القيم القصوى

مبرهنة: ليكن f دالة في متغيرين x و y و g قيد واحد حيث $g(x,y)=0$

القيم القصوى للدالة f بقيد واحد عند النقطة (x_0,y_0) إذا كان: يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ حيث:

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = \lambda\, g_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) = \lambda\, g_y(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

مبرهنة لاجرانج Lagrange

مثال 13 ص 130

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y)=xy$

إذا كانت (x,y) مقيدة على المنحنى:

$$g(x,y)=4x^2+y^2-4=0$$

الحل: القيم القصوى حيث

$$\begin{cases} f_x(x,y)=\lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y)=\lambda g_y(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda 8x \\ x=\lambda 2y \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=8\lambda x \\ x=16\lambda^2 x \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1-16\lambda^2)=0 \\ y=8\lambda x \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ أو } \lambda=\frac14 \text{ أو } \lambda=-\frac14 \\ y=0 \mid y=2x \text{ أو } y=-2x \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ لا تحقق $4x^2+y^2-4=0$

(1) $\lambda=\frac14$ فإن $y=2x$ وبالتالي $4x^2+(2x)^2-4=0$

فإن $x^2=\frac12$ فإن $x=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$ أو $x=-\frac{1}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{2}$

$y=\sqrt2 \mid y=-\sqrt2$

$(\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)$ و $(-\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)$

(2) $\lambda=-\frac14$ فإن $y=-2x$ وبالتالي $4x^2+(-2x)^2-4=0$

فإن $x=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$ أو $x=-\frac{1}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{2}$

$y=-\sqrt2 \mid y=\sqrt2$

$(\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)$ و $(-\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)$

بالتالي نحصل على الجدول التالي

(x,y)	$(0,0)$	$(\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)$	$(-\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)$	$(\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)$	$(-\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)$
$f(x,y)$	0	1	1	-1	-1

نستنتج: $f(\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)=f(-\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)=1$ قيمة العظمى المطلقة

بالقيد $g(x,y)=0$ للدالة f عند النقطة $(\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)$

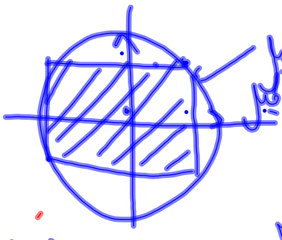
وعند النقطة $(-\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)$

$f(\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)=f(-\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)=-1$ هي الصغرى المطلقة

مثال 14 ص 131

اوجد أبعاد المستطيل الذي يمكن رسمه داخل دائرة مركزها (0,0) و نصف قطرها 1 بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل



$2x$ طول المستطيل

$2y$ عرض المستطيل

ليكن $M \in C$

$M(x, y)$

إذن $x^2+y^2=1$ إذن: $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$

$S=f(x,y)=2x\cdot 2y=4xy$

حسب مبرهنة Lagrange:

$$\begin{cases} 4y=\lambda 2x \\ 4x=\lambda 2y \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\lambda}{2}x \\ x=\frac{\lambda^2}{4}x \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\lambda}{2}x \\ x\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ أو } \lambda=2 \text{ أو } \lambda=-2 \\ y=\frac{\lambda}{2}x \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\overline{x=0}$ إذن $y=0$ و بالتالي $x^2+y^2-1\neq 0$

$\Leftarrow$ $\underline{\lambda=2}$ إذن $y=x$ و $2x^2-1=0$

إذن $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftarrow$ $\underline{\lambda=-2}$ إذن $y=-x$ و بالتالي $2x^2=1$

إذن $x=-y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x=-y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(x,y)	$(0,0)$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$
$f(x,y)=4xy$	0	2	2	-2	-2

بما أن $2x$ و $2y$ هي طول وعرض المستطيل

إذن $x>0$ و $y>0$

و بالتالي أكبر مساحة للمستطيل على الدائرة مركزها (0,0) و نصف قطرها 1 هي 2

حيث طول المستطيل هو $2x=\sqrt{2}$

هو عرض المستطيل $2y=\sqrt{2}$

(مربع).