الفصل السادس

طـرق العـــد

Counting

لقد سبق لنا دراسة المجموعات وعرفنا كيف يمكن إيجاد عدد عناصرها . وفي معظم الأحوال يكون عدد العناصر كبيراً جداً ويتطلب جهداً كبيراً في كتابته وتكون عرضة للخطأ أثناء كتابته وعدّه . لذلك دعت الحاجة إلى إيجاد طرق رياضية أخرى تساعدنا في إيجاد عدد عناصر المجموعة دون الحاجة إلى كتابة المجموعة بطريقة جدولة العناصر أو غيرها . وهذه الطرق تساعدنا أيضاً في إيجاد عدد الحالات الممكنة لأي تجربة وهي مفيدة في علم الاحتمالات كما سوف يتضح فيما بعد .

(6 – 1) القاعدة الأساسية لطرق العَدّ (قاعدة الضرب وقاعدة الجمع)

إذا كان لدينا عملية تتم على مرحلتين وكانت تتم في المرحلة الأولى بعدد قدره n_1 طريقة وفي المرحلة الثانية تتم بعدد قدره n_2 طريقة فإن عدد الطرق الممكنة لإتمام هذه العملية في المرحلتين معاً هو $n_1 \times n_2$ طريقة ، ونوضح ذلك بالأمثلة التالية :

مثال (6 – 1)

بكم طريقة يمكن أن يختار طالب مقررين الأول للإحصاء والثاني للرياضيات إذا كان يوجد بقسم الإحصاء 5 مقررات تناسب هذا الطالب وبقسم الرياضيات 3 مقررات تناسبه أيضاً .

الحـــل

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر من الإحصاء = 5 طرق .

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر من الرياضيات = 3 طرق .

عدد طرق اختيار الطالب لمقررين الأول من الإحصاء والثاني من الرياضيات

$= 5 \times 3 = 15$ طريقة

مثال (6 – 2)

عند القيام بدراسة طبية صنّفنا المريض طبقاً لنوع فصيلة الدم وهي $A,\ B,\ AB,\ O$ وكذلك بالنسبة لضغط الدم وهو مرتفع ، معتدل ، منخفض . فبكم طريقة يتم تصنيف المريض من حيث فصيلة الدم وضغط الدم معاً ؟

الحـــل

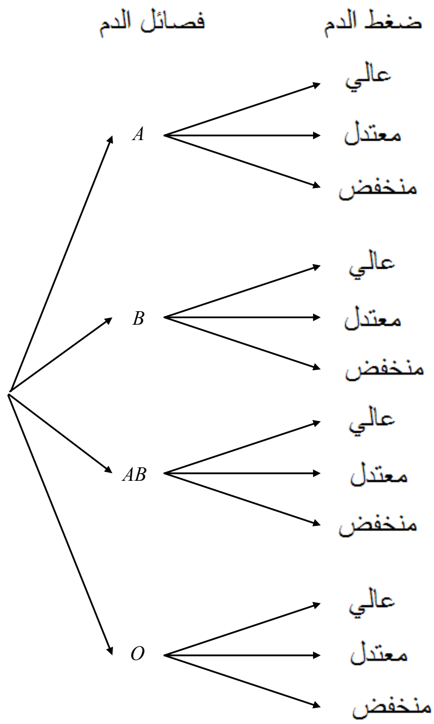
عدد طرق تصنيف فصائل الدم = 4 طرق .

عدد طرق تصنيف أنواع ضغط الدم = 3 طرق .

عدد طرق تصنيف المريض بالنسبة لفصيلة الدم وضغط الدم معاً

$= 4 \times 3 = 12$ طريقة

ويمكن توضيح الحل السابق باستخدام الشجرة البيانية التالية في شكل (6 – 1) .



شكل (6 – 1) يُمثل الشجرة البيانية لفصائل الدم وضغط الدم

فيكون عدد الطرق كالتالي :

(منخفض ,B) و (معتدل ,B) و (عالي ,B) و (منخفض ,A) و (معتدل ,A) و (عالي ,A) و (منخفض ,O) و (معتدل ,O) و (عالي ,O) و (منخفض ,AB) و (معتدل ,AB) و (عالي ,AB) .

ويكون عدد الطرق = 12 طريقة .

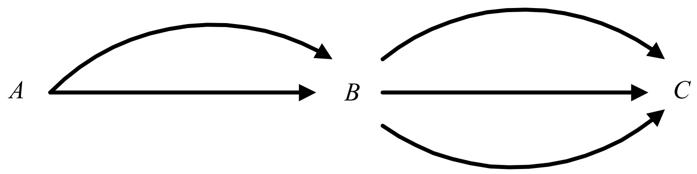
وهي النتيجة الأولى نفسها = 4×3 طريقة .

مثال (6 – 3)

إذا كان لدينا ثلاثة مدن A, B, C وكان هناك طريقان من مدينة A إلى مدينة B وثلاث طرق من مدينة B إلى مدينة C ، فإذا قام شخص من مدينة A إلى مدينة C ماراً بالمدينة B فبكم طريقة يمكن أن يصل هذا الشخص من المدينة A إلى المدينة C .

الحـــل

نوضح الطرق بين المدن الثلاثة A, B, C بالرسم ، شكل (6 – 2) التالي :



شكل (6 – 2) يوضح الطرق المختلفة بين المدن الثلاث

الشخص يمكن أن يصل من A إلى B بعدد طرق قدره طريقان ويصل أيضاً من B إلى C بعدد طرق قدرها 3 طرق .

عدد الطرق للشخص من A إلى C = $2 \times 3 = 6$ طرق .

مثال (6 – 4)

ذهب خالد لشراء سيارة من أحد المعارض ، فوجد فيه أربعة موديلات مختلفة . لها ثلاثة أنواع مختلفة من المحركات ولها ألوان مختلفة عددها 12 لوناً . كم من الخيارات المختلفة (من حيث الموديل واللون والمحرك) المتاحة لاختيار سيارة من المعرض ؟

الحـــل

عدد طرق اختيار الموديل = 4 طرق .

عدد طرق اختيار المحرك = 3 طرق .

عدد طرق اختيار اللون = 12 طريقة .

عدد طرق اختيار خالد لواحدة من السيارات بالمعرض

= $4 \times 3 \times 12 = 144$ طريقة

ويمكن تعميم عدد طرق الاختيار في r من المراحل كالتالي :

قاعدة الضرب

إذا كان لدينا الاختيار في المرحلة الأولى بعدد قدره n_1 طريقة وفي المرحلة الثانية n_2 طريقة ... والمرحلة الأخيرة n_r طريقة ، فيكون عدد الطرق المختلفة الكلية $= n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ طريقة.

إذا كانت العملية A تتم بطريقة واحدة من n_1 طريقة والعملية B تتم بطريقة واحدة من n_2 طريقة وكانت العمليتان متنافيتان فإن عدد طرق إتمام عملية منها أو الأخرى هو حاصل الجمع $n_1 + n_2$.

مثال (6 – 5)

بكم طريقة يمكن أن يختار طالب مقرراً واحداً من الإحصاء أو الرياضيات . إذا كان يوجد بقسم الإحصاء 3 مقررات تناسب هذا الطالب وبقسم الرياضيات 4 مقررات تناسبه أيضاً .

الحـــل

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر من الإحصاء = 3 طرق .

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر من الرياضيات = 4 طرق .

عدد طرق اختيار الطالب لمقرر واحد من الإحصاء أو من الرياضيات

= $3 + 4 = 7$ طرق .

ويمكن تعميم القاعدة السابقة في r من العمليات المتنافية كالتالي :

قاعدة الجمع

إذا كان الاختيار في العملية الأولى بعدد طرق قدرة n_1 وفي العملية الثانية n_2 ..... والعملية الأخيرة بعدد n_r طريقة فيكون عدد الطرق الكلية $= n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ طريقة.

(2 – 6) التباديل **Permutation**

هي ترتيبة لعدة أشياء مختلفة بأخذها كلها أو بعضها في كل مرة مع مراعاة الترتيب . وعدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة يساوي عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من n من الأشياء بحيث يحتوي كل ترتيب على r من هذه الأشياء . وقبل كتابة قانون التباديل نعتبر المثال التالي :

مثال (6 – 6)

إذا كان لدينا الحروف الثلاثة a, b, c أوجد عدد الطرق الممكنة لتكوين حرفين من هذه الحروف بحيث لا يتكرر أي حرف أي مرة .

الحـــل

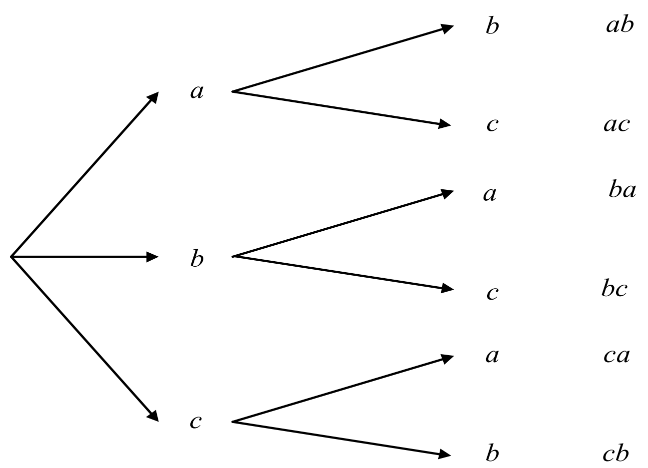
يكون عدد التراتيب أو التباديل هو :

$$ab, ac, bc, cb, ca, ba$$

عدد التراتيب (التباديل) = 6 ترتيبة .

ويمكن توضيح ذلك بالشجرة البيانية التالية ، شكل (6 – 3) :

الحرفان معا   الحرف الثاني   الحرف الأول



شكل (6 – 3) يمثل الشجرة للتباديل المختلفة للحروف a, b, c

عدد طرق ترتيب حرفين من ثلاث حروف = 6 طرق .

وعلى حسب القاعدة الأساسية لطرق العدّ يمكن اختيار الحرف الأول بطرق عددها 3 والحرف الثاني بطرق عدد 2 فيكون عدد الطرق الممكنة = $6 = 2 \times 3$.

وبوجه عام عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة سوف يرمز له بالرمز $^{n}P_r$ ويعطى بالعلاقة التالية :

$$^{n}P_r = n\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(n-r+1\right)$$

الإثبات

يمكن اختيار العنصر الأول في الترتيبة بعدد n طريقة .

ويمكن اختيار العنصر الثاني في الترتيبة بعدد $(n - 1)$ طريقة .

ويمكن اختيار العنصر الرائي في الترتيبة بعدد $(n - r + 1)$ طريقة .

وباستخدام القاعدة الأساسية للعدّ فإن عدد الطرق الكلية يساوي :

$$n\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(n-r+1\right)$$

أي أن :

$$^{n}P_r = n\,(n-1)\,(n-2).....(n-r+1) \qquad (1\text{-}6)$$

وعندما $r = n$ فإن المعادلة (1 - 7) تصبح :

$$^{n}P_n = n! \qquad (2\text{-}6)$$

أي أن :

$$n! \;=\; n\;(n\text{-}1)\;(n\text{-}2)\cdots\;3\;\times\;2\;\times\;1$$

وتسمى $^{n}P_n$ عدد الترتيبات الممكنة لجميع الأشياء .

مثال (6 – 7)

أوجد قيم !5 و $^{5}P_2$ و $^{6}P_3$

الحـــــل

$$^{6}P_3 = 6\times5\times4$$

$$^{5}P_2 = 5\times4 \;=\; 20$$

$$5! = 5\times4\times3\times2\times1 \;=\; 120$$

ويمكن وضع العلاقة (6 – 1) على الصورة التالية :

$$^{n}P_r = \frac{n\,(n-1)\,(n-2).....(n-r+1)\,(n\text{-}r)!}{(n\text{-}r)!}$$

أي أن :

$$^{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (3-6)$$

مثال (6 – 8)

أوجد قيمة !0 (مضروب الصفر) .

الحـــــل

بوضع $r = n$ في العلاقة (6 – 3) نحصل على :

$$^{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{n!}{0!}$$

ولكن $^{n}P_{r}=n!$

$$n!=\frac{n!}{0!}$$

$$0!=\frac{n!}{n!}=1$$

أي أن !0 يساوي الواحد الصحيح .

مثال (6 – 9)

بكم طريقة يمكن أن يجلس ثلاثة أشخاص على ثلاثة مقاعد في صف واحد ؟

الحـــل

المقعد الأول يمكن أن يملأ بثلاثة أشخاص والثاني يمكن أن يملأ بشخصين والثالث يملأ بشخص واحد .

عدد طرق جلوس الأشخاص الثلاثة $= 3 \times 2 \times 1 = 6$ طرق .

ويمكن الحصول على النتيجة نفسها باستخدام $^{n}P_{n}$ حيث $n = 3$ فيكون عدد طرق جلوس الأشخاص الثلاثة $^{3}P_{3} =$

$= 3!$

$= 3 \times 2 \times 1 = 6$ طرق .

(6 – 3) تطبيق على التباديل

هناك تطبيقات كثيرة للتباديل نذكر بعضاً منها لأهميته في دراسة علم الاحتمالات . وهو إيجاد عدة طرق لاختيار شيء ما مرة أو أكثر من مرة من مجموعة أشياء متماثلة مثل اختيار كرة من صندوق به مجموعة كرات أو سحب بطاقة من حزمة بطاقات . أو سحب بعض قطع من إنتاج معين لفحصها لمعرفة ما إن كانت سليمة أو معيبة . ونأخذ على سبيل المثال حساب عدد الطرق التي يتم بها سحب كرة واحدة من صندوق به مجموعة كرات متماثلة أو عدد طرق سحب كرتين أو أكثر . وبصورة عامة ما هو عدد الطرق التي يتم بها سحب r كرة بالتتالي من صندوق به n من الكرات المتماثلة ؟ ولدراسة هذا الموضوع ينبغي علينا أن نعرف أن السحب يتم بطريقتين مختلفتين الأولى تسمى السحب بإحلال (بإرجاع) والثانية السحب بدون إحلال (بدون إرجاع) وسوف نتناول كل واحدة بالتفصيل كما يلي :

(6 – 3 – 1) السحب بإحلال أو بإرجاع

عند سحب r كرة من صندوق به n من الكرات فإنه إذا سحبت الكرة الأولى تعاد إلى الصندوق قبل إجراء السحب الثاني وهكذا لباقي السحب . هذه الطريقة تسمى بالسحب بإحلال ولحساب عدد الطرق بهذه الطرقة يتم التالي :

عدد الطرق التي يتم بها السحب الأول يساوي n طريقة ، عدد الطرق التي يتم بها السحب الثاني يساوي n طريقة أيضاً ، وهكذا . وأن عدد الطرق التي يتم بها السحب r يساوي n طريقة أيضاً ، وباستخدام القاعدة الأساسية لطرق العد (قاعدة الضرب) يكون عدد الطرق التي يتم السحب بها r مرة هو :

$$\underbrace{n \times n \times ..... \times n}_{r} = n^r \qquad (4- 6)$$

مثال (6 – 10)

وعاء به 15 كرة ما هو عدد طرق سحب كرتين بإرجاع .

الحـــــل

باستخدام القاعدة السابقة للسحب بإحلال .

حيث $n = 15$, $r = 2$ يكون :

$n^r = 15^2 = 225$ مرة

(6 – 3 – 2) السحب بدون إحلال أو بدون إرجاع

يقال إن السحب يتم بدون إحلال إذا لم يتم إعادة أي سحبة من عناصر العينة المسحوبة إلى المجتمع المسحوب منه العينة . فإذا كان المطلوب سحب عدد r من الكرات مثلاً من صندوق به n من الكرات المتماثلة فإن حساب عدد الطرق يتم في هذه الحالة كما يلي :

عدد طرق سحب الكرة الأولى = n طريقة .

وعدد طرق سحب الكرة الثانية بدون إرجاع الكرة الأولى = n -1 طريقة .

وهكذا لباقي السحب فيكون عدد طرق سحب الكرة الرائية بدون إرجاع هي $(n\text{-}r\text{+}1)$.

وحسب القاعدة الأساسية لطرق العد يكون :

عدد الطرق الكلية لسحب r كرة من n كرة بدون إرجاع يساوي :

$n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots\,(n-r+1)$ أي أن عدد الطرق = ${}^{n}P_{r}$

مثال (6 – 11)

أوجد عدد طرق سحب كرتين بدون إحلال من مثال (6 – 10) .

الحـــــل

عدد الطرق = ${}^{n}P_{r}$

حيث $n = 15$, $r = 2$

طرقة $\quad {}^{15}P_{2} = 15 \times 14 = 210$

ملحوظة مهمة :

تسمى طرق الإحلال أو بدون إحلال بالعينات المرتبة .

(6 – 4) التوافيق Combinations

التوفيقه هي كل مجموعة يمكن اختيارها من عدة أشياء مختلفة يأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة الترتيب في تلك المجموعة فإذا كان لدينا n من الأشياء المختلفة فإن عدد التوافيق التي يمكن تكوينها بحيث تحتوي كل توفيقه على r من هذه الأشياء سوف يرمز له بالرمز $\binom{n}{r}$

ويمكن إيجاد علاقة بين ${}^{n}P_{r}$, $\binom{n}{r}$ كما يلي :

حيث إن كل توفيقه تحتوي r من الأشياء فإنـه يمكن تبديل هذه الأشياء بعدد $r!$ طريقة

وبذلك يكون عدد التباديل في جميع التوافيق هو $\binom{n}{r}\,(r!)$

$${}^{n}P_{r} = r!\binom{n}{r}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{{}^{n}P_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-1)} \qquad (5-6)$$

مثال (6 – 12)

أوجد قيم التوافيق التالية :

$$\binom{5}{3},\binom{6}{4},\binom{4}{0},\binom{7}{7}$$

الحـــــل

باستخدام العلاقة (6 – 5) نحصل على :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10, \quad \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1, \quad \binom{7}{7} = \frac{7!}{7!0!} = 1$$

ويمكن استنتاج بعض العلاقات التالية للتوافيق :

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \qquad 0 \le r \le n \qquad (6-6)$$

مثال (6 – 13)

أوجد عدد طرق اختيار حرفين من الحروف A, B, C بدون ترتيب .

الحـــــل

طرق اختيار حرفين بدون ترتيب هو :

$$AB, BC, AC$$

ويكون عدد الطرق = 3 طرق .

ويمكن الحصول على النتيجة نفسها باستخدام التوافيق $\binom{n}{r}$ حيث $n = 3$, $r = 2$.

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3 \quad \text{طـــرق}$$

مثال (6 – 14)

أوجد عدد طرق اختيار كرتين من صندوق يحتوي على 15 كرة بدون ترتيب .

الحـــل

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{13!\ 2!} = \frac{15\times 14}{2} = 105 \quad \text{طريقة}$$

(6 – 4 – 1) التباديل داخل أشياء متساوية

نفرض أن لدينا n من الأشياء تحتوي على r من المجموعات كل مجموعة يوجد فيها الأشياء نفسها فإذا كان عدد هذه الأشياء في المجموعات هو $n_1, n_2, \ldots, n_r$ (حيث $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$) فسوف نبحث الآن في إيجاد عدد التبديلات الممكنة داخل الأشياء كلها .

عدد طرق اختيار n_1 من الأشياء n هو $\binom{n}{n_1}$.

فيكون الباقي هو $n - n_1$ وبذلك يكون عدد طرق اختيار n_2 من $n - n_1$ هو $\binom{n-n_1}{n_2}$

وهكذا فيكون عدد الطرق المختلفة هو :

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{r-2}}{n_{r-1}}$$

وباستخدام مفكوك $\binom{n}{r}$ في العلاقة السابقة نحصل على أن عدد التبديلات هو :

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_r!}$$

مثال (6 – 15)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة *Probability* ؟

الحـــل

نجد أن الحرف (b) مكرراً مرتين والحرف (i) مكرر مرتين فيكون عدد الترتيب أو التباديل لكلمة $Probability = \frac{11!}{2!\ 2!}$

$= 9979200$ تبديلة

مثال (6 – 16)

موقف مخصص لثماني سيارات مكونة من صف واحد بكم طريقة يمكن وضع 4 سيارات مازدا ، 3 سيارات تويوتا ، سيارة واحدة مرسيدس .

الحـــــل

$$\text{عدد الطرق الممكنة} = \frac{8!}{4!\ 3!\ 1!} = 280 \ \text{طريقة}$$

ملحق 6 (6 - 5)

أمثلة على طرق العد باستخدام Excel:

التباديل:

يمكن إيجاد تباديل n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة باستخدام الدالة:

PERMUT(number,number_chosen)

حيث $n =$ number و $r =$ number_chosen.

مثال (6- 6)

عدد الطرق الممكنة لتكوين حرفين من ثلاثة حروف بحيث لا يتكرر الحرف إلا مرة واحدة.

الحل:

أدخل التالي في صفحة من إكسل:

	A	B
1	*n* =	3
2	*x* =	2
3	Permutation 0f 2 out of 3 =	=PERMUT(3,2)
4		

فينتج التالي:

	A	B
1	*n* =	3
2	*x* =	2
3	Permutation 0f 2 out of 3 =	6

أي أن هناك 6 طرق لإختيار 2 من الأشياء من أصل 5 أشياء.

ويمكن إيجاد نفس النتيجة من تعريف التباديل:

$$^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بإستخدام الدالة:

FACT(number)

وهي مضروب number أي فإذا كان $n =$ number فإن

$\text{FACT}(n) = n!$

أدخل التالي في صفحة من إكسل:

	A	B
1	*n* =	3
2	*x* =	2
3	Permutation 0f 2 out of 3 =	=FACT(B1)/FACT(B1-B2)
4		

فينتج التالي:

	A	B
1	*n* =	3
2	*x* =	2
3	Permutation 0f 2 out of 3 =	6

و هي نفس النتيجة السابقة.

مثال (6 – 7)

اوجد قيم !5 و ${}^{5}P_{2}$ و ${}^{6}P_{3}$

الحل:

أدخل التالي في صفحة من إكسل:

	A	B	C
1	*n* =	5	6
2	*x* =	2	3
3	Factorial 5 =	=FACT(B1)	
4	Permutation 0f 2 out of 5 =	=PERMUT(B1,B2)	
5	Permutation 0f 3 out of 6 =	=PERMUT(C1,C2)	
6			
7			

فينتج:

	A	B	C
1	*n* =	5	6
2	*x* =	2	3
3	Factorial 5 =	120	
4	Permutation 0f 2 out of 5 =	20	
5	Permutation 0f 3 out of 6 =	120	
6			

أي أن

$$5! = 120$$
$${}^{5}P_{2} = 20$$
$${}^{6}P_{3} = 120$$

مثال (6 – 9)

أوجد !0

الحل:

في صفحة من إكسل أدخل التالي:

	A	B
1	*n* =	0
2	Factorial 0 =	=FACT(B1)
3		

وينتج:

	A	B
1	*n* =	0
2	Factorial 0 =	1

مثال (6 – 9)

عدد الطرق اللتي يجلس بها 3 أشخاص على 3 مقاعد في صف واحد؟

الحل:

في صفحة من إكسل أدخل التالي:

	A	B
1	*n* =	3
2	Permutation of 3 out of 3 =	=PERMUT(B1,B1)
3		

فينتج:

	A	B
1	*n* =	3
2	Permutation of 3 out of 3 =	6
3		

مثال (6 – 11)

عدد طرق سحب كرتين بدون إحلال (إرجاع)

الحل:

عدد الطرق = ${}^{n}P_{r}$

في صفحة من إكسل أدخل التالي:

	A	B
1	n =	15
2	r =	2
3	Permutation of 2 out of 15 =	=PERMUT(B1,B2)
4		

فينتج:

	A	B
1	n =	15
2	r =	2
3	Permutation of 2 out of 15 =	210
4		

التوافيق:

يمكن إيجاد توافيق n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة بإستخدام الدالة:

COMBIN(number,number_chosen)

حيث n = number و r = number_chosen.

مثال (6 – 12)

أوجد $\binom{7}{7},\binom{4}{0},\binom{6}{4},\binom{5}{3}$

الحل:

أدخل التالي في صفحة من إكسل:

	A	B	C	D	E
1	n =	5	6	4	7
2	r =	3	4	0	7
3	Combination =	=COMBIN(B1,B2)	=COMBIN(C1,C2)	=COMBIN(D1,D2)	=COMBIN(E1,E2)
4					

في إكسل أدخلنا السطر الأول والثاني كما هو موضح. ندخل الدالة كما في الخانة B3 ثم ننسخها للخانات C3 و D3 و E3 فينتج:

	A	B	C	D	E
1	n =	5	6	4	7
2	r =	3	4	0	7
3	Combination =	10	15	1	1
4					

أي أن

$$\binom{5}{3}=10,\binom{6}{4}=15,\binom{4}{0}=1,\binom{7}{7}=1$$

مثال (6 – 13)

عدد طرق إختيار 2 حرف من 3 أحرف بدون ترتيب.

الحل:

عدد الطرق $= {}^{3}P_{2}$

أدخل التالي في صفحة من إكسل:

	A	B
1	*n* =	3
2	*r* =	2
3	Combination of 2 out of 3 =	=COMBIN(B1,B2)

فينتج:

	A	B
1	*n* =	3
2	*r* =	2
3	Combination of 2 out of 3 =	3

أي أن

$${}^{3}P_{2} = 3$$

مثال (6 – 14)

عدد طرق إختيار 2 كرة من 15 كرة بدون ترتيب.

الحل:

عدد الطرق $= {}^{15}P_{2}$

	A	B
1	*n* =	15
2	*r* =	2
3	Combination of 2 out of 15 =	105

أي أن

$${}^{15}P_{2} = 105$$

التباديل داخل أشياء متساوية:

عدد طرق إختيار $n_1, n_2, \ldots, n_r$ من الأشياء من $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ هو

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

ويعطى بالدالة:

MULTINOMIAL(number_1,number_2,…,number_r)

مثال (6 – 15)

عدد طرق ترتيب حروف الكلمة *Probability*

الحل:

هناك 2 حرف تتكرر 2 مرة وبقية الحروف تتكرر 1 مرة واحدة. أي المطلوب إيجاد

$$\frac{11!}{2!2!1!1!1!1!1!1!1!}$$

ونوجد هذا في إكسل كالتالي:

	A	B
1	n =	11
2	n_1 =	2
3	n_2 =	2
4	n_3 =	1
5	n_4 =	1
6	n_5 =	1
7	n_6 =	1
8	n_7 =	1
9	n_8 =	1
10	n_9 =	1
11	*Number of the combinations* =	=MULTINOMIAL(B2:B10)

وتكون النتيجة:

	A	B
1	n =	11
2	n_1 =	2
3	n_2 =	2
4	n_3 =	1
5	n_4 =	1
6	n_5 =	1
7	n_6 =	1
8	n_7 =	1
9	n_8 =	1
10	n_9 =	1
11	*Number of the combinations* =	9979200

لاحظ في الحل النظري استخدمنا الصيغة $\frac{11!}{2!2!}$ ولكن في إكسل لابد من إستخدام الصيغة $\frac{11!}{2!2!1!1!1!1!1!1!1!}$ لأن في إكسل الرقم 11 لايدخل بل يتحصل عليه من مجموع الأرقام التي مضروباتها في المقام ففرضا لو استخدمنا الصيغة $\frac{11!}{2!2!}$ فإن إكسل سيعطي $\frac{4!}{2!2!}$ وليس $\frac{11!}{2!2!}$.

طبعا يمكن إيجاد القيمة مباشرة بدون إدخال قيم في خلايا بإستخدام الأمر

= MULTINOMIAL(2,2,1,1,1,1,1,1,1)

كالتالي:

A1 =MULTINOMIAL(2,2,1,1,1,1,1,1,1)

	A	B	C	D	E	F
1	9979200					

مثال (6 – 16)

بكم طريقة يمكن توقيف 8 سيارات في موقف مكون من صف واحد إذا كان 4 سيارات من النوع مازدا و 3 من النوع تويوتا و 1 سيارة مرسيدس؟

الحل:

المطلوب إيجاد $\frac{8!}{4!3!1!}$

ونوجد المطلوب كالتالي:

	A	B
1	*n* =	8
2	n_1 =	4
3	n_2 =	3
4	n_3 =	1
5	*Number of the combinations* =	=MULTINOMIAL(B2:B4)

والنتيجة:

	A	B
1	*n* =	8
2	n_1 =	4
3	n_2 =	3
4	n_3 =	1
5	*Number of the combinations* =	280

أو مباشرة

A1 =MULTINOMIAL(4,3,1)

	A	B	C	D	E
1	280				

(6 – 6) تمارين

(1) أحسب كلاً من :

$$7!\ ,\ 5!\ ,\ \frac{10!}{9!}\ ,\ {}^{10}P_{10}\ ,\ {}^{10}P_{0}\ ,\ \binom{7}{2},\binom{7}{4},\binom{8}{0},\binom{8}{3}$$

(2) إذا كان لدينا الحروف a, b, c, d فبكم طريقة يمكن تكوين ثلاثة حروف في كل من الحالتين التاليتين :

i) بأخذ الترتيب في الاعتبار .

ii) بدون أخذ الترتيب في الاعتبار .

(3) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة *Statistics* .

(4) لدينا الأرقام التالية : 5 ,4 ,3 ,2 ,1 بفرض عدم السماح بالتكرار أوجد التالي :

i) كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام .

ii) كم عدداً يمكن تكوينه بحيث يكون اقل من 300 .

iii) كم عدداً يمكن تكوينه بحيث يكون عدداً زوجياً .

(5) بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة من الأمريكيين ، وثلاثة من الفرنسيين في الحالتين التاليتين :

i) في صف واحد .

ii) حول مائدة مستديرة .

(6) صندوق به 9 كرات بكم طريقة يمكن اختيار عينة مكونة من ثلاث كرات في الحالتين التاليتين :

i) بإحلال .

ii) بدون إحلال .

(7) في أحد الامتحانات لمقرر 101 إحص كان عدد الأسئلة ستة والمطلوب الإجابة على خمسة .

i) بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار خمسة أسئلة .

ii) إن كان السؤال الأول والثاني إجباري ، بكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة الخمسة .

(8) المجموعة A تحتوي على n عنصراً ، باستخدام التوافيق أوجد عدد المجموعات الجزئية المحتوية على r عنصراً من عناصر هذه المجموعة .

(9) بكم طريقة يمكن سحب ورقتين من أوراق اللعب في الحالات التالية :

i) بحيث يكون لونهما أحمر .

ii) بحيث يكون لونهما أسود .

iii) واحدة لونها أسود والثانية لونها أحمر .

iv) بحيث يكونان من اللون نفسه .

(10) بكم طريقة يمكن اختيار طالبين من بين 5 طلاب ؟

(11) بكم طريقة يمكن تقسيم 10 طلاب إلى مجموعتين بحيث تشمل كل مجموعة 5 طلاب .

(12) يوجد بين المدينتين A و B أربعة طرق وبين المدينتين B و C ثلاثة طرق ، بكم طريقة يمكن لشخص إذا قام من A أن يصل إلى C ماراً بالمدينة B ؟

(13) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة " سلسبيل " ؟

(14) إذا علم أن أرقام الهواتف الداخلية في جامعة الملك سعود مؤلفة من خمسة أرقام تبدأ دائماً من اليسار بالرقم 7 فما هو عدد الهواتف التي يمكن تركيبها في الحالتين :

i) التكرار ممكن .

ii) التكرار غير ممكن .

(15) تريد مصلحة المرور في إحدى المدن تصميم لوحات معدنية لأرقام السيارات بحيث تحتوي اللوحة على ثلاثة حروف عربية متبوعة بثلاث أرقام عربية بحيث لا يكون الصفر هو الرقم الأخير .

أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التي يمكن أن تصدرها هذه المصلحة علماً بأن عدد الحروف العربية هو 28 حرفاً وعدد الأرقام هو عشرة أرقام .

(16) لدينا تسعة طلاب منهم ستة سعوديون وثلاثة غير سعوديين ، نريد اختيار وفد من أربعة طلاب .

i) ما عدد الطرق الممكنة لاختيار الوفد .

ii) ما عدد الطرق الممكنة لاختيار الوفد إذا كان اثنان منهم غير سعوديين .

iii) ما عدد الطرق الممكنة للاختيار إن كان الوفد يحتوي على اثنين على الأكثر من غير السعوديين .

(17) أثبت أن : $\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x} = 2^n$

(18) أكمل ما يلي :

أ - عدد الطرق المختلفة لاختيار لجنة من ثلاثة أشخاص من بين 9 أشخاص هو ....

ب - عدد الطرق المختلفة لترتيب حروف كلمة " *committee* " = ...

جـ - .... ${}^{15}P_2$ و .... = $\binom{15}{2}$.

د - عدد التباديل المختلفة لحروف كلمة " ثرثرة " هي .