382 ريض - التحليل الحقيقي (1)
الفصل الدراسي الأول 1435 - 1436 هـ
الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

أجب عن الأسئلة الأربعة التالية

(1) السؤال الأول (خمس درجات) :

(أ) هات مثالاً لما يلي :

- متتالية محدودة وليست متقاربة .
- متتالية متقاربة وليست مطردة .
- متتالية ليست محدودة ولها متتالية جزئية متقاربة .

(ب) إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{5}\}$ احسب $\sup(A)$ و $\inf(A)$.

(ج) احسب نقاط تراكم المجموعة $A = [0,1) \cup \{2\} \cup (3,4)$.

(2) السؤال الثاني (خمس درجات) :

(أ) إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين ومحدودتين من أعلى فأثبت أن
$\sup(A \cup B) = max\{\sup(A), \sup(B)\}$

(ب) أثبت أن مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ قابلة للعد .

(3) السؤال الثالث (سبع درجات) :

(أ) إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة إلى العدد $x \neq 0$
فأثبت باستخدام التعريف أن المتتالية $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ تتقارب إلى العدد $\frac{1}{x}$.

(ب) أذكر نص نظرية الحصر للمتتاليات وبرهنها .

(ج) احسب $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$

(4) السؤال الرابع (ثمان درجات) :

(أ) إذا كانت (x_n) متتالية متزايدة ومحدودة من أعلى فأثبت أنها متقاربة .

(ب) إذا كانت (x_n) معرفة كالتالي $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$
أدرس تقارب المتتالية (x_n) .

(ج) أثبت أن أي متتالية متقاربة هي من نوع كوشي .

(د) إذا كانت المجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ لها نقطتي تراكم مختلفتين فأثبت أن المتتالية (x_n) ليست من نوع كوشي .

382 ريض - التحليل الحقيقي (1)
الفصل الدراسي الأول 1435 - 1436 هـ
الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

أجب عن الأسئلة الثلاثة التالية

(1) السؤال الأول (**01** درجات) :

(i) احسب النهايتين التاليتين إن وجدتا

- $\lim_{x\to 0} x\, sgn(x)$
- $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$

(ii) إذا كانت $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = k$ حيث $k \in \mathbb{R}$

فأثبت أن $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(ax)}{x} = ak$ حيث $a \neq 0$

(iii) إذا كانت f دالة متناقصة وغير محدودة من أسفل على الفترة (a,b) ، أثبت أن $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

(2) السؤال الثاني (8 درجات) :

(i) أعط مثالاً لما يلي :

- دالة متصلة لا تحقق قيمتيها العظمى والصغرى المطلقة على مجالها .
- دالة متصلة بينما دالتها العكسية غير متصلة .
- دالتان مختلفتان f و g متصلتان بانتظام على D بينما fg غير متصلة بانتظام على D .

(ii) إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتان بحيث $f(D) \subseteq E$ وكانت f متصلة عند $c \in D$ و g متصلة عند $f(c) \in E$ ، فأثبت أن $g \circ f$ متصلة عند $c \in D$.

(iii) ناقش (مع تبرير الإجابة) اتصال الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , \quad x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

(3) السؤال الثالث (7 درجات) :

(i) ناقش (مع تبرير الإجابة) انتظام اتصال الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ على

- $D = [0, \infty)$
- $D = (1, 2)$

(ii) اذكر نص نظرية القيمة البينية وبرهنها .

(iii) إذا كانت f و g دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$ وكانت $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث $a < b$ وكانت $f(a) < g(a)$ و $f(b) > g(b)$
فأثبت وجود $c \in \mathbb{R}$ بحيث $f(c) = g(c)$

382 ريض - التحليل الحقيقي (1)
الفصل الدراسي الأول 1435 - 1436 هـ
الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

أجب عن الأسئلة الأربعة التالية :

(1) السؤال الأول (9 درجات) :

(i) أعط مثالاً لما يلي :

- متتالية غير محدودة ولها متتالية جزئية متقاربة .
- مجموعة لها نقطتي تراكم فقط .

(ii) إذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين من نوع كوشي فأثبت أن $(x_n y_n)$ متتالية من نوع كوشي .

(iii) إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ و g دالة محدودة في جوار النقطة c فأثبت أن $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$

(iv) إذا كانت $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$ وكان U جواراً للنقطة c بحيث $f(x) \leq g(x)$ لكل $x \in U \cap D \setminus \{c\}$ وكانت $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ فأثبت أن $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$

(2) السؤال الثاني (11 درجة) :

(i) إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة وكانت $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$ و $f(x_1) = x_2$ و $f(x_2) = x_1$ فأثبت أن الدالة f لها نقطة ثابتة .

(ii) اذكر نص نظرية هاين - بوريل .

(iii) إذا كانت K_i مجموعة متراصة لكل $i \in \mathbb{N}$ فأثبت أن $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ مجموعة متراصة .

أعط مثالاً يبين أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ ليس بالضرورة مجموعة متراصة .

(iv) إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة فأثبت أن المجموعة $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq f(x) \leq 2\}$ مغلقة .

(3) السؤال الثالث (9 درجات) :

(i) إذا كانت الدالة f تحقق $|f(x)| \leq |x|^2$ في جوار الصفر ، فأثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

(ii) أعط مثالاً يوضح أن عدم وجود $f'(x)$ عند نقطة ما في $x \in (a, b)$ يخل بنظرية رول .

(iii) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة D :

- أثبت أن الدالة f تحقق شرط ليبشتز على D إذا وفقط إذا كانت المشتقة محدودة على D .
- استنتج أن الدالة $f(x) = \ln x$ متصلة بانتظام على الفترة $[b, \infty)$ حيث $b \in \mathbb{R}$ و $b > 0$.

(4) السؤال الرابع (11 درجة) :

(i) اذكر نص نظرية القيمة المتوسطة وبرهنها .

(ii) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق و $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ فأثبت أن الدالة f متباينة .

(iii) اثبت أن $(1+x)^{\frac{1}{3}} < 1 + \frac{1}{3}x$ لكل $x > 0$

(iv) أعط مثالاً لدالتين f و g قابلتين للاشتقاق على $(0,\infty)$ بحيث $g(x) \neq 0$ لكل $x \in (0,\infty)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ ولكن النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة في $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$