquad (11-3)$$

وحيث أن : $n=\sum_{i=1}^{n} f_i$ هي مجموع التكرارات .

مثال (3 – 17)

أحسب الوسط الهندسي باستخدام العلاقة (3 – 8) ثم أحسب الوسط التوافقي باستخدام العلاقة (3 – 11) ، ثم قارن بينهما وذلك للجدول التكراري التالي الذي يمثل إنتاج 20 مزرعة بالطن لمحصول ما .

الفئات (الإنتاج بالطن)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
التكرار (عدد المزارع)	2	3	8	5	2

الحــل

أولاً : الوسط الهندسي يمكن وضع العلاقة (3 – 8) في الصورة التالية :

$$\log G.M.=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i \log x_i \qquad (12-3)$$

ولسهولة الحل نضع الجدول التالي :

فئات الإنتاج	مركز الفئة x	التكرار f	$f \log x$
1-3	2	2	2 log 2 = 0.206
4-6	5	3	3 log 5 = 2.097
7-9	8	8	8 log 8 = 7.225
10-12	11	5	5 log 11 = 5.207
13-15	14	2	2 log 14 = 2.292
$\sum$		20	17.027

بالتعويض في العلاقة (3 – 12) السابقة من جدول الحــل :

$$\log G.M.=\frac{1}{20}(17.027)=0.85135$$

أي أن الوسط الهندسي $G.M.$ هو :

$$G.M. = 6.924 \text{ طناً}$$

ثانياً : الوسط التوافقي باستخدام العلاقة (3 – 11) ولسهولة الحل نضع الجدول التالي :

$\frac{f}{x}$	$\frac{1}{x}$	التكرار f	مركز الفئة x	فئات الإنتاج
1.00	0.5	2	2	1-3
0.99	0.33	3	5	4-6
1.00	0.125	8	8	7-9
1.00	0.2	5	11	10-12
1.00	0.5	2	14	13-15
4.99		20		

بالتعويض في العلاقة (3 – 11) من جدول الحل نجد أن :

$$\frac{1}{11} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{5} f_i / x_i = \frac{1}{20}(4.92) = 0.2495$$

أي أن الوسط التوافقي H هو :

$$H = 1/0.2495 = 4.008 \quad \text{طناً}$$

يتضح من المثال السابق أن الوسط التوافقي $(H = 4.008)$ أصغر من الوسط الهندسي $(G.M. = 6.924)$.

(3 – 9) الربيعات والعشيرات والمئينات

إذا رتبت عيّنة من المشاهدات حسب قيمها تصاعدياً أو تنازلياً فإن القراءة التي تكون في المنتصف والتي تقسم العينة إلى مجموعتين متساويتين في العدد هي الوسيط كما سبق تعريفه . وبتعميم الفكرة وتقسيم البيانات بعد ترتيبها إلى أربعة أجزاء متساوية فإن نقاط التقسيم يرمز لها بـ Q_1, Q_2, Q_3 حيث Q_1 يسمى الربيع الأول و Q_2 يسمى الربيع الثاني (تساوي الوسيط) و Q_3 يسمى الربيع الثالث .

وكذلك يمكن إيجاد القيم التي تقسم البيانات السابقة بعد ترتيبها إلى عشرة أقسام ونرمز لنقاط التقسيم بـ $D_1, D_2, \ldots\ldots, D_{10}$ حيث يسمى D_1 العُشَيْر الأول وهو يمثل القيمة التي يسبقها عُشْر القراءات و D_2 تسمى العُشَيْر الثاني وهو يمثل القيمة التي يسبقها $(\frac{2}{10})$ من القراءات وهكذا . يمكن إيجاد القيم التي تقسم البيانات السابقة بعد ترتيبها إلى مائة قسم ونرمز لنقاط التقسيم $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{99}$ حيث P_1 يسمى المئين الأول وهو يمثل القيمة التي يسبقها $\frac{1}{100}$ من القراءات و P_2 يسمى المئين الثاني وهو يمثل القيمة التي يسبقها $\frac{2}{100}$ من القراءات وهكذا لباقي المئينات ويعطى قانون حساب العشيرات والمئينات في حالة البيانات المبوبة مثل قانون الوسيط السابق (4 – 3) مع استبدال $\frac{n}{2}$ بـ $\frac{n}{10}$ للعشير الأول ، $\frac{2n}{10}$ للعشير الثاني وهكذا .... واستبدال $\frac{n}{2}$ بـ $\frac{n}{100}$ للمئين الأول ، $\frac{2n}{100}$ للمئين الثاني وهكذا ..... ونوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (3 – 18)

أحسب لأعمار الطلاب في مثال (2 – 3) السابق كل من العشير الثاني والمئين التسعين حسابياً وبيانياً .

الحـــل

المطلوب حسابياً :

الجدول المتجمع الصاعد لأعمار الطلاب كالتالي :

	التكرار المتجمع الصاعد	حدود الفئات		
	0	أقل من	4.5	
f_1	2	أقل من	6.5	
				D_2
f_2	4	أقل من	8.5	
f_1	15	أقل من	10.5	
				P_{90}
f_2	19	أقل من	12.5	
	20	أقل من	14.5	

لإيجاد العشير الثاني D_2 حسابياً نستخدم القانون :

$$D_2 = A + \frac{\frac{2n}{10} - f_1}{f_2 - f_1} L$$

حيث A بداية الفئة للعشير الثاني n مجموع التكرارات f_1 التكرار المتجمع السابق ، f_2 التكرار المتجمع اللاحق ، L طول فئة العشير الثاني .

$$D_2 = 6.5 + \frac{4-2}{7-2}.2 = 6.5 + \frac{4}{5} = 7.3$$

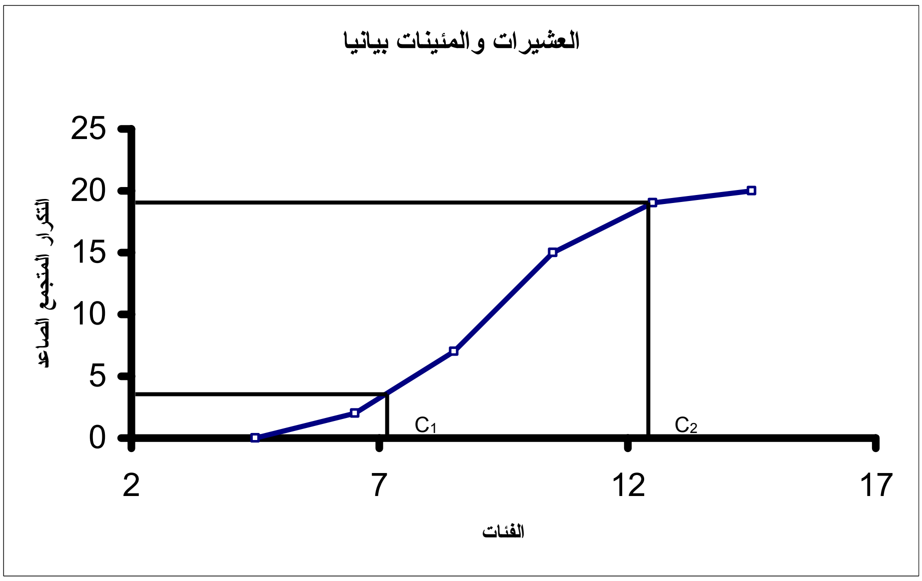
لإيجاد المئين التسعين P_{90} حسابياً نستخدم القانون :

$$P_{90} = A' + \frac{\frac{90n}{100} - f'}{f_2' - f_1'} L$$

$$= 10.5 + \frac{18-15}{19-15} 2 = 10.5 + \frac{6}{4}$$
$$= 12$$

المطلوب بيانياً

نرسم المنحنى المتجمع الصاعد من الجدول المتجمع الصاعد كما في شكل (3 – 8) التالي :



شكل (3 – 8) يبين إيجاد قيمة كل من العشير الثاني والمئين التسعين بيانياً

أي أن قيمة العشير الثاني (D_2) عند النقطة C_1 يساوي 7 تقريباً وكذلك قيمة المئين التسعين (P_{90}) عند النقطة C_2 يساوي 12 تقريباً .

(3 – 10) ملحق 3

حل أمثلة الفصل الثالث باستخدام إكسل:

الوسط الحسابي أو المتوسط:

أدخل البيانات في عامود من صفحة نشر. نوجد متوسط هذه الأعداد بالدالة AVERAGE. لاحظ أن جميع الدوال في إكسل لابد أن تبدأ بعلامة = لكي يعرف إكسل أنه يتعامل مع دالة و إلا سيعتبر أي شيء يكتب إما نصا أو عددا حسب ما يكتب عليه. لاحظ أن دليل الدالة هو مجال البيانات $A$2:$A$16.

C	B	A
=AVERAGE($A$2:$A$16)	المتوسط =	البيان
		2
		10
		15
		8
		6
		17
		2
		10
		3
		9
		5
		9
		1
		10
		13

بالضغط على زر الإدخال ينتج التالي

C	B	A	
8	المتوسط =	البيان	1
		2	2
		10	3
		15	4
		8	5

طرق أخرى لإيجاد المتوسط:

الدالة SUM في إكسل تعطي مجموع أدلتها

	A	B	C
1	البيان	المجموع =	=SUM($A$2:$A$16)
2	2		
3	10		
4	15		
5	8		
6	6		
7	17		

وتعطي النتيجة

	A	B	C
1	البيان	المجموع =	120
2	2		
3	10		
4	15		
5	8		

الدالة COUNT تعطي عدد العناصر أو البيانات في مجال معطى

	A	B	C
1	البيان	المجموع =	=SUM($A$2:$A$16)
2	2	حجم العينة =	=COUNT(A2:A16)
3	10		
4	15		

وتعطي

	A	B	C
1	البيان	المجموع =	120
2	2	حجم العينة =	15
3	10		

نوجد المتوسط بوضع C1/C2= في الخلية C3

	A	B	C
1	البيان	المجموع =	=SUM($A$2:$A$16)
2	2	حجم العينة =	=COUNT(A2:A16)
3	10	المتوسط =	=C1/C2
4	15		
5	8		

ويكون الناتج

	A	B	C
1	البيان	المجموع =	120
2	2	حجم العينة =	15
3	10	المتوسط =	8
4	15		

المتوسط الحسابي للبيانات المجمعة:

مثال (3 – 2)

أحسب متوسط الطلاب $\bar{x}$ للبيانات التالية:

فئات الأعمار	6 - 5	8 - 7	10 - 9	12 - 11	14 - 13
عدد الطلاب	2	5	8	4	1

ندخل البيانات في صفحة من إكسل

	A	B	C
1	مركز الفئة x	التكرار f	fx
2	5.5	2	=B2*A2
3	7.5	5	=B3*A3
4	9.5	8	=B4*A4
5	11.5	4	=B5*A5
6	13.5	1	=B6*A6
7	المجموع =	=SUM(B2:B6)	=SUM(C2:C6)
8	المتوسط =	=C7/B7	

فينتج

C	B	A	
fx	التكرار f	مركز الفئة x	1
11	2	5.5	2
37.5	5	7.5	3
76	8	9.5	4
46	4	11.5	5
13.5	1	13.5	6
184	20	المجموع =	7
	9.2	المتوسط =	8

الوسط المرجح:

أوجد الوسط المرجح $\bar{x}_w$ لدرجات طالب في 3 مواد إذا كانت الدرجات هي 65 و 70 و 40 علما أن ساعات الدراسة لهذه المواد هي على الترتيب 4 و 3 و 2

الحل:

الوسط المرجح يعطى بالعلاقة

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

ونحسب ذلك بواسطة إكسل كالتالي:

D	C	B	A	
wx	الساعات w	الدرجات x		1
=B2*C2	4	65		2
=B3*C3	3	70		3
=B4*C4	2	40		4
=SUM(D2:D4)	=SUM(C2:C4)	=SUM(B2:B4)	المجموع=	5
		=D5/C5	المتوسط المرجح=	6

فينتج

	A	B	C	D
1		الدرجات x	الساعات w	wx
2		65	4	260
3		70	3	210
4		40	2	80
5	المجموع=	175	9	550
6	المتوسط المرجح=	61.11111		

الوسيط:

مثال (3-5):

أوجد الوسيط للبيانات التالية : 63 , 80 , 40 , 72 , 60

الحل بواسطة إكسل:

الدالة MEDIAN في إكسل توجد الوسيط للبيانات المطلوبة

	A	B
1	البيان	الوسيط =
2	63	=MEDIAN(A2:A6)
3	80	
4	40	
5	72	
6	60	

وينتج

	A	B
1	البيان	الوسيط =
2	63	63
3	80	
4	40	
5	72	
6	60	

مثال (3 - 6):

أوجد الوسيط للبيانات 63 , 80 , 40 , 72 , 60 , 72

الحل بواسطة إكسل:

كالسابق ندخل البيانات في صفحة من إكسل

	A	B
1	البيان	الوسيط =
2	63	=MEDIAN(A2:A7)
3	80	
4	40	
5	72	
6	60	
7	72	

فينتج

	A	B
1	البيان	الوسيط =
2	63	67.5
3	80	
4	40	
5	72	
6	60	
7	72	

المنوال:

مثال (3 - 9):

أوجد المنوال للبيانات 6 , 10 , 6 , 4 , 9 , 6 , 2

الدالة MODE توجد منوال لبيانات معطاة

	A	B
1	البيان	المنوال =
2	6	=MODE(A2:A8)
3	10	
4	6	
5	4	
6	9	
7	6	
8	2	

فينتج

B	A	
المنوال =	البيان	1
6	6	2
	10	3
	6	4
	4	5
	9	6
	6	7
	2	8

مثال (3 - 10):

أوجد المنوال للبيانات 7 , 10 , 7 ,4 , 9 ,7 , 2 , 4

B	A	
المنوال =	البيان	1
=MODE(A2:A9)	7	2
	10	3
	7	4
	4	5
	9	6
	7	7
	2	8
	4	9

فينتج

B	A	
المنوال =	البيان	1
7	7	2
	10	3
	7	4
	4	5
	9	6
	7	7
	2	8
	4	9

مثال (3 - 11):

أوجد المنوال للبيانات 10 ,4 ,7 ,9 ,8 ,7 ,4 ,7 ,4

يوجد لهذه البيانات منوالين 4 و 7 . أدرس النتائج التالية وسجل إستنتاجاتك.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	البيان	المنوال =	البيان	المنوال =	البيان	المنوال =	البيان	المنوال =
2	10	4	10	7	7	7	4	4
3	4		7		4		7	
4	7		4		7		4	
5	9		9		4		7	
6	8		8		7		4	
7	7		7		4		7	
8	4		4		7		4	
9	7		7		4		7	
10	4		4					
11								

مثال (3-12):

أوجد المنوال للبيانات 15 ,7 ,11 ,12 ,8 ,9 ,4

	A	B
1	البيان	المنوال =
2	15	=MODE(A2:A8)
3	7	
4	11	
5	12	
6	8	
7	9	
8	4	

لا يوجد منوال لهذه البيانات

	A	B
1	البيان	المنوال =
2	15	#N/A
3	7	
4	11	
5	12	
6	8	
7	9	
8	4	

وهذا يؤكد بالناتج حيث N/A# تعني القيمة غير متوفرة.

الوسط الهندسي:

مثال (3-15):

أحسب الوسط الهندسي للبيانات 12, 10, 7, 6, 6, 5, 3

الدالة GEOMEAN في إكسل تعطي الوسط الهندسي

	A	B
1	البيان	الوسط الهندسي=
2	12	=GEOMEAN(A2:A8)
3	10	
4	7	
5	6	
6	6	
7	5	
8	3	

وتعطي النتيجة

	A	B	
1	البيان	الوسط الهندسي=	
2	12	6.4283	
3	10		
4	7		
5	6		
6	6		
7	5		
8	3		

الوسط التوافقي:

مثال (3-16):

أحسب الوسط التوافقي للبيانات 12, 10, 7, 6, 6, 5, 3

الدالة HARMEAN في إكسل تعطي الوسط التوافقي

	A	B
1	البيان	الوسط التوافقي=
2	12	=HARMEAN(A2:A8)
3	10	
4	7	
5	6	
6	6	
7	5	
8	3	

فينتج

	A	B	
1	البيان	الوسط التوافقي=	
2	12	5.868263	
3	10		
4	7		
5	6		
6	6		
7	5		
8	3		

الربيعات والعشيرات و المئينات:

سوف نستعرض إيجاد الربيعات والعشيرات والمئينات على البيانات التالية:

51	95	70	74	73	90	71	74	90	67
91	72	83	89	50	80	72	84	85	69
62	82	87	76	91	76	87	75	78	79
71	96	81	88	64	82	73	57	86	70
80	81	75	85	74	90	83	66	77	91

ندخل البيانات في صفحة من إكسل

H	G	F	E	D	C	B	A	
					=QUARTILE($A$2:$A$51,1)	الربيع الأول =	الدرجات	1
				(= الوسيط)	=QUARTILE($A$2:$A$51,2)	الربيع الثاني =	51	2
					=QUARTILE($A$2:$A$51,3)	الربيع الثالث =	91	3
Percentile(0)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0)		Min =	=MIN(A2:A51)	=QUARTILE($A$2:$A$51,0)	أقل قيمة =	62	4
Percentile(1)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,1)		Max =	=MAX(A2:A51)	=QUARTILE($A$2:$A$51,4)	أكبر قيمة =	71	5
Percentile(0.1)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.1)	(العشير الأول=)	(المئين العاشر=)				80	6
Percentile(0.2)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.2)	(العشير الثاني=)	(المئين العشرين=)				95	7
Percentile(0.25)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.25)	(الربيع الأول=)					72	8
Percentile(0.3)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.3)	(العشير الثالث=)	(المئين الثلاثين=)				82	9
Percentile(0.4)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.4)	(العشير الرابع=)	(المئين الاربعين=)				96	10
Percentile(0.5)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.5)	(الربيع الثاني=)	(الوسيط=)	(العشير الخامس=)	(المئين الخمسين=)		81	11
Percentile(0.6)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.6)	(العشير السادس=)	(المئين الستون=)				70	12
Percentile(0.7)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.7)	(العشير السابع=)	(المئين السبعون=)				83	13
Percentile(0.75)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.75)	(الربيع الثالث=)					87	14
Percentile(0.8)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.8)	(العشير الثامن=)	(المئين الثمانون=)				81	15
Percentile(0.9)=	=PERCENTILE($A$2:$A$51,0.9)	(العشير التاسع=)	(المئين التسعون=)				75	16

الربيعات والعشيرات والمئينات توجد في إكسل بإستخدام الدالة PERCENTILE والتي لها التركيب

=PERCENTILE('Data Range','Number Between 0 and 1')

كما أن الربيعات يمكن إيجادها بشكل خاص بالدالة QUARTILE

H	G	F	E	D	C	B	A	
					72	الربيع الأول =	الدرجات	1
				(= الوسيط)	78.5	الربيع الثاني =	51	2
					85.75	الربيع الثالث =	91	3
Percentile(0)=	50		Min =	50	50	أقل قيمة =	62	4
Percentile(1)=	96		Max =	96	96	أكبر قيمة =	71	5
Percentile(0.1)=	65.8	(العشير الأول=)	(المئين العاشر=)				80	6
Percentile(0.2)=	70.8	(العشير الثاني=)	(المئين العشرين=)				95	7
Percentile(0.25)=	72	(الربيع الأول=)					72	8
Percentile(0.3)=	73	(العشير الثالث=)	(المئين الثلاثين=)				82	9
Percentile(0.4)=	75	(العشير الرابع=)	(المئين الاربعين=)				96	10
Percentile(0.5)=	78.5	(الربيع الثاني=)	(الوسيط=)	(العشير الخامس=)	(المئين الخمسين=)		81	11
Percentile(0.6)=	81.4	(العشير السادس=)	(المئين الستون=)				70	12
Percentile(0.7)=	84.3	(العشير السابع=)	(المئين السبعون=)				83	13
Percentile(0.75)=	85.75	(الربيع الثالث=)					87	14
Percentile(0.8)=	87.2	(العشير الثامن=)	(المئين الثمانون=)				81	15
Percentile(0.9)=	90.1	(العشير التاسع=)	(المئين التسعون=)				75	16

تأثير القيم المتطرفة على المقاييس المختلفة:

شوهدت البيانات التالية لظاهرة ما:

x: 2, 6, 9, 4, 6, 10, 6, 6, 10

لنفترض انه أثناء إدخال هذه البيانات لغرض تحليلها ادخل الرقم الأخير 100 بدلا من 10 عن طريق الخطأ والتي تعتبر قيمة متطرفة (أحيانا تكون هذه قيمة حقيقية مشاهدة فعلا فالـ 9 بيانات الأولى تمثل دخل 9 موظفين في بنك والقيمة الأخيرة دخل صاحب البنك بآلاف الريالات) ونرمز للبيانات بعد وجود القيمة المتطرفة:

y: 2, 6, 9, 4, 6, 10, 6, 6, 100

الشكل التالي يبين المقاييس المتأثرة بهذه القيمة المتطرفة:

	A	B	C	D	E	F
1	تأثير القيم المتطرفة على مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت					
2	مشاهدات لاتحوي قيم متطرفة			مشاهدات تحوي قيمة متطرفة		
3	x	مقاييس النزعة المركزية		y	مقاييس النزعة المركزية	
4	2.00	Mean =	6.56	2.00	Mean =	16.56
5	6.00	Median =	6.00	6.00	Median =	6.00
6	9.00	Mode =	6.00	9.00	Mode =	6.00
7	4.00	مقاييس التشتت		4.00	مقاييس التشتت	
8	6.00	Range =	8.00	6.00	Range =	98.00
9	10.00	Semi-interquantile Range =	6.00	10.00	Semi-interquantile Range =	6.00
10	6.00	Mean Deviation =	2.07	6.00	Mean Deviation =	18.54
11	6.00	Standard Deviation =	2.70	6.00	Standard Deviation =	31.38
12	10.00	<== قيمة فعلية		100.00	<== قيمة شاذة	

نلاحظ أن المقاييس التي تأثرت بالقيمة المتطرفة هي:

1- من مقاييس النزعة المركزية: الوسط الحسابي.

2- من مقاييس التشتت: المدى والإنحراف المتوسط والإنحراف المعياري.

(3 – 10) تمارين

(1) المتغيران x, y لهما القيم الآتية :

x	1	2	4	-2	5
y	-1	1	5	-7	7

أحسب قيمة كل مما يأتي :

(i) $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2, \sum y^2, \sum y^3, \sum x^3, \sum xy^2$

(ii) $\sum(x+2)(x-2), \sum x(x+4), \sum(x+3)^2, \sum(x+3y)^2, \left(\sum x\right)^2, \left(\left(\sum x\right)+2\right)^2$

(2) إذا كانت c مقداراً ثابتاً وكان المتغير X يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ والمتغير Y يأخذ القيم $y_1, y_2, \ldots, y_n$ فأثبت أن :

(i) $\frac{1}{n}\sum(x+y) = \frac{1}{n}\sum x + \frac{1}{n}\sum y$

(ii) $\sum(cx+y) = c\sum x + \sum y$

(iii) $\sum\left(x - \frac{\sum x}{n}\right)^2 = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}$

(3) أي من العلاقات الآتية صحيحة :

(i) $\sum\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sum y}{\sum x}$

(ii) $\sum xy = \sum x \sum y$

(iii) $\sum(x-c)(x+c) = \sum x^2 - nc^2$

(iv) $\sum(x+y)^2 = \sum x^2 + \sum y^2 + 2\sum xy$

(v) $\left(\sum x\right)^2 = \sum x^2$

(4) فيما يلي أعمار مجموعة من الطلاب بإحدى المدارس الابتدائية

6, 6, 9, 8, 6, 10, 9, 9, 8, 7, 8, 6, 7, 8, 8, 11, 10, 11, 8, 8

أ) أحسب المتوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الطلاب .

ب) أوجد المنوال لأعمار هؤلاء الطلاب .

جـ) أوجد الوسيط لأعمار الطلاب .

د) ما قيمة المقاييس الثلاثة بعد 3 سنوات بفرض بقائهم جميعاً على قيد الحياة .

(5) فيما يأتي درجات أحد الطلاب في 5 امتحانات .

90, 40, 81, 72, 66

أ) أوجد الوسط الحسابي لهذه الامتحانات .

ب) إذا أضفنا درجتين لكل امتحان ما هو الوسط الحسابي للدرجات الجديدة ؟

جـ) إذا ضربنا نتيجة كل امتحان في 2 ما هو الوسط الحسابي للدرجات الجديدة ؟

(6) عند فحص مجموعة من الأرقام يتكون كل منها من رقم واحد كانت البيانات على الصورة التالية :

التكرار	الرقم
8	2
10	3
20	5
20	7
6	8
6	9

أحسب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهذا البيانات .

(7) فيما يلي توزيع درجات 60 طالباً في إحدى الاختبارات :

فئات الدرجات	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94	95-99
عدد الطلاب	3	3	4	6	6	11	9	8	2	4	3	1

أحسب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لدرجات الطلاب .

(8) فيما يلي أطوال مجموعة من الطلاب في إحدى المدارس :

أطوال الطلاب	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
عدد الطلاب	2	0	2	0	3	6	4	3	4	1

أحسب الوسط الحسابي للأطوال وكذلك الوسيط والمنوال .

(9) فيما يلي توزيع الأجر اليومي لعدد من العمال بالريال في أحد المصانع :

فئات الأجر	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
عدد العمال	9	12	15	8	4	2

أ) أحسب الوسط الحسابي لأجور العمال .

ب) أوجد الوسيط والمنوال حسابياً وبيانياً .

جـ) إذا كان الأجر اليومي لكل عامل يزيد بمقدار خمسة ريالات كل ستة شهور فما قيمة المقاييس السبقة بعد السنة ؟

د) أوجد الوسط الهندسي والوسط التوافقي للأجور .

(10) أوجد الوسط الحسابي والوسط الهندسي والتوافقي لمجموعة الأرقام :

0, 2, 4, 6

(11) إذا كانت لدينا البيانات التالية :

2, 10, 15, 8, 6, 17, 2, 10, 3, 9, 5, 9, 1, 10, 13

أ) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

ب) لو أضفنا إلى كل قراءة من القراءات أعلاه مقداراً يساوي 3 فما التغيير الذي يطرأ على مقاييس النزعة المركزية ؟

جـ) لو ضربنا كل قراءة من البيانات أعلاه بالرقم 5 ، فماذا يطرأ من تغيير على البيانات أعلاه ؟

(12) إذا كانت الحمولة القصوى لمصعد الكلية هي 3000 رطلاً فهل تعد الحمولات التالية أكبر من طاقة هذا المصعد .

أ) إذا صعد 13 طالباً وزن كل منهم 165 رطلاً .

ب) إذا صعد 12 طالباً وزن كل منهم 123 رطلاً وتسعة آخرين وزن كل منهم 175 رطلاً .

(13) إذا كانت أسعار أربعة أنواع من الفاكهة 41.0 ,36.6 ,19.6 ,26.5 ريالاً على التوالي للصندوق ، إذا باع تاجر ما 59 صندوقاً من النوع الأول ، 156 صندوقاً من النوع الثاني ، 386 صندوقاً من النوع الثالث ، 8 صناديق من النوع الرابع :

أوجد متوسط سعر البيع للصندوق الواحد .

(14) الجدول التالي يبين متوسط دخل العمال في شركة ما حسب مهنة كل منهم :

نوع العمال	عدد العمال	متوسط الدخل الأسبوعي بالريال
عمال التصنيع	99.900	204.71
عمال المناجم	32.600	285.48
عمال التشييد	40.400	330.22

أوجد متوسط الدخل الأسبوعي للعمال الذين يعملون بهذه الشركة .

(15) فيما يلي تصنيف لعدد أيام الغياب خلال فصل دراسي لشعبة تتضمن 46 طالباً .

عدد أيام الغياب x_i	0	1	2	3	4
عدد الطلاب f_i	20	10	8	5	3

أحسب المنوال والمتوسط والوسيط لعدد أيام الغياب في هذه الشعبة .