الاشتقاق الجزئي

التعريف ليكن f دالة في متغيرين و $(a,b)\in D_f$

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ إذا كانت موجودة ومنتهية

فإن f لها اشتقاق جزئي أول بحسب x (أو المتغير الأول) عند النقطة (a,b) ونرمز لهاته القيمة $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ أو $f_x(a,b)$

(2) $\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$ إذا كانت موجودة ومنتهية

فإن f لها اشتقاق جزئي أول حسب y (أو المتغير الثاني) عند النقطة (a,b) ونرمز لهاته القيمة $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ أو $f_y(a,b)$

تذكير :

$$n \in \mathbb{Q} , \quad (x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\left[(u(x))^n\right]' = n\,(u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$$

$$x \neq 0 , \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \; ;$$

$$u(x) \neq 0 , \quad (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)} \; ; \quad (u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$$

$$v(x) \neq 0 , \quad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \; ; \quad (u(x)\cdot v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

مثال: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ، جد الاشتقاق الجزئي للدالة f عند كل نقطة في مجالها إن وجدت.

الحل: عند النقطة $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x(x,y)\left(=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right)=\frac{y(x^2+y^2)-xy(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\boxed{f_x(x,y)=\frac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$f_y(x,y)\left(=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k-0}\right)=\frac{x(x^2+y^2)-xy(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\boxed{f_y(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$$

عند النقطة $(0,0)$

• $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$

فإن f لها اشتقاق جزئي حسب x عند النقطة $(0,0)$

و $\boxed{f_x(0,0)=0}$

• $\lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0\cdot k}{0^2+k^2}-0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$

فإن f لها اشتقاق جزئي أولي حسب y عند النقطة $(0,0)$

و $\boxed{f_y(0,0)=0}$

وبالتالي:

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \frac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} ; & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 , & (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad ; \quad f_y(x,y)=\begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} , & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ملاحظة:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\leftarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة.

إذن f ليست متصلة عند النقطة $(0,0)$.

$\leftarrow$ $f_x(0,0)=0$ ، $f_y(0,0)=0$ (الاشتقاق الجزئي الأول موجود عند النقطة $(0,0)$)

مثال

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ادرس الاشتقاق الجزئي حسب x وحسب y لـ f عند النقطة $(0,0)$.

الحل:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h.0}{x^2+0^4}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

نأن $f_x(0,0)=0$ (موجودة).

$$\lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0.k^2}{0^2+k^4}-0}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0$$

نأن $f_y(0,0)=0$ (موجودة).

مثال

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

جد الاشتقاق الجزئي حسب x وحسب y عند النقطة $(0,0)$.

الحل:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

$f_x(0,0)=1$ إذن

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0^3}{0^2+k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

$f_y(0,0)=0$ إذن

مثال 3 ص 57

إذا كانت $f(x,y) = xe^{y^2} + \ln(x^2+y^2+1)$

أوجد $f_x(x,y)$ ، $f_y(x,y)$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

الحل:

$D_f = \mathbb{R}^2$

ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ؛

$$f_x(x,y) = e^{y^2} + \frac{2x}{x^2+y^2+1}$$

$$f_y(x,y) = x2ye^{y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2+1} = 2xye^{y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

مثال 4 ص 57, 58

إذا كانت الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

برهن أن $f_x(0,y)=-y,\ y\in\mathbb{R}$ لكل، $f_y(x,0)=x:\ x\in\mathbb{R}$ لكل

الحل:

$D_f=\mathbb{R}^2$

(1) عند النقطة $(x,y)\neq(0,0)$ لدينا:

- $f_x(x,y)=\dfrac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$

فإن $f_x(0,y)=\dfrac{-y^5}{(0^2+y^2)^2}=-\dfrac{y^5}{y^4}=-y$ لكل $y\neq0$

- $f_y(x,y)=\dfrac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}$

فإن $f_y(x,0)=\dfrac{x^5}{(x^2+0^2)^2}=\dfrac{x^5}{x^4}=x$ لكل $x\neq0$

عند النقطة $(0,0)$:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0\Rightarrow f_x(0,0)=0$$

$$\lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=0\Rightarrow f_y(0,0)=0$$

الخلاصة:

$f_x(0,y)=-y\quad ;\ y\in\mathbb{R}$ لكل

$f_y(x,0)=x\quad ,\ x\in\mathbb{R}$

طريقة ثانية $y\neq0$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{hy(h^2-y^2)}{(h^2+y^2)}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2}=\frac{-y^3}{y^2}=-y$$

$f_x(0,y)=-y$

مثال 8 ص 60

أوجد المشتقات الجزئية للدالة:

$$f(x,y)=(x^2+y^2+1)^{x+y}$$

الحل:

$$D_f=\mathbb{R}^2$$

نلاحظ أن:

$$\ln(f(x,y))=\ln\left((x^2+y^2+1)^{x+y}\right)=(x+y)\ln(x^2+y^2+1)$$

تذكير:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=f_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(f(x,y))\right)=1\ln(x^2+y^2+1)+(x+y)\frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(f(x,y))\right)=1\ln(x^2+y^2+1)+(x+y)\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(f(x,y))\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)} \quad (1')$$

وحسب (1), (1') لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f(x,y)\left(\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2x(x+y)}{x^2+y^2+1}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(x^2+y^2+1)^{x+y}\ln(x^2+y^2+1)+2x(x+y)\cdot(x^2+y^2+1)^{x+y-1}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(x^2+y^2+1)^{x+y-1}\left((x^2+y^2+1)\ln(x^2+y^2+1)+2x(x+y)\right)}$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x^2+y^2+1)^{x+y-1}\left((x^2+y^2+1)\ln(x^2+y^2+1)+2y(x+y)\right)}$$

الاشتقاق الجزئي من رتب عليا

لتكن f دالة بمتغيرين

و f_x , f_y الاشتقاق الجزئي الأول للدالة f

إذا كان f_x , f_y لها اشتقاق جزئي أول فنقول

أن f لها إشتقاق جزئي ثاني ويكون كالآتي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = f_{y^2}$$

مثال ٩ ص ٦١ :

إذا كانت $f(x,y)=x^3e^{-2y}+y^{-2}\cos x$ ، لتكن (x,y) نقطة:

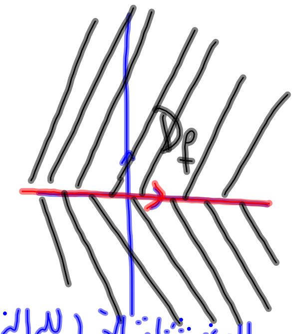
من نطاق الدالة f.

أحسب المشتقات f_{xy} , f_{yx} , f_{xx} , f_{yy} للدالة f:

الحل:

$D_f=\{(x,y):\ y\neq 0\}$ أي $D_f=\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0);\ x\in\mathbb{R}\}$



$f(x,y)=x^3e^{-2y}+\frac{\cos x}{y^2}=x^3e^{-2y}+y^{-2}\cos x$

$(x,y)\in D_f$

الاشتقاقات الأولى للدالة f:

$f_x(x,y)=3x^2e^{-2y}+y^{-2}(-\sin x)=3x^2e^{-2y}-y^{-2}\sin x$

$f_y(x,y)=-2x^3e^{-2y}-2y^{-2-1}\cos x=-2(x^3e^{-2y}+y^{-3}\cos x)$

الاشتقاق الثاني للدالة f:

$\boxed{f_{x^2}(x,y)=6xe^{-2y}-y^{-2}\cos x}$; $f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(f_x)(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2e^{-2y}-y^{-2}\sin x)$

$\boxed{f_{xy}(x,y)=-6x^2e^{-2y}+2y^{-3}\sin x}$

$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(f_y)(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2(x^3e^{-2y}+y^{-3}\cos x)\right)=-2(3x^2e^{-2y}-y^{-3}\sin x)$

$\boxed{f_{yx}(x,y)=-6x^2e^{-2y}+2y^{-3}\sin x=f_{xy}(x,y)}$

$f_{y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(f_y)(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-2(x^3e^{-2y}+y^{-3}\cos x)\right)=-2(-2x^3e^{-2y}-3y^{-4}\cos x)$

$\boxed{f_{y^2}(x,y)=4x^3e^{-2y}+6y^{-4}\cos x}$

مبرهنة :

لتكن f دالة ذي متغيرين x, y ، $(a,b) \in D_f$

إذا كان f لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة عند النقطة (a,b)

فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$

ملاحظة: لتكن f لها مشتقات من الرتبة الثانية عند النقطة (a,b) إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ليس متصل عند النقطة (a,b) أو $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ليس متصل عند النقطة (a,b) .

مثال ١٠ ص 61, 62

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^5}{x^4+y^4} & ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

برهن على أن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

الحل:

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

عند النقطة $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f_x(x,y)=\frac{y^5(x^4+y^4)-xy^5(4x^3)}{(x^4+y^4)^2}=\frac{y^5(-3x^4+y^4)}{(x^4+y^4)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{5xy^4(x^4+y^4)-xy^5(4y^3)}{(x^4+y^4)^2}=\frac{xy^4(5x^4-y^4)}{(x^4+y^4)^2}$$

عند النقطة $(0,0)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=\lim_{x\to 0}0=0 \Rightarrow \boxed{f_x(0,0)=0}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=\lim_{y\to 0}0=0 \Rightarrow \boxed{f_y(0,0)=0}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^4(5x^4-y^4)}{(x^4+y^4)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad / \quad f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^5(-3x^4+y^4)}{(x^4+y^4)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ ن،و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_x\right)(0,0)=?$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^5\cdot y^4}{(y^4)^2}-0}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^9}{y^9}=\lim_{y\to 0}1=1\Rightarrow\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_y\right)(0,0)?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=\lim_{x\to 0}0=0\Rightarrow\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

ن،و

مثال 13، ص 66

لتكن $f(x,y)=x^{c}e^{-\frac{y}{x}}$ ، حيث $x\neq 0$.

أوجد قيمة العدد c لكي تتحقق صحة العلاقة: $\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y}$

الحل: ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ حيث $x\neq 0$

لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=cx^{c-1}e^{-\frac{y}{x}}+x^{c}\left(\frac{y}{x^2}\right)e^{-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(cx^{c-1}+yx^{c-2}\right)e^{-\frac{y}{x}}$$

ولدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^{c}\left(-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{y}{x}}=-x^{c-1}e^{-\frac{y}{x}}$$

فإن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=-x^{c-1}\left(-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{y}{x}}=x^{c-2}e^{-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\Leftrightarrow\left(cx^{c-1}+yx^{c-2}\right)e^{-\frac{y}{x}}=yx^{c-2}e^{-\frac{y}{x}}-x^{c-1}e^{-\frac{y}{x}}$$

بما أن $e^{-\frac{y}{x}}\neq 0$ فإن

$$\Leftrightarrow\left(cx^{c-1}+\underbrace{yx^{c-2}}\right)=\underbrace{yx^{c-2}}-x^{c-1}$$

$$\Leftrightarrow cx^{c-1}=-x^{c-1}\qquad (x\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\boxed{c=-1}$$

مثال 16 ص 68

هل توجد دالة f في متغيرين x, y ، مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ بحيث: $\frac{\partial f}{\partial y} = y - x$ ، $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$

الحل:

نفرض أنه توجد دالة f في متغيرين مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

حيث $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = y - x$

فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

بينما: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y-x) = -1$ ،

فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ ، وهذا تناقض

وبالتالي فإنه لا توجد دالة في متغيرين x و y مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

مثال: نفس السؤال للدالة f حيث (1 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy$

(2 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y$