القيم القصوى

تعريف: لتكن f دالة في متغيرين x , y و $(a,b)\in D_f$

$f(a,b)$ قيمة عظمى محلية للدالة f عند النقطة (a,b) إذا كان يوجد $r>0$ حيث لكل $(x,y)\in B((a,b),r)$, $f(x,y)\leq f(a,b)$.

$f(a,b)$ قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة (a,b) إذا كان يوجد $r>0$ حيث لكل $(x,y)\in B((a,b),r)$, $f(x,y)\geq f(a,b)$

$f(a,b)$ قيمة قصوى محلية للدالة f عند النقطة (a,b) ، إذا كان $f(a,b)$ قيمة صغرى محلية أو قيمة عظمى محلية للدالة f عند النقطة (a,b).

$f(a,b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f عند النقطة (a,b) إذا كان لكل $(x,y)\in D_f$, $f(x,y)\leq f(a,b)$

$f(a,b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند النقطة (a,b) ، إذا كان لكل $(x,y)\in D_f$; $f(x,y)\geq f(a,b)$

$f(a,b)$ قيمة قصوى مطلقة للدالة f عند النقطة (a,b)

إذا كان $f(a,b)$ قيمة عظمى مطلقة أو قيمة صغرى مطلقة للدالة f ...

مثال: لتكن $f(x,y)=x^2-3x+y^2-2y+5$

لدينا:
$$f(x,y)=\underbrace{x^2-3x}+\underbrace{y^2-2y}+5$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2-1^2+5$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2-\frac{9}{4}-1+5$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2+\frac{7}{4}$$

نعلم أن $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2=D_f$

وبالتالي $f(x,y)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}=f\left(\frac{3}{2},1\right)$ لكل $(x,y)\in D_f=\mathbb{R}^2$

بأن $f\left(\frac{3}{2},1\right)=\frac{7}{4}$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند النقطة $\left(\frac{3}{2},1\right)$

مثال:

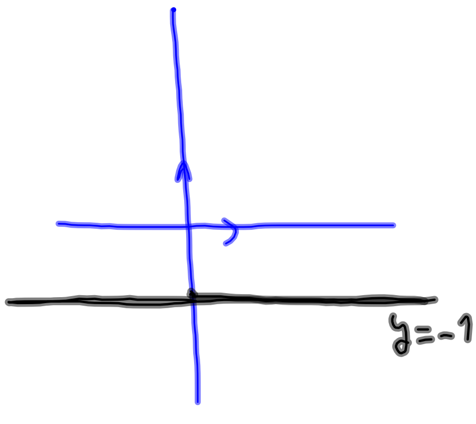
$$f(x,y) = e^{x-1} + y^2 + 2y + 4$$

لدينا: $e^{x-1} > 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$(y+1)^2 = y^2+2y+1 \geqslant 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

فإن $f(x,y) = e^{x-1}+y^2+2y+4 > 3 = f(x,-1)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2 = D_f$

وبالتالي لا توجد قيم قصوى للدالة f.



مثال: $f(x,y)= \sin(x)+2y-y^2+2$

لدينا: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2 = D_f$

ولدينا: $2y-y^2-1 = -(-2y+y^2+1) = -(y-1)^2$

نأن $-(y-1)^2 \leq 0$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2 = D_f$

وبالتالي: $\sin x - (y-1)^2 \leq 1$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2 = D_f$

نأن $f(x,y) = \sin x + 2y - y^2 + 2 \leq 3 = f(\frac{\pi}{2}+2k\pi, 1)$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

($\sin x = 1$ إذا, فقط إذا كان $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

النقاط الحرجة:

تعريف: لتكن f دالة في متغيرين x و y و $(a,b) \in D_f$

(a,b) نقطة حرجة للدالة f إذا كان:

(١) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ (f لها مشتقات جزئية أولية عند (a,b))

أو

(٢) لا توجد $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ أو $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

مثال
أوجد النقاط الحرجة للدالة f حيث $f(x,y)=y^2-x^2$

الحل: f لها مشتقات جزئية أولى عند كل نقطة.

فإن (x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا كان

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

$$\Leftrightarrow (-2x=0 \text{ و } 2y=0) \Leftrightarrow (x=0 , y=0)$$

فإن $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

مثال: لتكن f حيث
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
أوجد النقاط الحرجة للدالة f

الحل: نعلم أن f لها مشتقات جزئية أولى عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

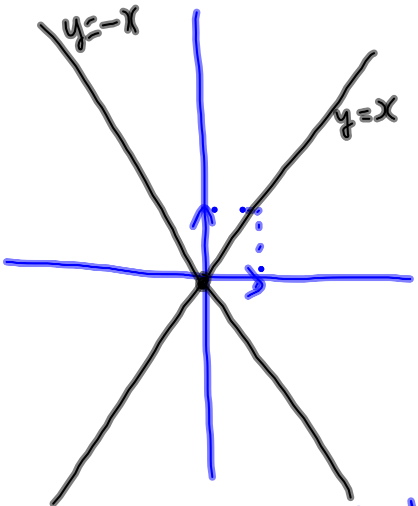
← نلاحظ أن $(0,0)$ هي نقطة حرجة للدالة f.

← $(x,y)\neq(0,0)$

(x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا كان ونقط إذا كان

$$\begin{cases}\frac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=0\\ \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y(-x^2+y^2)=0\\ x(x^2-y^2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0 \text{ أو } y^2=x^2\\ x=0 \text{ أو } y^2=x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=x \text{ أو } y=-x\\ x\neq 0\end{cases}$$



فإن (a,a) ، $(a,-a)$
هي نقطة حرجة للدالة f لكل $a\in\mathbb{R}$

مبرهنة: لتكن f دالة في متغيرين x و y ، $(a,b) \in D_f$
إذا كان $f(a,b)$ قيمة قصوى محلية للدالة f عند النقطة (a,b)
فإن (a,b) نقطة حرجة للدالة f.

ملاحظة: إذا كان (a,b) ليست نقطة حرجة للدالة f
فإن $f(a,b)$ ليست قيمة قصوى محلية للدالة f عند النقطة (a,b)

مثال 3 ص 114

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x,y)=6x-4y-x^2-2y^2$

الحل: النقاط الحرجة:

بما أن f لها مشتقات جزئية أولى عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$

فإن (x,y) نقطة حرجة إذا، وفقط إذا كان $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$

$$\iff \begin{cases} 6-2x=0 \\ -4-4y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

فإن $(3,-1)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

القيم القصوى المحلية

لدينا: $f(3,-1)=11$ فإن: $f(x,y)-f(3,-1)=6x-4y-x^2-2y^2-11$

$$=-\left[(x^2-6x+9)+2(y^2+2y+1)\right]$$

لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $=-\left[(x-3)^2+2(y+1)^2\right]\leq 0$

فإن $f(x,y)-f(3,-1)\leq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

فإن $f(x,y)\leq f(3,-1)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

[وبالتالي $f(3,-1)=11$ قيمة عظمى مطلقة للدالة عند النقطة $(3,-1)$]

وبالتالي $f(3,-1)=11$ قيمة قصوى (عظمى) كلية (مطلقة) للدالة f عند النقطة $(3,-1)$.

مثال 4 ص 115

أوجد النقاط الحرجة، القيم القصوى المحلية للدالة:

$$f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 4y$$

الحل: النقاط الحرجة: بما أن f لها مشتقات جزئية أولى

فإن (x,y) نقطة حرجة إذا، فقط إذا كان $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$

فإن

$$\begin{cases} 2x-6=0 \\ 2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

فإن $(3,2)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

القيم القصوى المحلية: لدينا $f(3,2)=-13$

فإن: $f(x,y)-f(3,2) = \underbrace{x^2-6x}+\underbrace{y^2-4y} - (-13) = (x-3)^2 + (y-2)^2$

وبالتالي $f(x,y)-f(3,2) \geq 0$ لكل $(x,y)\in \mathbb{R}^2$

فإن $f(x,y) \geq f(3,2)$ لكل $(x,y)\in \mathbb{R}^2$

فإن $f(3,2)=-13$ هي قيمة صغرى مطلقة.

فإن $f(3,2)=-13$ هي قيمة القصوى (صغرى) المحلية (لأنها مطلقة)

مثال 2 ص 115

أوجد النقاط الحرجة والنهايات القصوى للدالة:

$$f(x,y)=4-2\sqrt{x^2+y^2}.$$

$\sqrt{x^2}=|x|$.
$\sqrt{x^2}=x,\ x\geq 0$

الحل:

$D_f=\mathbb{R}^2$

الاشتقاق الجزئي عند النقطة $(0,0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4-2\sqrt{x^2}-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2|x|}{x}=\begin{cases}-2 ; & x>0\\ 2 ; & x<0\end{cases}$$

فإن $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ غير موجود وبالتالي $(0,0)$ هي نقطة حرجة للدالة f

عند النقطة $(0,0)\neq(x,y)$: لدينا $(0,0)\neq(x,y)$ نقطة حرجة للدالة f

فإن $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

فإن $(x=0\ ,\ y=0)$ و $(x,y)\neq(0,0)$

فإن $(x,y)\neq(0,0)$ ليست نقطة حرجة للدالة f.

وبالتالي فإن $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

القيم القصوى: لدينا $f(0,0)=4$.

$$f(x,y)-f(0,0)=4-2\sqrt{x^2+y^2}-4=-2\sqrt{x^2+y^2}\leq 0$$

فإن $f(x,y)-f(0,0)\leq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

فإن $f(0,0)=4$ هي القيمة القصوى (عظمى) المحلية (مطلقة).

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

مبرهنة: لتكن f دالة في متغيرين، مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة من القرص مركزه (a,b) ونصف قطره $r>0$.

لتكن الدالة:

$$g(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2$$

حيث (a,b) نقطة حرجة للدالة f.

(١) إذا كان $g(a,b)>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$ فإن $f(a,b)$ قيمة عظمى محلية للدالة f.

(٢) إذا كان $g(a,b)>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$ فإن $f(a,b)$ قيمة صغرى محلية للدالة f.

(٣) إذا كان $g(a,b)<0$ فإن (a,b) هي نقطة سرجية للدالة f.

(٤) إذا كان $g(a,b)=0$ فإن الاختبار يفشل.

ملحوظة:

(1)

$$g(a,b) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}$$

والمصفوفة تسمى هاسيان (Hessien) للدالة f عند النقطة (a,b)

(2) إذا كان f لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة عند النقطة (a,b)

فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$

(3) إذا كان $g(a,b) > 0$ ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 > 0$)

فإن $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \,,\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > 0\right)$ أو $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \,,\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) < 0\right)$

مثال 7 : إذا كانت : $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3 - x + xy^2$

(1) أوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة.

(2) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك السرجية إن وجدت للدالة f.

الحل:

f هي دالة لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$.

(1) (x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا، فقط إذا كان $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

فإن

$$\begin{cases} x^2-1+y^2=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=0 \text{ أو } y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=0 & \text{أو} \quad x=0 \\ x=1 \text{ أو } x=-1 & y=1 \text{ أو } y=-1 \end{cases}$$

فإن كل النقاط الحرجة للدالة f هي $(0,1)$ ، $(0,-1)$ ، $(1,0)$ ، $(-1,0)$

(٢)

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} \quad ; \quad H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

فإن

$$g(x,y)=4(x^2-y^2)$$

عند النقطة $(0,1)$ و $(0,-1)$

$$g(0,1)=g(0,-1)=-4<0$$

فإن $(0,1)$ نقطة سرجية للدالة f .

و $(0,-1)$ نقطة سرجية للدالة f .

عند النقطة $(1,0)$ و $(-1,0)$: لدينا : $g(1,0)=g(-1,0)=4>0$

و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=2>0$ فإن $f(1,0)=-\frac{2}{3}$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند $(1,0)$

وبما أن $g(-1,0)=4>0$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0)=-2<0$ فإن $f(-1,0)=\frac{2}{3}$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f عند $(-1,0)$.

مثال 8 ص 121 : لتكن $f(x,y)=x^4+y^2$

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية والنقاط الحرجة إن وجدت:

الحل: f لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة.

النقاط الحرجة: (x,y) نقطة حرجة إذا وفقط إذا كان $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 , \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

بأن $(0,0)$ هي النقطة الوحيدة الحرجة للدالة f

القيم القصوى: لدينا $f(x,y)=x^4+y^2 \geq 0 = f(0,0)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

بأن $f(0,0)=0$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند $(0,0)$.

مثال 9 ص 122: أوجد النقاط الحرجة للدالة f

$$f(x,y)=x^4+y^3$$

ثم حدد القيم العظمى والصغرى المحلية والنقاط السرجية إن وجدت.

الحل: • (x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا كان:

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 , \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\right)$ لأن f لها مشتقات جزئية أولى متصلة.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3=0 \\ 3y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

فإن $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

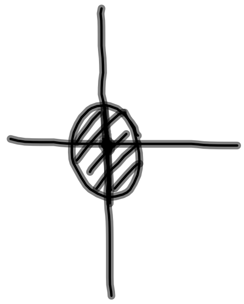
• لدينا:

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$$

فإن:

$$g(x,y)=\det(H_f(x,y))=72x^2y$$

$g(0,0)=0$ الاختبار يفشل



← لدينا $f(0,0)=0$ ، ولدينا $f(0,y)=y^3$

فإن $f(0,y)=y^3>0=f(0,0)$ إذا كان $y>0$

$f(0,y)=y^3<0=f(0,0)$ إذا كان $y<0$

فإن النقطة $(0,0)$ هي نقطة سرجية للدالة f.

مثال ١٥ ص 122 لنكن

$f(x,y)=2x^4+y^2-x^2-2y$

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة f إن وجدت.

الحل: النقاط الحرجة:

(x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا كان $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3-2x=0 \\ 2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(4x^2-1)=0 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \text{ أو } x=\frac{1}{2}, \text{ أو } x=-\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

فإن $(0,1)$ و $(\frac{1}{2},1)$ و $(-\frac{1}{2},1)$ هي النقاط الحرجة للدالة f.

القيم القصوى:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن $g(x,y) = 4(12x^2-1)$

عند النقطة $(0,1)$: $g(0,1) = -4 < 0$

فإن $(0,1)$ هي نقطة سرجية.

عند النقطة $(\frac{1}{2},1)$: لدينا : $g(\frac{1}{2},1) = 8 > 0$

ولدينا $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{2},1) = 2 > 0$ وبالتالي:

$f(\frac{1}{2},1) = -\frac{9}{8}$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة $(\frac{1}{2},1)$.

عند النقطة $(-\frac{1}{2},1)$: لدينا $g(-\frac{1}{2},1) = 8 > 0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{1}{2},1) = 2 > 0$

فإن $f(-\frac{1}{2},1) = -\frac{9}{8}$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة $(-\frac{1}{2},1)$.

مثال ١١ ص 123, 124

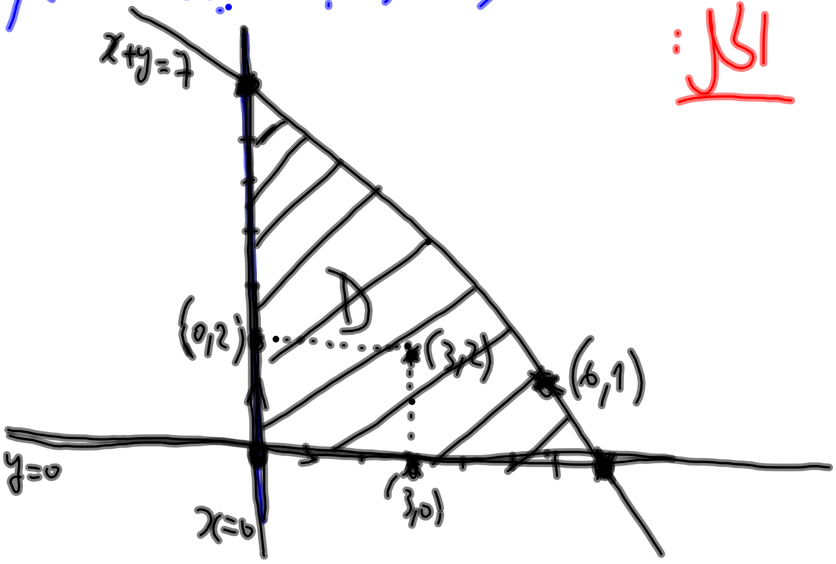
أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة: $f(x,y)=x^2-6x+y^2-4y$

على المنطقة المغلقة والمحدودة بالمستقيمات: $x=0$, $y=0$, $x+y=7$

الحل:

$x+y=7$

x	0	7
y	7	0



← داخل المنطقة D:

$f(x,y)=x^2-6x+y^2-4y$

النقاط الحرجة: (x,y) نقطة حرجة إذا وفقط إذا كان $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \\ 2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

فإن $f(3,2)=-13$ قيمة صغرى محلية لأن

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,2)=2$ ، $0<4=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\right](3,2)$

← على الحد $x=0$: $f(0,y)=y^2-4y$

النقطة الحرجة: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2$

$f(0,2)=-4$ ،

← على الحد $y=0$: $f(x,0)=x^2-6x$

النقطة الحرجة: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

$f(3,0)=-9$

← على الحد $x+y=7$ $(y=7-x)$

$f(x,7-x)=x^2-6x+(7-x)^2-4(7-x)$
$=2x^2-16x+21$

النقطة الحرجة: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,7-x)=4x-16=0 \Rightarrow x=4$

$f(4,3)=-11$

(x,y)	$(3,2)$	$(0,2)$	$(3,0)$	$(4,3)$	$(0,0)$	$(7,0)$	$(0,7)$
$f(x,y)$	-13	-4	-9	-11	0	7	21

$f(3,2)=-13$ القيمة الصغرى المطلقة للدالة f عند النقطة $(3,2)$ على المنطقة D.

$f(0,7)=21$ القيمة العظمى المطلقة للدالة f عند النقطة $(0,7)$ على المنطقة D.

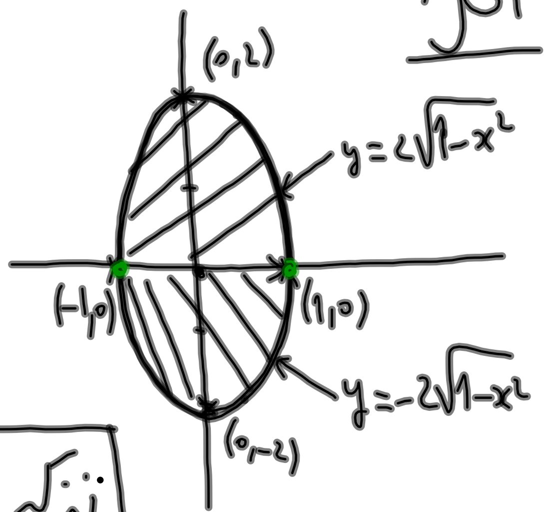
مثال 12 ص 125, 126

أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة $f(x,y)=xy$ عندما تكون مقيدة بالمنطقة المغلقة والمحدودة بالقطع الناقص الذي معادلته: $4x^2+y^2=4$

الحل:

$$4x^2+y^2=4$$
$$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{4-4x^2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2\sqrt{1-x^2} \\ y=-2\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$ أو

x	0	0	1	-1
y	2	-2	0	0



تذكير: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: شكل بيضاوي

← داخل المنطقة : $f(x,y) = x\cdot y$

النقاط الحرجة: (x,y) نقطة حرجة إذا وفقط إذا كان

$$\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \text{ و } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\right)$$

فإن $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

$$g(x,y)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1<0$$

فإن $(0,0)$ نقطة سرجية.

← على الحد $y=2\sqrt{1-x^2}$: $f(x,2\sqrt{1-x^2})=2x\sqrt{1-x^2}$

النقاط الحرجة: $0=\frac{\partial f}{\partial x}$, $2\left(\sqrt{1-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x^2=0 \text{ و } 1-x^2\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt2} \text{ أو } x=-\frac{1}{\sqrt2}$$

وبالتالي النقاط الحرجة هي: $\left(-\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2\right)$

على الحد $y=-2x\sqrt{1-x^2}$

نجد النقاط الحرجة التالية: $\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2\right)$

(x,y)	$(\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)$	$(-\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)$	$(\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)$	$(-\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)$
$f(x,y)$	1	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	1

(x,y)	$(1,0)$	$(-1,0)$
$f(x,y)$	0	0

حسب الجدول لدينا: $f\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2\right)=1$ هي القيمة العظمى المطلقة للدالة f عند النقطة $\left(\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2\right)$ وعند النقطة $\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2\right)$ بالقيمة المطلـ

ولدينا: $f\left(\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2\right)=-1$ هي القيمة الصغرى المطلقة للدالة f عند النقطة $\left(-\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2\right)$ وعند النقطة ...

مضارب لاجرانج بقيد واحد :

ليكن f دالة في متغيرين x و y لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة

وليكن $g(x,y)=0$ القيد في متغيرين x و y ______

$f(a,b)$ هي قيمة قصوى للدالة f حسب القيد g .

إذا كان : $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right) \neq (0,0)$ فإنه يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ حيث

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \\ g(a,b) = 0 \end{cases}$$

<u>ملاحظة</u>: $\nabla f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, i + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, j$

gradient of f : ∇f

مثال: أوجد القيم القصوى للدالة f: $f(x,y)=x\cdot y$ إذا كانت (x,y) مقيدة بالمنحنى $g(x,y)=4x^2+y^2-4=0$ بإستعمال مضارب لاجرانج

الحل: $f(x,y)$ قيمة قصوى مقيدة بالمنحنى $4x^2+y^2-4=0$

فإن
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda 8x \\ x=\lambda 2y \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8\lambda x \\ x=2\lambda(8\lambda x) \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

لدينا: $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) \neq (0,0)$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=8\lambda x \\ (16\lambda^2-1)x=0 \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8\lambda x \\ x=0 \text{ أو } \lambda=\frac{1}{4} \text{ أو } \lambda=-\frac{1}{4} \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

$x=0$ فإن $y=0$ وبالتالي $4\cdot 0^2+0^2-4=0$ غير ممكن

فإن $(0,0)$ ليس حل

$\lambda=\frac{1}{4}$ فإن $y=2x$ وبالتالي $4x^2+(2x)^2-4=0$

فإن $8x^2-4=0$

وبالتالي $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

فإن $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$

$\lambda=-\frac{1}{4}$ فإن $y=-2x$ وبالتالي $4x^2+(-2x)^2-4=0$

فإن $8x^2-4=0$

فإن $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

فإن $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$

(x,y)	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$
$f(x,y)$	1	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	1