القيم القصوى للدوال في متغيرين

التعريف: لتكن f دالة في متغيرين x و y

ولتكن $(a,b) \in D_f$

(١) f لها قيمة عظمى محلية عند النقطة (a,b)

إذا كان يوجد قرص مفتوح مركزه (a,b) ونصف قطره $(r>0)$ حيث $B=B((a,b),r)$ لكل $(x,y) \in B$

فإن $f(x,y) \leq f(a,b)$

(٢) f لها قيمة صغرى محلية عند النقطة (a,b)

إذا كان يوجد قرص مفتوح $B=B((a,b),r)$ حيث لكل $(x,y) \in B$ فإن $f(x,y) \geq f(a,b)$

(٣) f لها قيمة قصوى محلية عند النقطة (a,b)

إذا كان f لها قيمة عظمى أو قيمة صغرى محلية عند النقطة (a,b).

(٤) f لها قيمة عظمى مطلقة (أو قيمة صغرى مطلقة) عند النقطة (a,b) إذا كان:

لكل $(x,y)\in D_f$, $f(x,y)\le f(a,b)$

(أو $f(x,y)\ge f(a,b)$).

(٥) f لها قيمة قصوى مطلقة عند النقطة (a,b) إذا كان f لها قيمة عظمى مطلقة أو إذا كان f لها قيمة صغرى مطلقة عند النقطة (a,b) .

مثال: $f(x,y) = x^2+y^2+1$

ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad (D_f = \mathbb{R}^2)$

$x^2+y^2 \geq 0$

فإن $x^2+y^2+1 \geq 1$, ولدينا $f(0,0) = 1$

وبالتالي: لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq f(0,0)$

فإن f لها قيمة صغرى مطلقة عند $(0,0)$.

ملاحظة: f ليس لها قيمة عظمى مطلقة

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y=1}} f(x,y) = +\infty$

مثال:

$$f(x,y) = 1 - x^2 + 2x + 4y - y^2$$

ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = -\left(\underbrace{x^2 - 2x + 1^2} + \underbrace{y^2 - 4y + 2^2}\right) + 1 + 1^2 + 2^2$$

$$= -\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right] + 6$$

$$= -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 6$$

لدينا لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$-(x-1)^2 - (y-2)^2 \leq 0$$

فإن

$$f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 6 \leq 6$$

ولدينا

$$f(1,2) = 6$$

فإن لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \leq f(1,2)$

وبالتالي f لها قيمة قصوى مطلقة عند النقطة $(1,2)$.

تعريف: (النقطة الحرجة)

ليكن f دالة في متغيرين x, y

و ليكن $(a,b) \in D_f$

(a,b) نقطة حرجة للدالة f إذا كان:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

أو

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ غير موجودة أو

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ غير موجودة.

مبرهنة: f دالة في متغيرين x و y
و $(a,b)\in D_f$
إذا كان f لها قيمة قصوى (محلية أ, مطلقة)
عند النقطة (a,b) فإن (a,b) هي نقطة حرجة للدالة f.

ملاحظة: إذا كان (a,b) ليست نقطة حرجة للدالة f فإن f ليس لها قيمة قصوى عند النقطة.

مثال 2 ص 113

$$z = f(x,y) = y^2 - x^2$$

← **النقاط الحرجة:**

$f_y(x,y) = 2y = 0$ و $f_x(x,y) = -2x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

فإن $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f

← لدينا $f(0,0) = 0$ ولدينا $f(0,y) = y^2 \geq 0$ لكل $y \in \mathbb{R}$

و $f(x,0) = -x^2 \leq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

فإن $f(0,0)$ ليست قيمة قصوى

ملاحظة: النقطة $(0,0)$ هي نقطة سرجية للدالة f.

تعريف: (a,b) نقطة سرجية للدالة f (Saddle point) إذا كان $f(a,b)$ ليست قيمة قصوى للدالة f و (a,b) نقطة حرجة.

مثال 3 ص 114

$$z = f(x,y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة f .

الحل:

النقاط الحرجة للدالة f

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2x = 0 \\ -4 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

فإن $(3,-1)$ النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f .

← القيم القصوى: لدينا $f(3,-1) = 6(3) - 4(-1) - (3)^2 - 2(-1)^2 = 11$

$$f(x,y) - f(3,-1) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2 - 11$$

$$= -(x^2 - 6x + 3^2) - 2(y^2 + 2y + 1^2)$$

$$= -(x-3)^2 - 2(y+1)^2$$

$$= -[(x-3)^2 + 2(y+1)^2] \leq 0$$

وبالتالي لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $f(x,y) \leq f(3,-1)$

فإن $\boxed{f(3,-1) = +11 \text{ قيمة عظمى مطلقة}}$

وبالتالي $f(3,-1)$ هي قيمة قصوى كلية.

مثال 5 ص 115

أوجد النقاط الحرجة، والقيم القصوى للدالة:

$$z = f(x,y) = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$$

الحل: النقاط الحرجة

$D_f = \mathbb{R}^2$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ -2\dfrac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

عند النقطة $(0,0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{4-2|x|-4}{x} = \lim_{x\to 0} -2\frac{|x|}{x}$$

$$= \begin{cases} -2 & ; x>0 \\ 2 & , x<0 \end{cases}$$

فإن $f_x(0,0)$ غير موجودة.

فإن $(0,0)$ هي نقطة حرجة للدالة f (الوحيدة)

القيم القصوى:

$f(0,0) = 4$

$$f(x,y) - f(0,0) = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2} - 4 = -2\sqrt{x^2+y^2} \leq 0$$

فإن لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $f(x,y) \leq f(0,0) = 4$

وبالتالي $f(0,0)=4$ قيمة قصوى (عظمى) مطلقة.

مبرهنة: ليكن f دالة لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة، و $(a,b) \in D_f$

وليكن

$$g(x,y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right](x,y)$$

ليكن (a,b) نقطة حرجة للدالة f.

(1) (a) إذا كان $g(a,b) > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$

فإن $f(a,b)$ قيمة صغرى محلية للدالة f عند (a,b)

(b) إذا كان $g(a,b) > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$

فإن $f(a,b)$ قيمة عظمى محلية للدالة f عند (a,b)

(2) إذا كان $g(a,b) < 0$ فإن (a,b) نقطة سرجية للدالة f.

(3) إذا كان $g(a,b) = 0$ فلا نستطيع الاستنتاج.

مثال : جد القيم القصوى المحلية للدالة

$$f(x,y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

الحل : النقاط الحرجة

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6 - 2x = 0 \\ -4 - 4y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

فإن $(3,-1)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f

القيم القصوى المحلية

$$g(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

فإن $g(3,-1) = 8 > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,-1) = -2 < 0$

فإن $f(3,-1) = 11$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f عند النقطة $(3,-1)$

مثال 7 ص 120

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-x+xy^2$$

(1) أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة

(2) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك السرجية

الحل: (1) النقاط الحرجة: للدالة f (f لها مشتقات جزئية من الرتبة الثانية متصلة)

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-1+y^2=0\\ 2xy=0\end{cases} \iff \begin{cases}x^2+y^2=1\\ x=0, y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0\\ y=1, y=-1\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}y=0\\ x=1, x=-1\end{cases}$$

فإن $(0,1)$ و $(0,-1)$ و $(1,0)$ و $(-1,0)$ كلها نقاط حرجة للدالة f.

القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية

$$g(x,y)=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 2y & 2x\end{vmatrix}=4x^2-4y^2=4(x^2-y^2)$$

عند النقطة: $(1,0)$: $g(1,0)=4>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=2>0$

فإن $f(1,0)=-\frac{2}{3}$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند $(1,0)$

عند النقطة: $(-1,0)$: $g(-1,0)=4>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0)=-2<0$

فإن $f(-1,0)=\frac{2}{3}$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f عند $(-1,0)$

عند النقطة: $(0,1)$, $(0,-1)$: $g(0,1)=g(0,-1)=-4<0$

فإن $(0,1)$ و $(0,-1)$ كل منهما نقطة سرجية للدالة f.

مثال 8 ص 121 أوجد النقاط الحرجة للدالة f

ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة إن وجدت $f(x,y)=x^4+y^2$

الحل: النقاط الحرجة

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

فإن $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

القيم العظمى والصغرى والنقاط السرجية:

$$g(x,y)=\begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=24x^2$$

عند النقطة $(0,0)$

$g(0,0)=0$

لا يمكن الاستنتاج حسب المبرهنة.

$f(x,y)-f(0,0)=x^4+y^2-0\geq 0$

فإن $f(x,y)\geq f(0,0)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

فإن $f(0,0)=0$ قيمة صغرى (مطلقة)

كلية للدالة f عند $(0,0)$.

مثال 9 ص 122: أوجد النقاط الحرجة للدالة

$f(x,y)=x^4+y^3$ وأوجد القيم العظمى والصغرى المحلية

للدالة f والنقاط السرجية إن وجدت.

الحل: النقاط الحرجة

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3=0 \\ 3y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

فإن $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

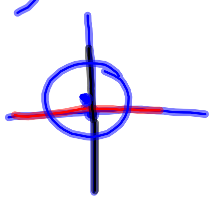
القيم العظمى، الصغرى المحلية، النقاط السرجية

$$g(x,y)=\begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}=72x^2y$$

$$g(0,0)=0$$

فإن

وبهذه الطريقة لا نقدر الاستنتاج.



$$f(x,y)-f(0,0)=x^4+y^3-0=x^4+y^3$$

ولدينا

$$f(x,0)-f(0,0)=x^4\geq 0$$

$$f(0,y)-f(0,0)=y^3 \begin{cases} \geq 0\ ;\ y\geq 0 \\ \leq 0\ ,\ y\leq 0 \end{cases}$$

فإن $(0,0)$ نقطة سرجية للدالة f.

مثال ١٠ ص 122 :

أوجد القيم القصوى المحلية، إن وجدت، للدالة:

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

الحل: النقاط الحرجة

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(4x^2-1) = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ أو } x=\frac{1}{2} \text{ أو } x=-\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

وبالتالي $(0,1)$ و $(\frac{1}{2},1)$ و $(-\frac{1}{2},1)$ ثلاث نقاط حرجة للدالة f.

القيم القصوى المحلية إن وجدت.

$$g(x,y) = \begin{vmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(12x^2-1)$$

عند النقطة $(0,1)$

$$g(0,1) = 4(0-1) = -4 < 0$$

فإن $(0,1)$ نقطة سرجية للدالة f.

عند النقطة $(\frac{1}{2},1)$ و $(-\frac{1}{2},1)$

$$g(\tfrac{1}{2},1) = g(-\tfrac{1}{2},1) = 8 > 0$$

ولدينا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tfrac{1}{2},1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\tfrac{1}{2},1) = 4 > 0$$

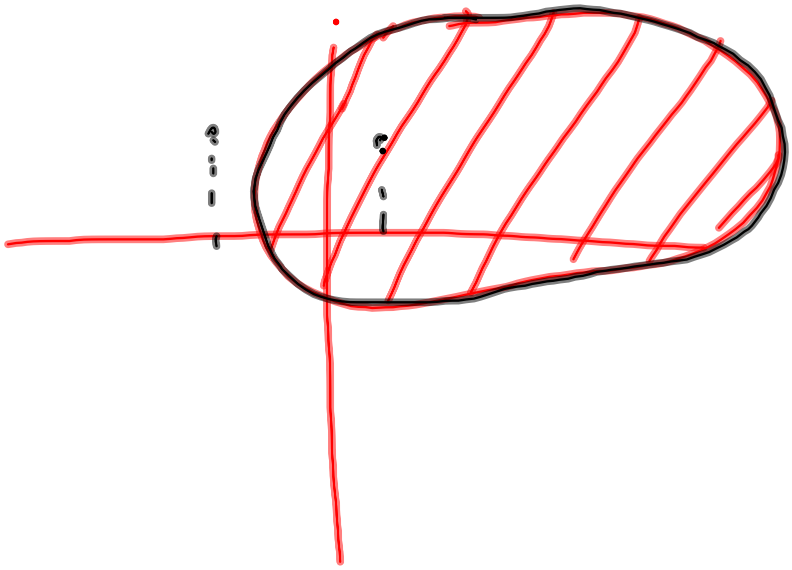
فإن $f(\frac{1}{2},1) = f(-\frac{1}{2},1) = -\frac{9}{8}$ هي قيمة صغرى للدالة f عند النقطة $(\frac{1}{2},1)$ وعند النقطة $(-\frac{1}{2},1)$

هل القيمة الصغرى مطلقة؟

$$f(x,y) - f(\tfrac{1}{2},1) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y + \frac{9}{8}$$
$$= 2(x^4 - \tfrac{1}{2}x^2) + (y^2 - 2y) + \frac{9}{8}$$
$$= 2(x^2 - \tfrac{1}{4})^2 + (y-1)^2 \quad \underbrace{+\frac{9}{8} - \frac{1}{8} - 1}_{0}$$
$$= 2(x^2 - \tfrac{1}{4})^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

وبالتالي $f(\frac{1}{2},1) = -\frac{9}{8}$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند $(\frac{1}{2},1)$

كذلك $f(-\frac{1}{2},1) = -\frac{9}{8}$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند $(-\frac{1}{2},1)$.



مثال 11 ص 123

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

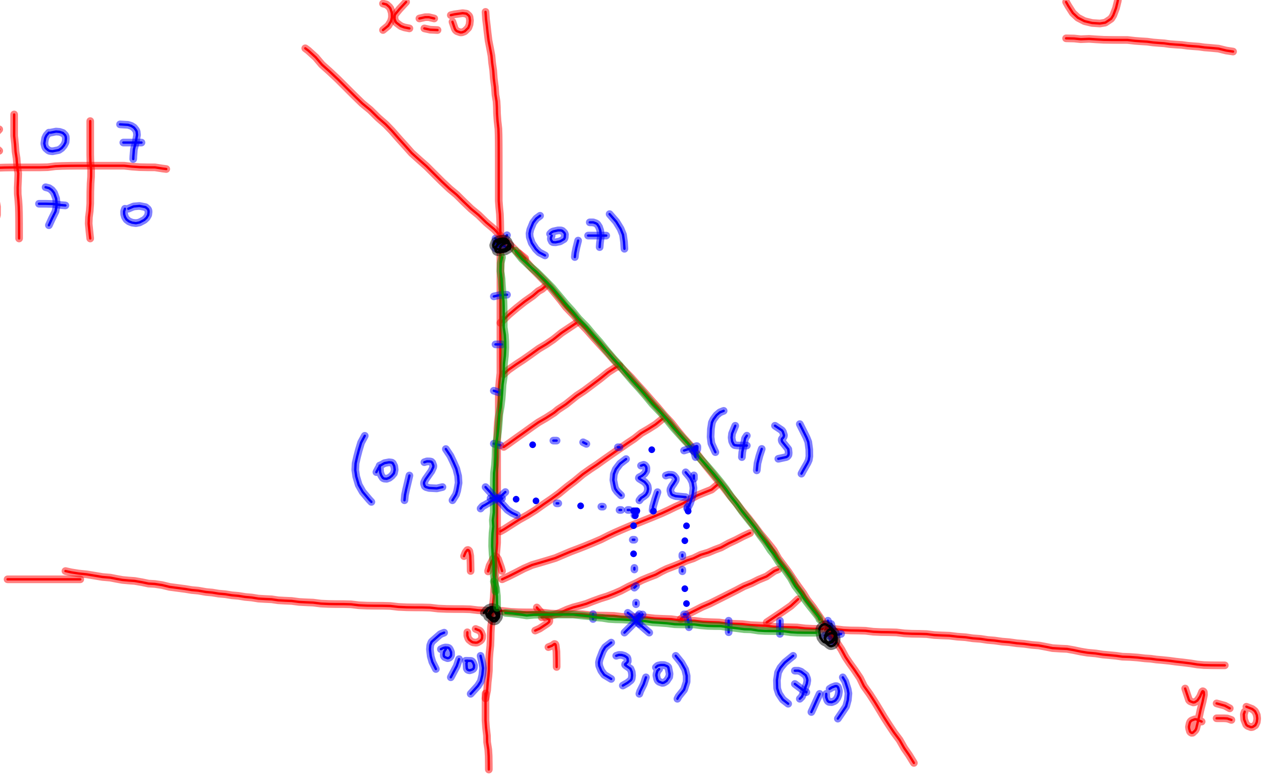
$$f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 4y$$

على المنطقة المغلقة والمحدودة بالمستقيمات

$x+y=7$ و $y=0$ ، $x=0$

الحل:

x	0	7
y	7	0



← النقاط الحرجة داخل المنطقة المفتوحة و القيم القصوى داخلها

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

فإن $(3,2)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة داخل المنطقة المفتوحة.

$$g(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

فإن $g(3,2) = 4 > 0$

وبما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,2) = 2 > 0$

فإن $f(3,2) = -13$ هي قيمة صغرى محلية

← القيم القصوى على الحدود

$f(7,0)=7$, $f(0,7)=21$, $f(0,0)=0$

$0 \le y \le 7$, $x=0$

$h_1(y)=f(0,y)=y^2-4y$

$h_1'(y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2$

$\boxed{f(0,2)=-4}$

ولدينا

$0 \le x \le 7$, $y=0$

$h_2(x)=f(x,0)=x^2-6x$, $h_2'(x)=2x-6=0 \Rightarrow x=3$

$\boxed{f(3,0)=-9}$

$$\underline{\underline{x+y=7}}$$

$$h_3(x)=f(x,7-x)=x^2-6x+(7-x)^2-4(7-x)$$

$$=x^2-6x+49-14x+x^2-28+4x$$

$$=2x^2-16x+21$$

$$h_3'(x)=4x-16=0 \Longrightarrow \underline{x=4} \quad (y=7-4=3)$$

$$\boxed{f(4,3)=h_3(4)=-11}$$

(x,y)	$(0,0)$	$(7,0)$	$(0,7)$	$(3,2)$	$(0,2)$	$(3,0)$	$(4,3)$
$f(x,y)$	0	7	21	-13	-4	-9	-11

فإن $f(3,2)=-13$ القيمة الصغرى المطلقة للدالة f عند $(3,2)$

$f(0,7)=21$ القيمة العظمى المطلقة للدالة f عند $(0,7)$

مثال 12 ص 125

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة

$f(x,y) = xy$ عندما تكون (x,y) في المنطقة

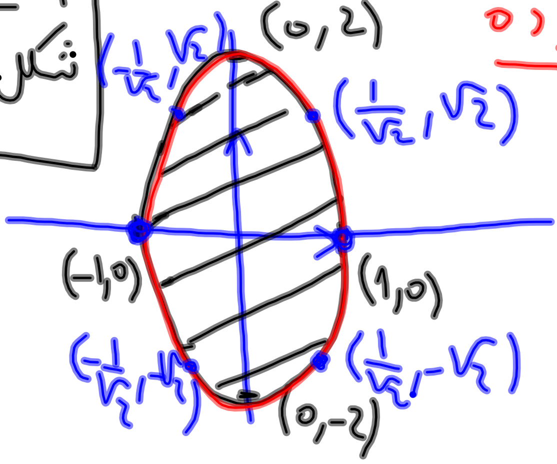
المحدودة بالقطع: $4x^2+y^2=4$

المنطقة المحدودة

$4x^2+y^2=4$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ شكل بيضاوي}}$



داخل المنطقة المفتوحة

النقاط الحرجة

$$(0,0)=(x,y) \Leftarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

وبالتالي $(0,0)$ النقطة الحرجة الوحيدة داخل المنطقة المفتوحة

$$g(x,y)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

بأن $(0,0)$ هي نقطة سرجية للدالة f داخل المنطقة

القيم القصوى على الحدود

$$y^2 = 4(1-x^2) \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 = 4$$

$y = -2\sqrt{1-x^2}$ أو $y = 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$

$(x \neq -1 \;،\; x \neq 1)$

$y = 2\sqrt{1-x^2}$ (أ)

$$h_1(x) = f(x, 2\sqrt{1-x^2}) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$h_1'(x) = 2\left(\sqrt{1-x^2} + x\frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$h_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

وبالتالي $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ أو $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = -1$ ، $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = 1$ و

ملاحظة:

$f(-1,0) = 0$ ، $f(1,0) = 0$

(ب) $y = -2\sqrt{1-x^2}$, $x=-1 , x \neq 1$

$$h_2(x) = f(x,y) = -2x\sqrt{1-x^2}$$

$$h_2'(x) = -2\,\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

بالتالي $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ أو $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = 1$ ، $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = -1$

(x,y)	$(1,0)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$
$f(x,y)$	0	0	1	-1	-1	1

النتيجة: $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = -1$ هي القيمة الصغرى المطلقة للدالة f عند النقطتين $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = 1$ هي القيمة العظمى المطلقة للدالة f عند النقطتين $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$

$$- - - , \; dA = dy\,dx \; , \; dA = dx\,dy$$

$$I = \iint_D f(x,y)\,dA$$

???