111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1436 - 1437 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل $\int_0^3 (2x-1)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 2x - 1 \,,\, [a,b] = [0,3]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 0 + k\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[2\left(\frac{3k}{n}\right) - 1\right]\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{18k}{n^2} - \frac{3}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{18}{n^2}\,k - \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n} = \frac{18}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$R_n = \frac{18}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{3}{n}\,n = 9\,\frac{n(n+1)}{n^2} - 3$$

$$\int_0^3 (2x-1)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(9\,\frac{n(n+1)}{n^2} - 3\right) = 9(1) - 3 = 9 - 6 = 3$$

السؤال الثاني : أوجد قيمة c التي تحقق شرط مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = 1 + x^2$ على الفترة $[-1,2]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = 1 + x^2$ و $[a,b] = [-1,2]$

$$(2-(-1))\,(1+c^2) = \int_{-1}^{2}(1+x^2)\,dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$3(1+c^2) = \left(2 + \frac{8}{3}\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$3 + 3c^2 = 2 + \frac{8}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 6$$

$$3c^2 = 3 \implies c^2 = 1 \implies c = \pm 1$$

لاحظ أن $c = 1 \in (-1, 2)$ وبالتالي يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[-1, 2]$

بينما $c = -1 \notin (-1, 2)$

السؤال الثالث : جد $F'(0)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\cos x}^{\sin 2x} \sqrt{1 - t^2}\, dt$

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{\sin 2x} \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

$$= \sqrt{1 - (\sin 2x)^2}\cos 2x\ (2) - \sqrt{1 - \cos^2 x}\ (-\sin x)$$

$$F'(x) = 2\cos 2x \sqrt{1 - (\sin 2x)^2} + \sin x \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$F'(0) = 2(1)\sqrt{1 - 0} + (0)\sqrt{1 - 1} = 2$$

السؤال الرابع : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(أ) $y = \cos x\ \ln x$ حيث $x > 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = (-\sin x)\ln x + \cos x\ \left(\frac{1}{x}\right)$$

(ب) $y = 2^{\sqrt{x} + \tan x}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2^{\sqrt{x} + \tan x}\ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sec^2 x\right)\ \ln 2$$

(ج) $y = \frac{(1 + x^2)\,(1 - x)^2}{(3 + x^3)^5}$

الحل :

ضع $\ln|y| = \ln\left|\frac{(1 + x^2)\,(1 - x)^2}{(3 + x^3)^5}\right|$

$$\ln|y| = \ln|1 + x^2| + 2\ln|1 - x| - 5\ln|3 + x^3|$$

بإشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{1+x^2} + 2\,\frac{-1}{1-x} - 5\,\frac{3x^2}{3+x^3}$$

$$y' = y\,\left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{1-x} - \frac{15x^2}{3+x^3}\right)$$

$$y' = \frac{(1+x^2)\,(1-x)^2}{(3+x^3)^5}\left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{1-x} - \frac{15x^2}{3+x^3}\right)$$

السؤال الخامس : أحسب التكاملات التالية

أ) $\int \frac{x+1}{x^5}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{x+1}{x^5}\,dx = \int \left(\frac{x}{x^5} + \frac{1}{x^5}\right)\,dx$$

$$= \int \left(x^{-4} + x^{-5}\right)\,dx = \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-4}}{-4} + c$$

ب) $\int_0^2 |x-1|\,dx$

الحل :

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & ; \quad x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & ; \quad x \geq 1 \\ 1-x & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) - (0-0)\right] + \left[\left(\frac{4}{2}-2\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ج) $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \tan\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\int \tan\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\ln\left|\sec\sqrt{x}\right| + c$$

باستخدام القاعدة $\int \tan\left(f(x)\right)\ f'(x)\,dx = \ln\left|\sec\left(f(x)\right)\right| + c$

(د) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

الحل :

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx = -\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\,dx$$

$$= -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e^1\right) = e - e^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e}$$

باستخدام القاعدة $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

(هـ) $\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x}$

الحل :

$$\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x} = \int_2^4 \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\,dx = \left[\ln|\ln x|\right]_2^4 = \ln(\ln 4) - \ln(\ln 2)$$

باستخدام القاعدة $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1436 - 1437 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$y = \cosh^2 x + \sinh^{-1}(x^2)$ (1)

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2\cosh x\ \sinh x + \frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^2}}\,(2x) = 2\cosh x\ \sinh x + \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$$

$y = \tanh^{-1}(\sqrt{x})$ (2)

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-(\sqrt{x})^2}\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1-x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (1)

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{e^x}{e^x\sqrt{1-(e^x)^2}}\,dx = -sech^{-1}(e^x) + c$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ (2)

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+1)+4}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(2)^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

$\int_1^e \ln x\,dx$ (3)

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x}\, dx & v = x \end{array}$$

$$\int_1^e \ln x\, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x\, \frac{1}{x}\, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1\, dx$$

$$= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [e \ln(e) - \ln(1)] - [e-1] = [e-0] - [e-1] = e - e + 1 = 1$$

(4) $\int \sin^3 x\ \cos^7 x\, dx$

الحل :

$$\int \sin^3 x\ \cos^7 x\, dx = \int \sin^2 x\ \cos^7 x\ \sin x\, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\ \cos^7 x\ \sin x\, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x\, dx \implies -du = \sin x\, dx$$

$$\int (1-\cos^2 x)\ \cos^7 x\ \sin x\, dx = -\int (1-u^2)\, u^7\, du$$

$$= -\int \left(u^7 - u^9\right)\ du = -\left(\frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10}\right) + c = -\frac{\cos^8 x}{8} + \frac{\cos^{10} x}{10} + c$$

(5) $\int \sec^4 x\, dx$

الحل :

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x\ \sec^2 x\, dx = \int \left(1+\tan^2 x\right)\ \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \tan^2 x\ \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int (\tan x)^2\ \sec^2 x\, dx = \tan x + \frac{(\tan x)^3}{3} + c$$

(6) $\int \sin(3x)\ \cos(2x)\, dx$

الحل :

$$\int \sin(3x)\ \cos(2x)\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin[(3-2)x] + \sin[(3+2)x]\right)\ dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\ (\sin x + \sin 5x)\ dx = \frac{1}{2}\int \sin x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 5x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin x\, dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\int \sin 5x\ (5)\ dx = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + c$$

(7) $\int \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\ dx$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

نستخدم التعويض $x = \sin\theta$

$dx = \cos\theta\, d\theta$

$$\int \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\ dx = \int \left(1-\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\ \cos\theta\, d\theta = \int \left(\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \cos^3\theta\ \cos\theta\, d\theta = \int \cos^4\theta\, d\theta = \int \left(\cos^2\theta\right)^2\ d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\ d\theta = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right)\ d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int d\theta + \frac{1}{4}\int \cos 2\theta\ (2)\ d\theta + \frac{1}{4}\int \cos^2 2\theta\, d\theta$$

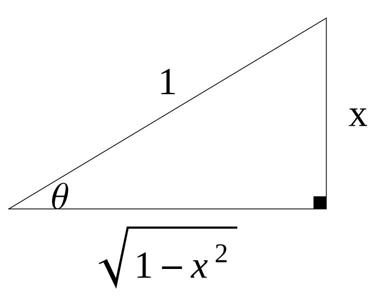
$$= \frac{1}{4}\,\theta + \frac{1}{4}\ \sin 2\theta + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\ d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\,\theta + \frac{1}{4}\ \sin 2\theta + \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 4\theta\right)\ d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\,\theta + \frac{1}{4}\ \sin 2\theta + \frac{1}{8}\int 1\, d\theta + \frac{1}{8}\,\frac{1}{4}\int \cos 4\theta\ (4)\ d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\,\theta + \frac{1}{4}\ \sin 2\theta + \frac{1}{8}\,\theta + \frac{1}{32}\ \sin 4\theta + c$$

$$= \frac{3}{8}\,\theta + \frac{1}{2}\ \sin\theta\ \cos\theta + \frac{1}{32}\left(4\sin\theta\ \cos\theta\left(2\cos^2\theta - 1\right)\right)$$



$$\int \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\ dx$$

$$= \frac{3}{8}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{32}\left(4x\sqrt{1-x^2}\ \left(2(1-x^2)-1\right)\right) + c$$

تذكر أن : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta$$

(8) $$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A\,(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$1 = A\,(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$1 = (A+B)x^2 + (-B+C)x + A - C$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcl} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ -B+C=0 & \longrightarrow & (2) \\ A-C=1 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

بجمع المعادلات الثلاث نحصل على : $2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$

من المعادلة (1) نحصل على : $B = -\frac{1}{2}$

من المعادلة (2) نحصل على : $C = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} \quad (9)$$

الحل : باستخدام تعويض نصف الزاوية

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$dx = \frac{2\,du}{1+u^2} \ \ , \ \ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \ \ , \ \ \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,du$$

$$= \int \frac{2}{(1+u^2)+2u+(1-u^2)}\,du = \int \frac{2}{2u+2}\,du$$

$$= \int \frac{2}{2(u+1)}\,du = \int \frac{du}{u+1} = \ln|u+1|+c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الأول 1436 - 1437 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[-1, 8]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\, dx$

حيث $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $[a, b] = [-1, 8]$

$$(8-(-1))\,\sqrt{c+1} = \int_{-1}^{8} \sqrt{x+1}\, dx = \int_{-1}^{8} (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$9\,\sqrt{c+1} = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{8} = \left[\frac{2}{3}(8+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$9\,\sqrt{c+1} = \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(27) = 18$$

$$9\,\sqrt{c+1} = 18 \implies \sqrt{c+1} = 2 \implies c+1 = 4 \implies c = 3$$

لاحظ أن $c = 3 \in (-1, 8)$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية :

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{e^x}{(1)^2 + (e^x)^2}\, dx = \tan^{-1}(e^x) + c$$

باستخدام العلاقة

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2}\, dx = \frac{1}{a}\ \tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$ حيث $a > 0$

$$\int \ln\left(3^{\sin x}\right)\, dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \ln\left(3^{\sin x}\right)\, dx = \int \sin x\ \ln 3\, dx = \ln 3 \int \sin x\, dx$$

$$= \ln 3\,(-\cos x) + c = -\ln 3\ \cos x + c$$

$$(3) \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

الحل :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-3} \cos x\, dx = \left[\frac{(\sin x)^{-2}}{-2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{-2(\sin x)^2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} - \left(\frac{1}{-2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{-2(1)^2} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$(4) \quad \int \tan^{-1} x\, dx$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \tan^{-1} x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{1+x^2}\, dx \qquad v = x$$

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x - \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$(5) \quad \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}\, dx$$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

ضع $x = 5\sec\theta$ أي أن $\sec\theta = \frac{x}{5}$

$$dx = 5\sec\theta\, \tan\theta\, d\theta$$

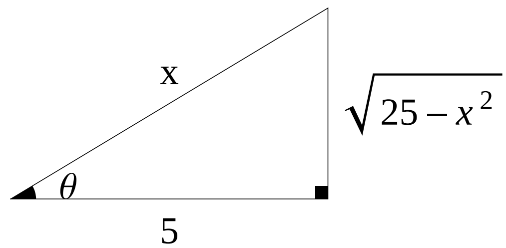
$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}\, dx = \int \frac{\sqrt{(5\sec\theta)^2 - 25}}{(5\sec\theta)^2}\, 5\sec\theta\, \tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{25(\sec^2\theta - 1)}}{25\sec^2\theta}\, 5\sec\theta\, \tan\theta\, d\theta = \int \frac{\sqrt{25\tan^2\theta}}{25\sec^2\theta}\, 5\sec\theta\, \tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{5\tan\theta}{25\sec^2\theta}\, 5\sec\theta\, \tan\theta\, d\theta = \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta}\, d\theta$$

$$= \int \left(\frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} - \frac{1}{\sec \theta} \right) \, d\theta = \int (\sec \theta - \cos \theta) \, d\theta$$

$$= \ln |\sec \theta + \tan \theta| - \sin \theta + c$$



من المثلث نلاحظ أن :

$$\sec \theta = \frac{x}{5} \ , \ \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5} \ , \ \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^2} \, dx = \ln \left| \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5} \right| - \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} + c$$

(6) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}$$

ضع $x = u^6$ أي أن $u = x^{\frac{1}{6}}$

$$dx = 6u^5 \, du$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{6u^5 \, du}{(u^6)^{\frac{1}{3}} - (u^6)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{6u^5}{u^2 - u^3} \, du = \int \frac{6u^5}{u^2(1 - u)} \, du$$

$$= \int \frac{6u^3}{1 - u} \, du = -6 \int \frac{u^3}{u - 1} \, du = -6 \int \left[(u^2 + u + 1) + \frac{1}{u - 1} \right] \, du$$

$$= -6 \left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln |u - 1| \right] + c$$

$$= -2u^3 - 3u^2 - 6u - 6 \ln |u - 1| + c$$

$$= -2 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^3 - 3 \left(x^{\frac{1}{6}} \right)^2 - 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} - 1 \right| + c$$

$$= -2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} - 1 \right| + c$$

السؤال الثالث :

(أ) أحسب $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln x$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln x \quad (0.\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\ e^x} = 0$$

لاحظ أن $\lim_{x\to\infty} x\ e^x = +\infty$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t (\ln x)^{-2}\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^{-1}}{-1}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{\ln t} - \left(\frac{-1}{\ln 2}\right)\right]$$

$$= 0 - \left(\frac{-1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

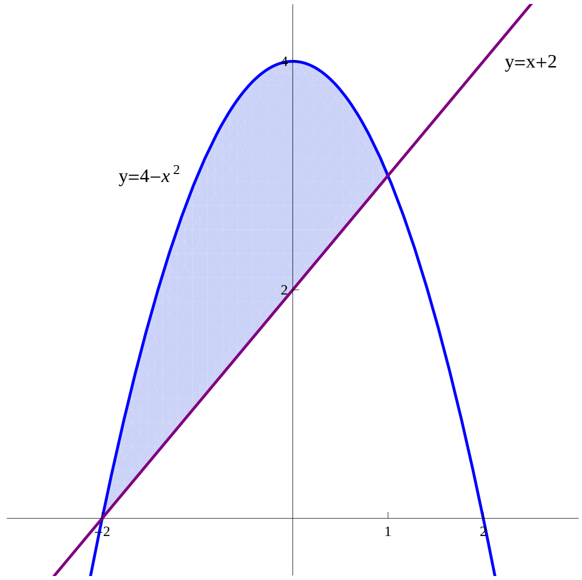
التكامل المعتل متقارب وقيمته $\frac{1}{\ln 2}$

السؤال الرابع : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0, 2)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

$$\implies x = -2\,,\ x = 1$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(4 - x^2) - (x+2)\right]\,dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

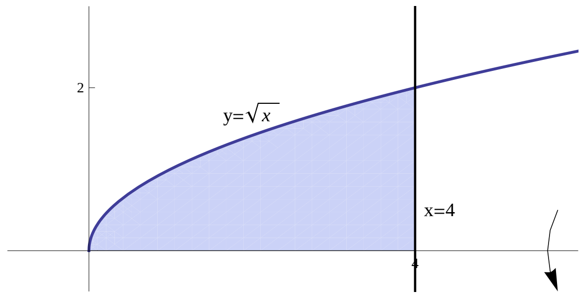
السؤال الخامس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x}$ و $y = 0$ و $x = 4$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه $(0,0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $x = 4$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(4,0)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{0}{2}\right) = 8\pi$$

السؤال السادس : أحسب طول القوس $y = \cosh x$ من $x = 0$ إلى $x = \ln 2$.

الحل :

$$f(x) = \cosh x \implies f'(x) = \sinh x$$

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + (\sinh x)^2} \, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 x} \, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x} \, dx = \int_0^{\ln 2} \cosh x \, dx = [\sinh x]_0^{\ln 2}$$

$$= \sinh(\ln 2) - \sinh(0) = \sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \implies \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

السؤال السابع : أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{4 - x^2}$ ، $-2 \le x \le 2$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, \sqrt{\frac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = 4\pi \int_{-2}^{2} 1\, dx$$

$$= 4\pi\, [x]_{-2}^{2} = 4\pi[2-(-2)] = 4\pi\,(4) = 16\pi$$

السؤال الثامن :

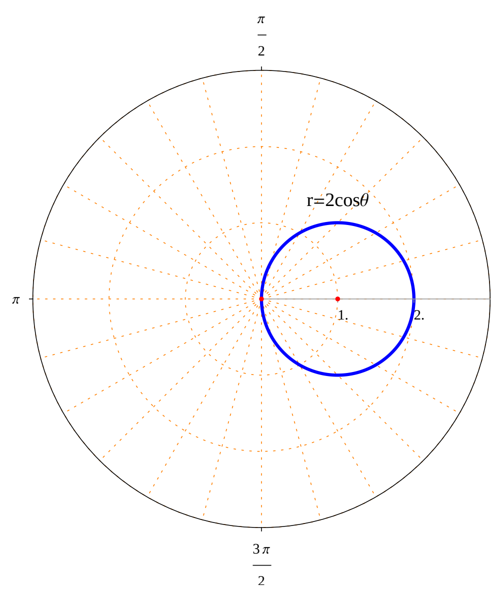
(أ) حول المعادلة القطبية $r = 2\cos\theta$ إلى معادلة ديكارتية ثم تعرف على بيانها .

الحل :

$$r = 2\cos\theta \implies r^2 = 2(r\cos\theta) \implies x^2+y^2 = 2x \implies x^2-2x+y^2 = 0$$

$$\implies (x^2-2x+1)+y^2 = 1 \implies (x-1)^2+y^2 = 1$$

المعادلة الديكارتية تمثل دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 1 .

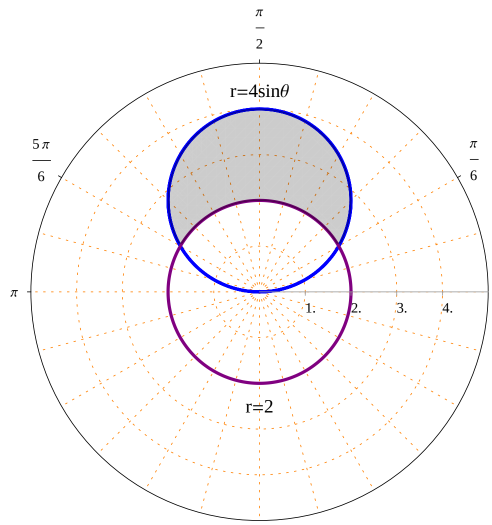


(ب) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 4\sin\theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

المنحنى $r = 4\sin\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 4\sin\theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$4\sin\theta = 2 \implies \sin\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}\ ,\ \theta = \frac{5\pi}{6}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(4\sin\theta)^2 - (2)^2\right]\ d\theta\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(16\sin^2\theta - 4\right)\ d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[16\,\frac{1}{2}\,(1-\cos 2\theta) - 4\right]\ d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8 - 8\cos\theta - 4)\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 8\cos\theta)\, d\theta = [4\theta - 4\sin 2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[4\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\sin\left(4\,\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[4\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\sin\left(2\,\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= (2\pi - 4\sin(2\pi)) - \left(\frac{2\pi}{3} - 4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\pi - 0 - \frac{2\pi}{3} + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1436 - 1437 هـ
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (9 درجات) :

(1) استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x-3)\,dx$

الحل :

$$f(x) = 4x - 3 \ , [a,b] = [0,2]$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta_x = 0 + k\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}$$

مجموع ريمان هو

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[4\left(\frac{2k}{n}\right) - 3\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k}{n^2} - \frac{6}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{16}{n^2}\,k - \sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n} = \frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$R_n = \frac{16}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{6}{n}\,n = 8\,\frac{n(n+1)}{n^2} - 6$$

$$\int_0^2 (4x-3)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(8\,\frac{n(n+1)}{n^2} - 6\right) = 8(1) - 6 = 8 - 6 = 2$$

(2) أوجد قيمة c التي تحقق شرط نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[-2,0]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = x^2$ و $[a,b] = [-2,0]$

$$(0-(-2))\,c^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0}$$

$$2c^2 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 0 - \left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$c^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Longrightarrow c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c = -\frac{-2}{\sqrt{3}} \in (-2, 0)$ وبالتالي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[-2, 0]$

بينما $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \notin (-2, 0)$

(3) جد $F'(2)$ إذا كانت $F(x) = \int_{2x-3}^{x^2} \ln(t^2)\, dt$

الحل :

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{2x-3}^{x^2} \ln(t^2)\, dt = \ln\left((x^2)^2\right)\ (2x) - \ln\left((2x-3)^2\right)\ (2)$$

$$F'(x) = 2x\ln(x^4) - 2\ln(2x-3)^2 = 8x\ln(x) - 4\ln|2x-3|$$

$$F'(2) = 16\ln(2) - 4\ln|4-3| = 16\ln(2) - 4\ln(1) = 16\ln(2)$$

السؤال الثاني (4 درجات) : أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \sqrt{x}\ln x$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(2) $y = (\tan x)^{\tan^{-1} x}$

الحل :

ضع $\ln|y| = \ln\left|(\tan x)^{\tan^{-1} x}\right|$

$$\ln|y| = \tan^{-1} x\ \ln|\tan x|$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2}\ \ln|\tan x| + \tan^{-1} x\,\frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$y' = y\left[\frac{\ln|\tan x|}{1+x^2} + \tan^{-1} x\,\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right]$$

$$y' = (\tan x)^{\tan^{-1} x}\left[\frac{\ln|\tan x|}{1+x^2} + \tan^{-1} x\,\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right]$$

السؤال الثالث (12 درجة) : أحسب التكاملات التالية

$$\int \sqrt{x}\,(x+1)^2\,dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \sqrt{x}\,(x+1)^2\,dx = \int \sqrt{x}(x^2+2x+1)\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)\,dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)\,dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + c$$

$$\int x\,(x^2+5)^7\,dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int x\,(x^2+5)^7\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+5)^7(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+5)^8}{8} + c$$

باستخدام القاعدة $\int [f(x)]^n\,f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx = e^{\tan x} + c$$

باستخدام القاعدة $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad (5)$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{dx}{x\,(\ln x)^{\frac{1}{2}}} = \int (\ln x)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

باستخدام القاعدة $\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$

(6) $\int \left(5^x + \frac{1}{2^x}\right)\, dx$

الحل :

$$\int \left(5^x + \frac{1}{2^x}\right)\, dx = \int 5^x\, dx + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x\, dx$$

$$= \frac{1}{\ln 5}\, 5^x + \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^x + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1436 - 1437 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أحسب $\dfrac{dy}{dx}$ فيما يلي :

(1) $y = \ln(\sinh(2x))$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cosh(2x)}{\sinh(2x)} = 2\coth(2x)$$

(2) $y = \cosh^{-1}(\sqrt{x})$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x})^2 - 1}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}}$$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-16}}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-16}}\,dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2 - (4)^2}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{e^x}{4}\right) + c$$

(2) $\displaystyle\int 2x\ \tan^{-1} x\,dx$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1} x & dv &= 2x\,dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2}\,dx & v &= x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int 2x\ \tan^{-1} x\,dx &= x^2\ \tan^{-1} x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\ &= x^2\ \tan^{-1} x - \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx \end{aligned}$$

$$= x^2\ \tan^{-1} x - \int \frac{1+x^2}{1+x^2}\, dx + \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= x^2\ \tan^{-1} x - \int 1\, dx + \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= x^2\ \tan^{-1} x - x + \tan^{-1} x + c$$

$$\int \cos x \sin^3 x\, dx \quad (3)$$

الحل :

$$\int \cos x \sin^3 x\, dx = \int (\sin x)^3 \cos x\, dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + c$$

$$\int \tan^3 x\ \sec^6 x\, dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \tan^3 x\ \sec^6 x\, dx = \int \tan^2 x\ \sec^5 x\ \sec x\ \tan x\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\ \sec^5 x\ \sec x\ \tan x\, dx$$

نستخدم التعويض $u = \sec x$

$$du = \sec x\ \tan x\, dx$$

$$\int (\sec^2 x - 1)\ \sec^5 x\ \sec x\ \tan x\, dx = \int (u^2 - 1)\, u^5\, du$$

$$= \int (u^7 - u^5)\, du = \frac{u^8}{8} - \frac{u^6}{6} + c = \frac{\sec^8 x}{8} - \frac{\sec^6 x}{6} + c$$

$$\int \sin(2x)\ \cos(4x)\, dx \quad (5)$$

الحل :

$$\int \sin(2x)\ \cos(4x)\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin[(2-4)x] + \sin[(4+2)x]\right)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(-2x)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(6x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin(2x)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(6x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \sin(2x)\,(2)\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}\int \sin(6x)\,(6)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\,(-\cos(2x)) + \frac{1}{12}\,(-\cos(6x)) + c = \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(6x)}{12} + c$$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(2)^2-(x)^2}}$$

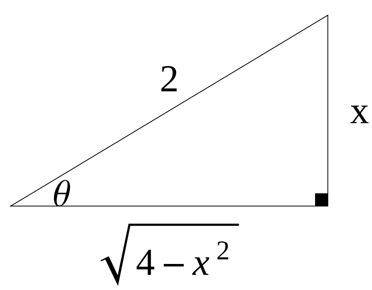
نستخدم التعويض $\sin\theta = \frac{x}{2} \implies x = 2\sin\theta$

$$dx = 2\cos\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}} = \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}$$

$$= \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4\cos^2\theta}} = \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{4\sin^2\theta\;2\cos\theta} = \int \frac{d\theta}{4\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}\cot\theta + c$$



$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{10x-x^2-21}}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{10x-x^2-21}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-10x)-21}}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-10x+25)+(25-21)}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-5)^2+4}}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{(2)^2-(x-5)^2}}}\, dx = \sin^{-1}\left(\frac{x-5}{2}\right) + c$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}\, dx \quad (8)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)x}{(x^2+1)x}$$

$$x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x-2 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcc} A+B=0 & \longrightarrow & (1) \\ C=1 & \longrightarrow & (2) \\ A=-2 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (1) نحصل على : $B=2$

$$\frac{x-2}{x^3+x} = \frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}\, dx = \int \frac{-2}{x}\, dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx$$

$$= -2\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= -2\ln|x| + \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + c$$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx \quad (9)$$

الحل : نستخدم التعويض

$$u = \sqrt{1+\sqrt{x}} \implies 1+\sqrt{x} = u^2 \implies \sqrt{x} = u^2-1 \implies x = (u^2-1)^2$$

$$dx = 2(u^2-1)(2u)\, du = (4u^3-4u)\, du$$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx = \int u(4u^3 - 4u)\, du = \int (4u^4 - 4u^2)\, du$$

$$= 4\,\frac{u^5}{5} - 4\,\frac{u^3}{3} + c = \frac{4}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3 + c$$

111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1436 - 1437 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ على الفترة $[-2, 0]$

الحل : باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\, dx$

حيث $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ و $[a, b] = [-2, 0]$

$$(0-(-2))\,(c+1)^{\frac{1}{3}} = \int_{-2}^{0} (x+1)^{\frac{1}{3}}\, dx = \left[\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}\right]_{-2}^{0}$$

$$2(c+1)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}(0+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}(-2+1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(-1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

$$2(c+1)^{\frac{1}{3}} = 0 \implies (c+1)^{\frac{1}{3}} = 0 \implies c+1 = 0 \implies c = -1$$

لاحظ أن $c = -1 \in (-2, 0)$

السؤال الثاني : أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int \tan(2x)\, dx$

الحل :

$$\int \tan(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int \tan(2x)\,(2)\, dx = \frac{1}{2}\ln|\sec(2x)| + c$$

(2) $\int \frac{5^{\tan^{-1} x}}{x^2+1}\, dx$

الحل :

$$\int \frac{5^{\tan^{-1} x}}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{\ln 5}\int 5^{\tan^{-1} x}\frac{1}{x^2+1}\,\ln 5\, dx = \frac{1}{\ln 5}\, 5^{\tan^{-1} x} + c$$

باستخدام العلاقة

$\int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{1}{\ln a}\, a^{f(x)} + c$ حيث $a > 0$.

(3) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

الحل :

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \ln x\, dx$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \ln x \qquad dv = x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$
$$du = \frac{1}{x}\, dx \quad v = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - \int 2x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\, dx = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) + c = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} \quad (4)$$

الحل :

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 4x)}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 4x + 4) + 4}}$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x-2)^2 + 4}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2)^2 - (x-2)^2}} = \left[\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_1^2$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{2-2}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{1-2}{2}\right) = \sin^{-1}(0) - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x}\, dx \quad (5)$$

الحل : باستخدام القسمة المطولة

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 + x} = (x - 1) + \frac{x - 1}{x^2 + x}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية للدالة الكسرية $\frac{x-1}{x^2+x}$

$$\frac{x - 1}{x^2 + x} = \frac{x - 1}{x(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x + 1}$$

$$x - 1 = A_1(x + 1) + A_2 x$$

ضع $x = 0$:

$$0 - 1 = A_1(0+1) \implies A_1 = -1$$

ضع $x = -1$:

$$-1 - 1 = A_2(-1) \implies A_2 = 2$$

$$\int \frac{x^3-1}{x^2+x}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x+1}\right)\,dx$$

$$= \int (x-1)\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x - \ln|x| + 2\ln|x+1| + c$$

(6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}}\,dx \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}}\,dx$$

ضع $x = u^6$ أي أن $u = x^{\frac{1}{6}}$

$$dx = 6u^5\,du$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}}\,dx = \int \frac{\left(u^6\right)^{\frac{1}{2}}\;6u^5}{(u^6)^{\frac{4}{3}}+(u^6)^{\frac{5}{3}}}\,du = \int \frac{6u^8}{u^8+u^{10}}\,du$$

$$= 6\int \frac{u^8}{u^8(1+u^2)}\,du = 6\int \frac{du}{1+u^2} = 6\tan^{-1}u + c = 6\tan^{-1}\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + c$$

السؤال الثالث :

(أ) أحسب $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\ln(1+x)}$

الحل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\ln(1+x)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\pi\cos \pi x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\pi(1+x)\cos \pi x$$

$$= \pi(1+0)\cos(0) = \pi\ (1)\ (1) = \pi$$

(ب) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^1 x\ \ln x\, dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب)

الحل :

$$\int_0^1 x\ \ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x\ \ln x\, dx$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \ln x \qquad dv = x\, dx$$
$$du = \frac{1}{x}\, dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x\ \ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+} \left(\left[\frac{x^2}{2}\ \ln x \right]_t^1 - \int_t^1 \frac{x^2}{2}\ \frac{1}{x}\, dx \right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(\left[\frac{x^2}{2}\ \ln x \right]_t^1 - \frac{1}{2}\int_t^1 x\, dx \right) = \lim_{t\to 0^+} \left(\left[\frac{x^2}{2}\ \ln x \right]_t^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} \right]_t^1 \right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{2}\ \ln 1 - \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} \right) \right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(0 - \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4} \right) = 0 - 0 - \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$$

التكامل المعتل متقارب وقيمته $-\frac{1}{4}$

لاحظ أن :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{2}\ln t \quad (0.-\infty)$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{2}\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{2t^{-2}} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty} \right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

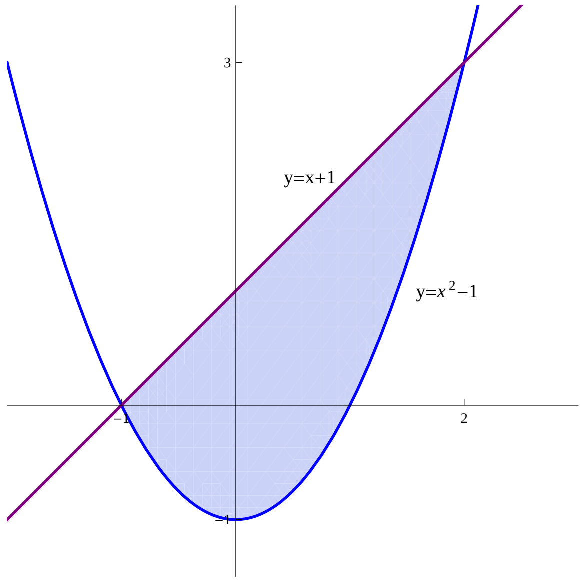
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{2t^{-2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-4t^{-3}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3}{-2t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{-2} = 0$$

السؤال الرابع : أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$ و $y = x + 1$ وأحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $y = x^2 - 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, -1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = x + 1$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0, 1)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2 - 1$ و $y = x + 1$:

$$x^2 - 1 = x + 1 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x-2)(x+1) = 0$$

$$\implies x = -1 \; , \; x = 2$$

$$A = \int_{-1}^{2} \left[(x+1) - (x^2 - 1)\right] \, dx = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2) \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left[\left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{3} - 2\right)\right]$$

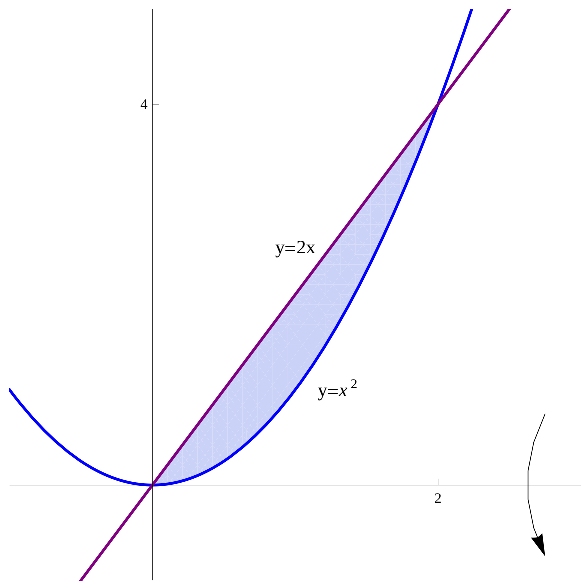
$$= 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

السؤال الخامس : أحسب حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

$$\implies x = 0 \,,\ x = 2$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right] \, dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5}\right)\right]$$

$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{64}{15}\pi$$

السؤال السادس : أحسب طول القوس $y = \pi + \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ من $x = 0$ إلى $x = 3$.

الحل :

$$f(x) = \pi + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \implies f'(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \, dx = \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx = \int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \left[\frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}(1) = \frac{16-2}{3} = \frac{14}{3}$$

السؤال السابع : أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{x}$ ، $1 \leq x \leq 4$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\,\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\,\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\,\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= 2\pi\,\frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4x+1}\,dx = \pi \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \pi\,\frac{1}{4} \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}}(4)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(17)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{6}\left[(17)^{\frac{3}{2}} - (5)^{\frac{3}{2}}\right]$$

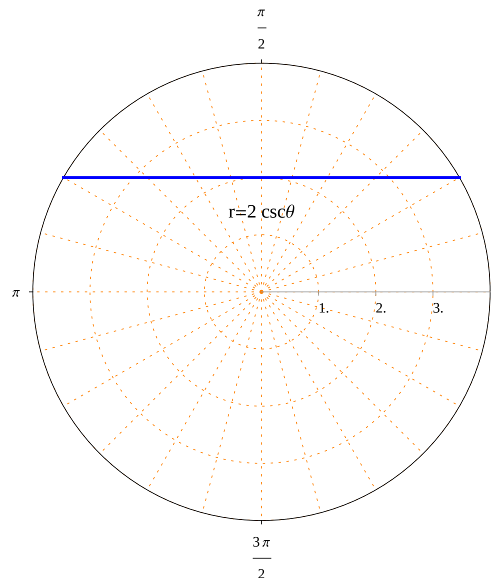
السؤال الثامن :

(أ) حول المعادلة القطبية $r = 2\csc\theta$ إلى معادلة ديكارتية ثم تعرف على بيانها .

الحل :

$$r = 2\csc\theta = \frac{2}{sin\theta} \implies r\sin\theta = 2 \implies y = 2$$

المعادلة الديكارتية خط مستقيم موازي للمحور القطبي ويمر بالنقطة $(r,\theta) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

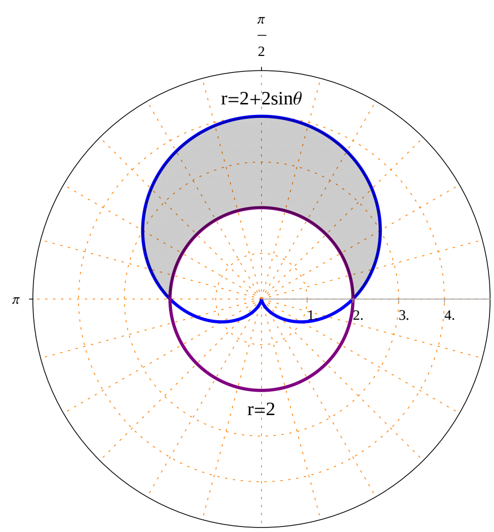


(ب) أرسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2\sin\theta$ وخارج المنحنى $r = 2$ ثم أحسب مساحتها .

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2\sin\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2\sin\theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$2+2\sin\theta=2 \implies \sin\theta=0 \implies \theta=0\ ,\ \theta=\pi$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

$$A=2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(2+2\sin\theta)^2-(2)^2\right]\,d\theta\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(4+8\sin\theta+4\sin^2\theta)-4\right]\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8\sin\theta+4\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[8\sin\theta+4\,\frac{1}{2}\,(1-\cos 2\theta)\right]\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+8\sin\theta-2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[2\theta-8\cos\theta-\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)-8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(2\,\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[2\,(0)-8\cos\,(0)-\sin\,(2\,(0))\right]$$

$$=(\pi-0-0)-(0-8-0)=8+\pi$$