111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (8 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_0^2 (2x-1)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 2x - 1 \,,\, [a,b] = [0,2]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 0 + k\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[2\left(\frac{2k}{n}\right) - 1\right]\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n} - 1\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n^2} - \frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n} = \frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{8}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n}\,n = 4\,\frac{n+1}{n} - 2$$

$$\int_0^2 (2x-1)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(4\,\frac{(n+1)}{n} - 2\right) = 4(1) - 2 = 4 - 2 = 2$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[-1,2]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = x^2 + 1$ و $[a,b] = [-1,2]$

$$(2-(-1))\,(c^2+1) = \int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right)\right]$$

$$3(c^2+1) = \left(\frac{8}{3}+2\right) - \left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{8}{3}+2+\frac{1}{3}+1 = 6$$

$$\implies c^2+1 = 2 \implies c^2 = 1 \implies c = \pm 1$$

لاحظ أن $c = -1 \notin (-1,2)$ وبالتالي القيمة المطلوبة هي $c = 1 \in (-1,2)$

(3) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{3x} \cos(t^2)\, dt$

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{3x} \cos(t^2)\, dt = \cos\big((3x)^2\big)\,(3) - \cos\big((\cos x)^2\big)\,(-\sin x)$$

$$= 3\cos(9x^2) + \sin x\ \cos\big(\cos^2 x\big)$$

السؤال الثاني (5 درجات) : أحسب $\dfrac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = x^2\left(\ln x^2\ -1\right)$ حيث $x > 0$

الحل :

$$y = x^2\left(\ln x^2\ -1\right) = x^2\,(2\ln x\ -1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\,(2\ln x\ -1) + x^2\left(\frac{2}{x} - 0\right)$$

$$= 4x\ln x - 2x + 2x = 4x\ln x$$

(2) $y = \dfrac{\sin(3x)\ \cos(x^2)\ \tan x}{\sqrt[3]{x}}$

الحل :

ضع $\ln|y| = \ln\left|\dfrac{\sin(3x)\ \cos(x^2)\ \tan x}{\sqrt[3]{x}}\right|$

عندئذ $\ln|y| = \ln|\sin(3x)| + \ln|\cos(x^2)| + \ln|\tan x| - \ln\left|x^{\frac{1}{3}}\right|$

عندئذ $\ln|y| = \ln|\sin(3x)| + \ln|\cos(x^2)| + \ln|\tan x| - \dfrac{1}{3}\ln|x|$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos(3x)\,(3)}{\sin(3x)} + \frac{(-\sin(x^2))\,(2x)}{\cos(x^2)} + \frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x}$$

$$y' = y\left[\frac{3\cos(3x)}{\sin(3x)} - \frac{2x\ \sin(x^2)}{\cos(x^2)} + \frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{3x}\right]$$

$$y' = \left(\frac{\sin(3x)\ \cos(x^2)\ \tan x}{\sqrt[3]{x}}\right)\left[\frac{3\cos(3x)}{\sin(3x)} - \frac{2x\ \sin(x^2)}{\cos(x^2)} + \frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{3x}\right]$$

السؤال الثالث (12 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)\,dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2\,x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int x^2\left(2-x^3\right)^5\,dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int x^2\left(2-x^3\right)^5\,dx = -\frac{1}{3}\int\left(2-x^3\right)^5\,(-3x^2)\,dx = -\frac{1}{3}\,\frac{\left(2-x^3\right)^6}{6} + c$$

باستخدام القانون

$$n \neq -1 \text{ حيث } \int [f(x)]^n\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}\,dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}\,dx = \int \left(\tan^{-1} x\right)^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\left(\tan^{-1} x\right)^2}{2} + c$$

باستخدام القانون

$$n \neq -1 \text{ حيث } \int [f(x)]^n\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx$$
$$= \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx = x - \ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{e^{5\ln x}}{x^3}\,dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{5\ln x}}{x^3}\,dx = \int \frac{e^{\ln x^5}}{x^3}\,dx = \int \frac{x^5}{x^3}\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x\,3^{x^2-4}\,dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int x\,3^{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int 3^{x^2-4}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{3^{x^2-4}}{\ln 3} + c = \frac{3^{x^2-4}}{2\ln 3} + c$$

باستخدام القانون

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \quad \text{حيث} \quad a > 0$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \sinh(\ln x) + sech^{-1}x$ حيث $x > 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \cosh(\ln x)\ \frac{1}{x} + \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cosh(\ln x)}{x} - \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $y = x^3\ \tanh^2\sqrt{x}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2\ \tanh^2\sqrt{x} + x^3\left(2\ \tanh\sqrt{x}\, sech^2\sqrt{x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= 3x^2\ \tanh^2\sqrt{x} + \frac{x^3\ \tanh\sqrt{x}\, sech^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\cosh x}{e^{2x}}\, dx$

الحل :

$$\int \frac{\cosh x}{e^{2x}}\, dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2e^{2x}}\, dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}}\right) dx = \frac{1}{2}\int\left(e^{-x} + e^{-3x}\right)\, dx$$
$$= \frac{-1}{2}\int e^{-x}(-1)\, dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{-3}\int e^{-3x}(-3)\, dx = \frac{-1}{2}\, e^{-x} - \frac{1}{6}\, e^{-3x} + c$$

(2) $\int \frac{dx}{e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2 - (1)^2}}\, dx = \cosh^{-1}(e^x) + c$$

باستخدام القانون

. $a > 0$ حيث $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - a^2}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$

(3) $\int_1^e x^6 \ln x\,dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \ln x \qquad dv = x^6 dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{x^7}{7}$$

$$\int_1^e x^6 \ln x\,dx = \left[\frac{x^7}{7}\ \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^7}{7}\,\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^7}{7}\ \ln x\right]_1^e - \frac{1}{7}\int_1^e x^6\,dx$$

$$= \left[\frac{x^7}{7}\ \ln x\right]_1^e - \frac{1}{7}\left[\frac{x^7}{7}\right]_1^e = \left[\frac{e^7}{7}\ln(e) - \frac{1}{7}\ln(1)\right] - \frac{1}{7}\left[\frac{e^7}{7} - \frac{1}{7}\right] = \frac{e^7}{7} - \frac{e^7}{49} + \frac{1}{49}$$

(4) $\int \sin^3 x\ \cos^5 x\,dx$

الحل :

$$\int \sin^3 x\ \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x\ \cos^5 x\ \sin x\,dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\ \cos^5 x\ \sin x\,dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x\,dx \implies -du = \sin x\,dx$$

$$\int \left(1 - \cos^2 x\right)\ \cos^5 x\ \sin x\,dx = -\int \left(1 - u^2\right)\ u^5\,du = -\int \left(u^5 - u^7\right)\,du$$

$$= -\left[\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8}\right] + c = -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + c$$

(5) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$

الحل الأول : بإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 1) - 4}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 - (2)^2}\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{(2)^2 - (x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\tanh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

باستخدام القانون

$\int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$ حيث $a>0$.

الحل الثاني : باستخدام الكسور الجزئية

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+3}$$

$$1 = A_1(x+3)+A_2(x-1)$$

بوضع $x=1$ نحصل على : $1=4A_1 \implies A_1=\frac{1}{4}$

بوضع $x=-3$ نحصل على : $1=-4A_2 \implies A_2=-\frac{1}{4}$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+3}\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3|+c$$

(6) $\int \tan^5 x\ \sec^4 x\,dx$

الحل :

$$\int \tan^5 x\ \sec^4 x\,dx = \int \tan^5 x\ \sec^2 x\ \sec^2 x\,dx = \int \tan^5 x\ \left(1+\tan^2 x\right)\ \sec^2 x\,dx$$

باستخدام التعويض $u=\tan x$

$$du = \sec^2 x\,dx$$

$$\int \tan^5 x\ \left(1+\tan^2 x\right)\ \sec^2 x\,dx = \int u^5\left(1+u^2\right)\,du = \int \left(u^5+u^7\right)\,du$$

$$= \frac{u^6}{6}+\frac{u^8}{8}+c = \frac{\tan^6 x}{6}+\frac{\tan^8 x}{8}+c$$

(7) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

باستخدام التعويضات المثلثية

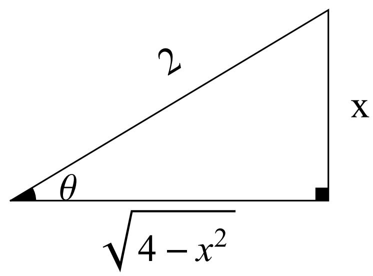
ضع $x=2\sin\theta$

$$dx = 2\cos\theta\,d\theta$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-4\sin^2\theta}\,(2\cos\theta)\,d\theta = \int (2\cos\theta)\,(2\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int 4\cos^2\theta \, d\theta = \int 4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\, d\theta = \int (2+2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 2\theta + \sin(2\theta) + c = 2\theta + 2\sin\theta\ \cos\theta\ + c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

بما أن $x = 2\sin\theta$ فإن $\sin\theta = \dfrac{x}{2}$ و $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$$\int \sqrt{4-x^2}\, dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\left(\frac{x}{2}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + c = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\,\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

(8) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^3+4x}\, dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x+4}{x^3+4x} = \frac{x+4}{x\,(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{x+4}{x\,(x^2+4)} = \frac{A\,(x^2+4)}{x\,(x^2+4)} + \frac{(Bx+C)\,x}{(x^2+4)\,x}$$

$$x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)\,x = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$x+4 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcc} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ C=1 & \longrightarrow & (2) \\ 4A=4 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (3) نحصل على : $4A = 4 \implies A = 1$

من المعادلة (1) نحصل على : $1 + B = 0 \implies B = -1$

$$\int \frac{x+4}{x^3+4x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+4}\right)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+(2)^2}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \quad (9)$$

الحل : باستخدام التعويض

$$u = \sqrt{1+\sqrt{x}} \implies u^2 = 1+\sqrt{x} \implies u^2 - 1 = \sqrt{x} \implies (u^2-1)^2 = x$$

$$dx = 2(u^2-1)\,(2u)\,du \implies dx = 4u(u^2-1)\,du$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \int \frac{4u(u^2-1)}{u}\,du = 4\int (u^2-1)\,du = 4\left[\frac{u^3}{3} - u\right] + c$$

$$= \frac{4}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3 - 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x - 5$ على الفترة $[2, 5]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = 4x - 5$ و $[a, b] = [2, 9]$

$$(5-2)\,(4c-5) = \int_2^5 (4x-5)\,dx$$

$$3\,(4c-5) = \left[2x^2 - 5x\right]_2^5 = [2(25) - 25] - [2(4) - 10] = 25 + 2 = 27$$

$$\implies 4c - 5 = 9 \implies 4c = 14 \implies c = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \in (2, 5)$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \sqrt{4x - x^2}\,dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \sqrt{4x - x^2}\,dx = \int \sqrt{-(x^2 - 4x)}\,dx = \int \sqrt{-(x^2 - 4x + 4) + 4}\,dx$$

$$= \int \sqrt{4 - (x^2 - 4x + 4)}\,dx = \int \sqrt{(2)^2 - (x-2)^2}\,dx$$

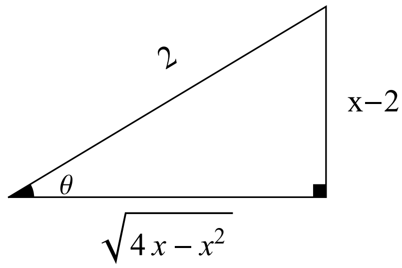
باستخدام التعويض المثلثي : $\sin\theta = \frac{x-2}{2} \implies x - 2 = 2\sin\theta$

$$dx = 2\cos\theta\,d\theta$$

$$\int \sqrt{4 - (x-2)^2}\,dx = \int \sqrt{4 - 4\sin^2\theta}\,(2\cos\theta)\,d\theta = \int (2\cos\theta)(2\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int 4\cos^2\theta\,d\theta = \int 2(1 + \cos 2\theta)\,d\theta = \int (2 + 2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\theta + \sin 2\theta + c = 2\theta + 2\sin\theta\,\cos\theta + c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{2}$

ايضاً : $\sin\theta = \dfrac{x-2}{2} \implies \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)$

$$\int \sqrt{4x-x^2}\,dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + 2\,\frac{x-2}{2}\,\frac{\sqrt{4x-x^2}}{2} + c$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \frac{(x-2)\sqrt{4x-x^2}}{2} + c$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \left(\sin^{-1}x\right)^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\left(\sin^{-1}x\right)^2}{2} + c$$

باستخدام القانون

$$\int [f(x)]^n\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n} + c$$ حيث $n \neq -1$

(3) $\displaystyle\int x\,5^{3x^2+1}\,dx$

الحل :

$$\int x\,5^{3x^2+1}\,dx = \frac{1}{6}\int 5^{3x^2+1}(6x)\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{5^{3x^2+1}}{\ln 5} + c$$

باستخدام القانون

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$ حيث $a > 0$

(4) $\int x\ \cos x\, dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x\, dx \\ du = \ dx & v = \sin x \end{array}$$

$$\int x\ \cos x\, dx = x\ \sin x - \int \sin x\, dx = x\ \sin x - (-\cos x) + c = x\ \sin x + \cos x + c$$

(5) $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\, dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2}$$

$$x - 1 = A_1(x+2) + A_2(x+1)$$

بوضع $x = -1$ نجد أن : $-2 = A_1$

بوضع $x = -2$ نجد أن : $A_2 = 3 \implies -3 = -A_2$

$$\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}\, dx = \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{3}{x+2} \right)\, dx$$

$$= -2 \int \frac{1}{x+1}\, dx + 3 \int \frac{1}{x+2}\, dx = -2 \ln|x+1| + 3 \ln|x+2| + c$$

(6) $\int \frac{x}{x^2+4x+4}\, dx$

الحل الأول :

$$\int \frac{x}{x^2+4x+4}\, dx = \int \frac{(x+2)-2}{x^2+4x+4}\, dx = \int \frac{x+2}{x^2+4x+4}\, dx - \int \frac{2}{x^2+4x+4}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+4} - 2 \int \frac{1}{(x+2)^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+4} - 2 \int (x+2)^{-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|x^2+4x+4\right| - 2\frac{(x+2)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|(x+2)^2\right| + \frac{2}{x+2} + c = \ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + c$$

الحل الثاني : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{x}{(x+2)^2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2}$$

$$x = A_1(x+2) + A_2 = A_1 x + 2A_1 + A_2$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcl} A_1 = 1 & \longrightarrow & (1) \\ 2A_1 + A_2 = 0 & \longrightarrow & (2) \end{array}$$

من المعادلة (2) نجد أن : $2 + A_2 = 0 \implies A_2 = -2$

$$\int \frac{x}{x^2+4x+4}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{-2}{(x+2)^2}\right)\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 2\int (x+2)^{-2}\,dx$$

$$= \ln|x+2| - 2\frac{(x+2)^{-1}}{-1} + c = \ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + c$$

السؤال الثالث :

(أ) أحسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

الحل :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{0-\cos x}{-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{0}{1} = 0$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x-2}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\int_2^3 \frac{dx}{x-2} = \lim_{t\to2^+} \int_t^3 \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t\to2^+} [\ln|x-2|]_t^3 = \lim_{t\to2^+} [\ln|3-2| - \ln|t-2|]$$

$$= \lim_{t\to2^+} [\ln(1) - \ln|t-2|] = 0 - (-\infty) = \infty$$

التكامل المعتل متباعد

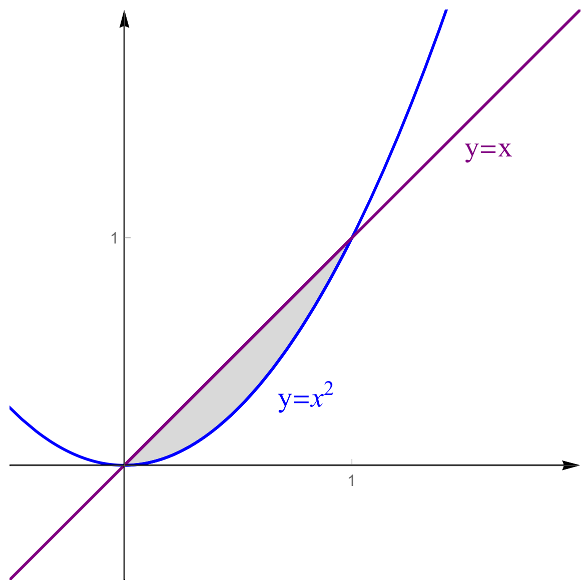
تذكر أن $\lim\limits_{t\to0^+} \ln|t| = -\infty$ و $\ln(1) = 0$

السؤال الرابع : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = x^2$ و $y = x$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = x$ يمثل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله 1



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = x$:

$$x^2 = x \implies x^2 - x = 0 \implies x(x-1) = 0 \implies x = 0\,,\ x = 1$$

$$\mathrm{A} = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}$$

السؤال الخامس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ حول محور x .

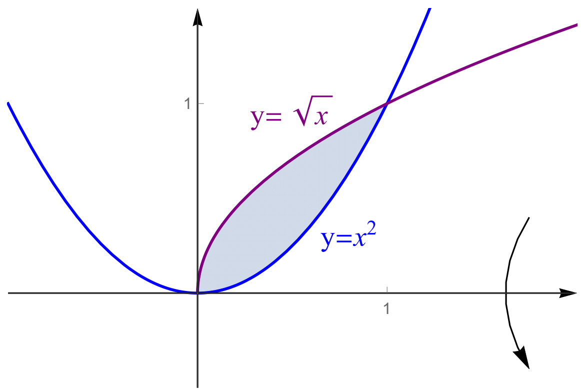
الحل :

$y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

$y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي من القطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه $(0, 0)$ وفتحته إلى اليمين .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0\,,\ x = 1$$



باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2 \right] \, dx = \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right) \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - (0 - 0) \right] = \frac{3\pi}{10}$$

السؤال السادس : أحسب طول المنحنى $y = \dfrac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ من $x = 0$ إلى $x = 1$.

الحل :

$$f(x) = \frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3} \implies f'(x) = \frac{1}{3} \, \frac{3}{2} \, (x^2+2)^{\frac{1}{2}} (2x) = x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[x(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \right]^2} \, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2(x^2+2)} \, dx = \int_0^1 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} \, dx$$

$$= \int_0^1 \int \sqrt{(x^2+1)^2} \, dx = \int_0^1 (x^2+1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - (0+0) = \frac{4}{3}$$

السؤال السابع : أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \dfrac{x^3}{3}$ على الفترة $[0,1]$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \implies f'(x) = x^2$$

$$S = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3} \sqrt{1 + (x^2)^2} \, dx = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4} \, dx = \frac{2\pi}{3} \, \frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 + x^4\right)^{\frac{1}{2}} (4x^3) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[\frac{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \, \frac{2}{3} \left[(1+x^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{9} \left[(1+1)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi}{9} \left[(2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

السؤال الثامن :

(أ) حول المعادلة الديكارتية $(x^2+y^2)^2 = 2xy$ إلى معادلة قطبية .

الحل :

$$(x^2+y^2)^2 = 2xy \implies (r^2)^2 = 2(r\ \cos\theta)(r\sin\theta) \implies r^4 = 2r^2\ \cos\theta\ \sin\theta$$

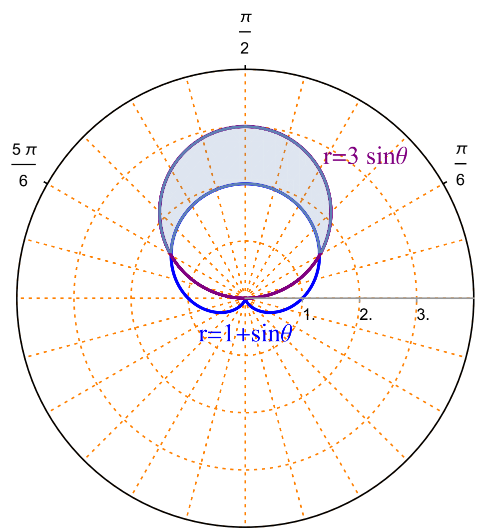
$$r^2 = 2\ \sin\theta\ \cos\theta \implies r^2 = \sin 2\theta$$

(ب) أرسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3\sin\theta$ وخارج المنحنى $r = 1+\sin\theta$ ثم أحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $r = 1+\sin\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

المنحنى $r = 3\sin\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها $\dfrac{3}{2}$.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1+\sin\theta$ مع المنحنى $r = 3\sin\theta$:

$$3\sin\theta = 1+\sin\theta \implies 2\sin\theta = 1 \implies \sin\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}\ ,\ \theta = \frac{5\pi}{6}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\mathrm{A} = 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(3\sin\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2\right]\ d\theta\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[9\sin^2\theta - (1+2\sin\theta+\sin^2\theta)\right]\ d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[9\sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta - \sin^2\theta)\right]\ d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[8\sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta)\right]\ d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [4(1-\cos 2\theta) - 1 - 2\sin\theta)]\ d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [4 - 4\cos 2\theta - 1 - 2\sin\theta)]\ d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [3 - 2\sin\theta - 4\cos 2\theta]\ d\theta = [3\theta + 2\cos\theta - 2\sin 2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{3\pi}{2} + 0 - 0\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = \pi$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول (8 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_1^3 (1-2x)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 1 - 2x\ ,\ [a,b] = [1,3]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 1 + k\left(\frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{2k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\,(x_k)\,\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[1-2\left(1+\frac{2k}{n}\right)\right]\ \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1-2-\frac{4k}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-1-\frac{4k}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{n}-\frac{8k}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n^2}\right) = -\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= -\frac{2}{n}\,(n) - \frac{8}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = -2 - 4\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\int_1^3 (1-2x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(-2-4\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = -2-4(1) = -6$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x - x^2$ على الفترة $[0,3]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = 4x - x^2$ و $[a,b] = [0,3]$

$$(3-0)\,(4c-c^2) = \int_0^3 (4x-x^2)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$3(4c-c^2)=\left[2(3)^2-\frac{(3)^3}{3}\right]-\left[2(0)^2-\frac{(0)^3}{3}\right]=18-9=9$$

$$3(4c-c^2)=9 \implies 4c-c^2=3 \implies c^2-4c+3=0$$

$$\implies (c-1)(c-3)=0 \implies c=1\ ,\ c=3$$

لاحظ أن $c=3\notin(0,3)$ وبالتالي القيمة المطلوبة هي $c=1\in(0,3)$

(3) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=\displaystyle\int_{\ln x}^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$

الحل :

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}}\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sin(\ln x)}{\sqrt{(\ln x)^2-1}}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}}-\frac{\sin(\ln x)}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$$

السؤال الثاني (5 درجات) : أحسب $\dfrac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y=x^2\ \sin^{-1}(e^x)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=2x\ \sin^{-1}(e^x)+x^2\ \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}=2x\ \sin^{-1}(e^x)+\frac{x^2\ e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

(2) $y=\ln\left(\dfrac{e^{3x}\ \tan(x^2)}{\sqrt[5]{x}}\right)$

الحل :

$$y=\ln\left(\frac{e^{3x}\ \tan(x^2)}{\sqrt[5]{x}}\right)=\ln\left(\frac{e^{3x}\ \tan(x^2)}{x^{\frac{1}{5}}}\right)=\ln\left|e^{3x}\right|+\ln\left|\tan(x^2)\right|-\ln\left|x^{\frac{1}{5}}\right|$$

$$y=3x\ln(e)+\ln\left|\tan(x^2)\right|-\frac{1}{5}\ln|x|=3x+\ln\left|\tan(x^2)\right|-\frac{1}{5}\ln|x|$$

$$\frac{dy}{dx}=3+\frac{2x\ \sec^2(x^2)}{\tan(x^2)}-\frac{1}{5}\ \frac{1}{x}$$

السؤال الثالث (12 درجة) : أحسب التكاملات التالية

(1) $$\int \frac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x^3-1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\left(x^3-1\right)\,dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{8}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)\,dx = \frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}} + c$$

(2) $$\int x^3\left(2-x^4\right)^7\,dx$$

الحل :

$$\int x^3\left(2-x^4\right)^7\,dx = -\frac{1}{4}\int \left(2-x^4\right)^7\,(-4x^3)\,dx = -\frac{1}{4}\,\frac{\left(2-x^4\right)^8}{8} + c$$

باستخدام القانون

$$\int [f(x)]^n\,f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{حيث } n \neq -1$$

(3) $$\int 2x\,\sec^2(x^2)\,dx$$

الحل :

$$\int 2x\,\sec^2(x^2)\,dx = \int \sec^2(x^2)\,(2x)\,dx = \tan(x^2) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \sec^2\left(f(x)\right)\,f'(x)\,dx = \tan\left(f(x)\right) + c$$

(4) $$\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{x-1}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)-2}{x+1}\,dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}\right)\,dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)\,dx = \int 1\,dx - 2\int \frac{1}{x+1}\,dx = x - 2\ln|x+1| + c$$

$$(5) \quad \int \frac{e^{6\ln x}}{x^6}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{e^{6\ln x}}{x^6}\,dx = \int \frac{e^{\ln x^6}}{x^6}\,dx = \int \frac{x^6}{x^6}\,dx = \int 1\,dx = x + c$$

$$(6) \quad \int x^2\,4^{x^3-1}\,dx$$

الحل :

$$\int x^2\,4^{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\int 4^{x^3-1}(3x^2)\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{4^{x^3-1}}{\ln 4} + c = \frac{4^{x^3-1}}{3\ln 4} + c$$

باستخدام القانون

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \quad \text{حيث} \quad a > 0$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن مُحمَّد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \sinh\left(\sqrt{x}\right) + sech^{-1}\left(\ln|x|\right)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \cosh\left(\sqrt{x}\right)\ \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{\ln|x|\sqrt{1-(\ln|x|)^2}}\ \frac{1}{x} = \frac{\cosh\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\ln|x|\sqrt{1-\ln^2|x|}}$$

(2) $y = x\ \coth^2\sqrt{x}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = (1)\ \coth^2\sqrt{x} + x\left(2\ \coth\sqrt{x}\left(-csch^2\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \coth^2\sqrt{x} - \frac{x\ \coth\sqrt{x}\, csch^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int e^{-2x}\sinh x\, dx$

الحل :

$$\int e^{-2x}\sinh x\, dx = \int e^{-2x}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\, dx = \frac{1}{2}\int\left(e^{-x}-e^{-3x}\right)\, dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int e^{-x}(-1)\, dx - \frac{1}{2}\,\frac{1}{-3}\int e^{-3x}(-3)\, dx = \frac{-1}{2}\, e^{-x} + \frac{1}{6}\, e^{-3x} + c$$

(2) $\int \frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx$

الحل :

$$\int \frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx = \int \frac{e^{x}}{\sqrt{(1)^2-(e^{x})^2}}\, dx = \sin^{-1}\left(e^{x}\right) + c$$

باستخدام القانون

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx=\sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$ حيث $a>0$.

(3) $$\int x\sin x\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u=x & dv=\sin x\,dx \\ du=dx & v=-\cos x \end{array}$$

$$\int x\sin x\,dx=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\ \cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+c$$

(4) $$\int \sin^5 x\ \cos^2 x\,dx$$

الحل :

$$\int \sin^5 x\ \cos^2 x\,dx=\int \sin^4 x\ \cos^2 x\ \sin x\,dx$$

$$=\int(\sin^2 x)^2\cos^2 x\,dx=\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\ \cos^2 x\ \sin x\,dx$$

باستخدام التعويض $u=\cos x$

$$du=-\sin x\,dx\implies -du=\sin x\,dx$$

$$\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\ \cos^2 x\ \sin x\,dx=-\int\left(1-u^2\right)^2\ u^2\,du=-\int\left(1-2u^2+u^4\right)\ u^2\,du$$

$$=-\int(u^2-2u^4+u^6)\,du=-\left[\frac{u^3}{3}-2\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}\right]+c=-\frac{\cos^3 x}{3}+2\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^7 x}{7}+c$$

(5) $$\int \sin(6x)\ \cos(4x)\,dx$$

الحل :

$$\int \sin(6x)\ \cos(4x)\,dx=\int\frac{1}{2}\left[\sin(6x-4x)+\sin(6x-4x)\right]\ dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin(2x)\,dx+\frac{1}{2}\int\sin(10x)\,dx=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int\sin(2x)\ (2)\,dx+\frac{1}{2}\frac{1}{10}\int\sin(10x)\ (10)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}(-\cos(2x)) + \frac{1}{20}(-\cos(10x)) + c = -\frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(10x)}{20} + c$$

(6) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+6x+10}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{2x}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{(2x+6)-6}{x^2+6x+10}\,dx$$

$$= \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx - 6\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx - 6\int \frac{1}{(x^2+6x+9)+1}\,dx$$

$$= \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx - 6\int \frac{1}{(x+3)^2+(1)^2}\,dx = \ln|x^2+6x+10| - 6\tan^{-1}(x+3) + c$$

باستخدام القانون $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

والقانون $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$.

(7) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

باستخدام التعويضات المثلثية

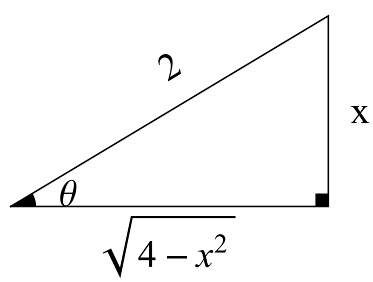
ضع $x = 2\sin\theta$

$dx = 2\cos\theta\,d\theta$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-4\sin^2\theta}\,(2\cos\theta)\,d\theta = \int (2\cos\theta)\,(2\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int 4\cos^2\theta\,d\theta = \int 4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\,d\theta = \int (2+2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\theta + \sin(2\theta) + c = 2\theta + 2\sin\theta\,\cos\theta\, + c$$



من المثلث : نلاحظ أن $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

بما أن $x = 2\sin\theta$ فإن $\sin\theta = \frac{x}{2}$ و $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\left(\frac{x}{2}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + c = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

(8) $\displaystyle\int \frac{x+9}{x^3+9x}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x+9}{x^3+9x} = \frac{x+9}{x\,(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$$

$$\frac{x+9}{x\,(x^2+9)} = \frac{A\,(x^2+9)}{x\,(x^2+9)} + \frac{(Bx+C)\,x}{(x^2+9)\,x}$$

$$x+9 = A(x^2+9) + (Bx+C)\,x = Ax^2 + 9A + Bx^2 + Cx$$

$$x+9 = (A+B)x^2 + Cx + 9A$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lll} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ C=1 & \longrightarrow & (2) \\ 9A=9 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (3) نحصل على : $9A = 9 \implies A = 1$

من المعادلة (1) نحصل على : $1 + B = 0 \implies B = -1$

$$\int \frac{x+9}{x^3+9x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+9}\right)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+9}\,dx + \int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx + \int \frac{1}{x^2+(3)^2}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

نستخدم التعويض $x = u^6 \implies u = x^{\frac{1}{6}}$

$$dx = 6u^5\, du$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}\, dx = \int \frac{6u^5}{u^3 + u^2}\, du = \int \frac{6u^5}{u^2(u+1)}\, du = \int \frac{6u^3}{u+1}\, du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\int \frac{6u^3}{u+1}\, du = \int \left(6u^2 - 6u + 6 - \frac{6}{u+1}\right)\, du$$

$$= 6\,\frac{u^3}{3} - 6\,\frac{u^2}{2} + 6u - 6\ln|u+1| + c = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln|u+1| + c$$

$$= 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + 1\right| + c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}} + 1\right| + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1439 - 1440 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (7 درجات) :

(1) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x + 2$ على الفترة $[1,3]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = x + 2$ و $[a,b] = [1,3]$

$$(3-1)\,(c+2) = \int_1^3 (x+2)\,dx$$

$$2\,(c+2) = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = \left[\frac{9}{2}+6\right] - \left[\frac{1}{2}+2\right] = 4+4 = 8$$

$$\implies 2\,(c+2) = 8 \implies 2c = 4 \implies c = \frac{4}{2} = 2 \in (1,3)$$

(2) أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(i) $y = \cosh^2\left(1+\sqrt{x}\right)$

الحل : $$\frac{dy}{dx} = 2\cosh\left(1+\sqrt{x}\right)\ \sinh\left(1+\sqrt{x}\right)\ \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= \frac{\cosh\left(1+\sqrt{x}\right)\ \sinh\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

(ii) $y = \sinh^{-1}(\cos x)$

الحل : $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+(\cos x)^2}}\,(-\sin x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

السؤال الثاني (15 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\,e^{\sqrt{x}} + c$$

باستخدام القانون $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$

(2) $\int \frac{\cosh(\ln x)}{x}\, dx$ حيث $x > 0$

الحل :

$$\int \frac{\cosh(\ln x)}{x}\, dx = \int \cosh(\ln x)\, \frac{1}{x}\, dx = \sinh(\ln x) + c$$

باستخدام القانون $\int \cosh\left(f(x)\right)\, f'(x)\, dx = \sinh\left(f(x)\right) + c$

(3) $\int 3^x\, 4^{3^x}\, dx$

الحل :

$$\int 3^x\, 4^{3^x}\, dx = \frac{1}{\ln 3} \int 4^{3^x}\, \left(3^x \ln 3\right)\, dx = \frac{1}{\ln 3}\, \frac{4^{3^x}}{\ln 4} + c$$

باستخدام القانون $\int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$ حيث $a > 0$

(4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^{16}}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^{16}}} = \int \frac{1}{x\sqrt{1 + (x^8)^2}}\, dx = \int \frac{x^7}{x^8\sqrt{1 + (x^8)^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{8x^7}{x^8\sqrt{1 + (x^8)^2}}\, dx = \frac{1}{8}\left(-csch^{-1}\left(x^8\right)\right) + c = -\frac{1}{8}\, csch^{-1}\left(x^8\right) + c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2 + \left[f(x)\right]^2}}\, dx = -\frac{1}{a}\, csch^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

(5) $\int x\, \cos x\, dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x\, dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array}$$

$$\int x\ \cos x\,dx = x\ \sin x - \int \sin x\,dx = x\ \sin x - (-\cos x) + c = x\ \sin x + \cos x + c$$

$$\int \sin^3 x\ \cos^5 x\,dx \quad (6)$$

الحل :

$$\int \sin^3 x\ \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x\ \cos^5 x\ \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\ \cos^5 x\ \sin x\,dx$$

بوضع $u = \cos x$

$$du = -\sin x\,dx \implies -du = \sin x\,dx$$

$$\int (1-\cos^2 x)\ \cos^5 x\ \sin x\,dx = -\int (1-u^2)\,u^5\,du = -\int (u^5 - u^7)\,du$$

$$= -\left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8}\right) + c = -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} \quad (7)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x+1)}{(x+1)\,(x-1)^2}$$

$$1 = A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x+1)$$

$$1 = A_1(x^2-2x+1) + A_2(x^2-1) + A_3(x+1)$$

$$1 = A_1x^2 - 2A_1x + A_1 + A_2x^2 - A_2 + A_3x + A_3$$

$$1 = (A_1 + A_2)\,x^2 + (-2A_1 + A_3)\,x + (A_1 - A_2 + A_3)$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcl} A_1 + A_2 = 0 & \longrightarrow & (1) \\ -2A_1 + A_3 = 0 & \longrightarrow & (2) \\ A_1 - A_2 + A_3 = 1 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

بجمع المعادلات الثلاث نجد أن : $2A_3 = 1 \implies A_3 = \frac{1}{2}$

من المعادلة (2) نجد أن : $-2A_1 + \frac{1}{2} = 0 \implies -2A_1 = -\frac{1}{2} \implies A_1 = \frac{1}{4}$

من المعادلة (1) نجد أن : $A_2 = -\dfrac{1}{4} \implies \dfrac{1}{4} + A_2 = 0$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\, dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{1}{2}\int (x-1)^{-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + c$$

السؤال الثالث (18 درجة) :

(1) أحسب $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{3x^2}$

الحل :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{3x^2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{6x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{t\to 3^-} \int_0^t (3-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \lim_{t\to 3^-} \left((-1) \int_0^t (3-x)^{-\frac{1}{2}} (-1)\, dx \right) = \lim_{t\to 3^-} \left((-1) \left[\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^t \right)$$

$$= \lim_{t\to 3^-} \left((-1) \left[2\sqrt{3-x} \right]_0^t \right) = \lim_{t\to 3^-} \left((-1) \left[2\sqrt{3-t} - 2\sqrt{3-0} \right] \right)$$

$$= \lim_{t \to 3^-} \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{3-t}\right) = 2\sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3}$$

التكامل المعتل متقارب وقيمته $2\sqrt{3}$.

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$ وأحسب مساحتها .

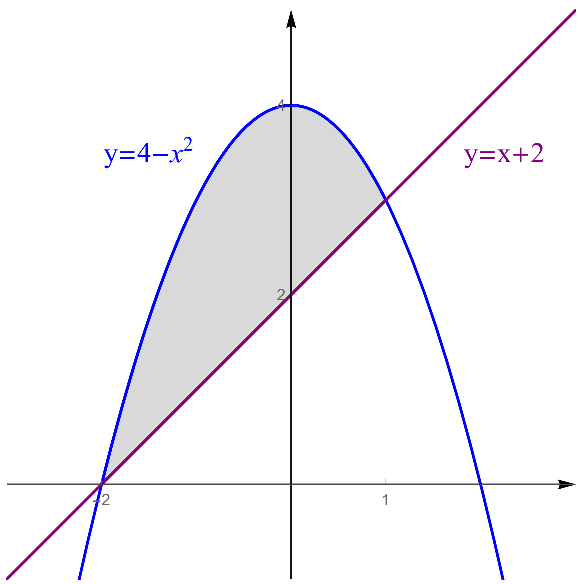
الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 2)$ وميله 1

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x-1)(x+2) = 0 \implies x = -2 \, , \; x = 1$$



$$\text{A} = \int_{-2}^{1} \left[(4 - x^2) - (x+2)\right] \, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2) \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{(-8)}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = -3 - \frac{1}{2} + 8 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

(4) أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

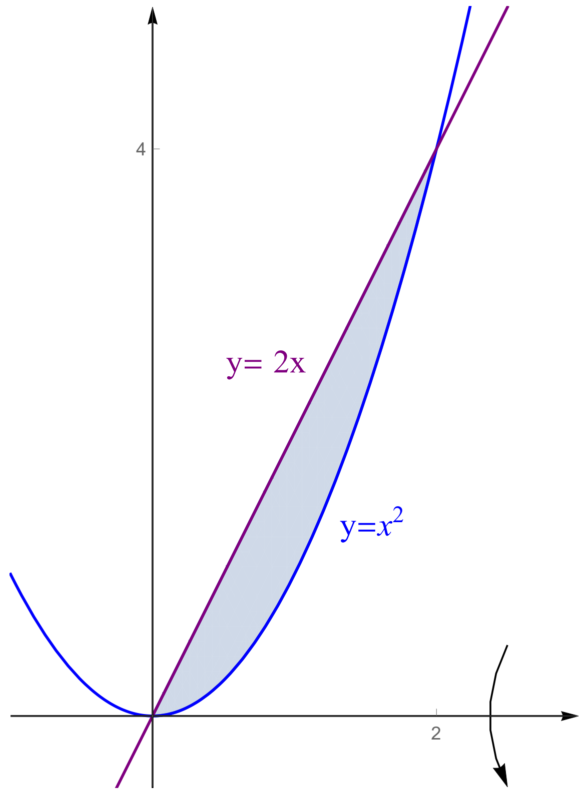
الحل :

$y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

$y = 2x$ يمثل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله 2 .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x = 0\,,\ x = 2$$



باستخدام طريقة الوردات :

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right]\, dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right)\, dx = \pi \left[4\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5}\right) - (0-0)\right] = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{64\pi}{15}$$

(5) أحسب طول المنحنى $y = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}}$ من $x = 1$ إلى $x = 2$.

الحل :

$$f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \implies f'(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ \frac{3}{2}\ x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,\sqrt{x} = \sqrt{2x}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(\sqrt{2x})^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (1+2x))^{\frac{1}{2}}\,(2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\,(1+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\,(1+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\,(1+2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

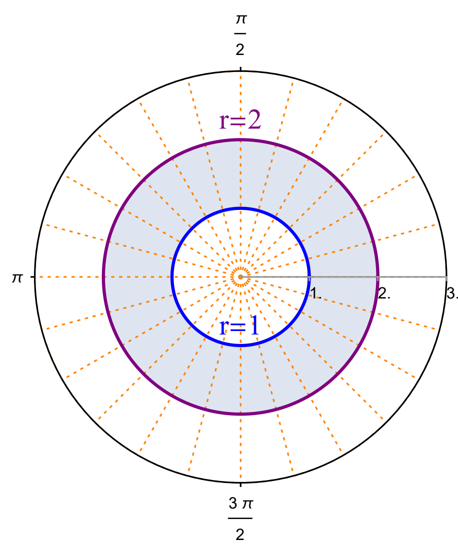
$$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\left[(5)^{\frac{3}{2}} - (3)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left[(5)^{\frac{3}{2}} - (3)^{\frac{3}{2}}\right]$$

(6) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2$ وخارج المنحنى $r = 1$.

الحل :

المنحنى $r = 1$ يمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 .

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 .



$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(2)^2 - (1)^2\right]\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\,d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{2}\,[\theta]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\,(2\pi - 0) = 3\pi$$