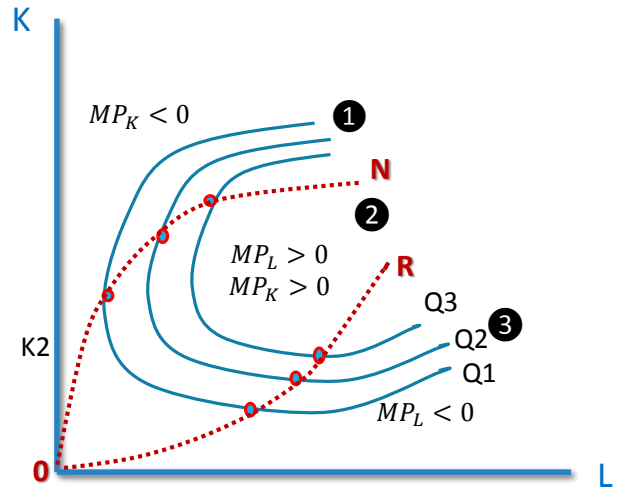
الانتاج في الاجل الطويل (12)

منطقة الانتاج ذات الكفاءة الاقتصادية

منطقة الانتاج ذات الكفاءة هي المنطقة المحصورة بين الخطوط الفاصلة (OR) و(ON) وهذه الخطوط قد تاخذ شكل منحنى او خطوط مستقيمة



المنطقة ذات الكفاءة الاقتصادية هي المرحلة الثانية حيث منحنى الناتج المتساوي سالب الميل وعندها الانتاجية الحدية لعنصري الانتاج موجبة اي ان $MP_L > 0$ و $MP_K > 0$

دوال الانتاج المتجانسة

تكون الدالة متجانسة من الدرجة (r) اذا كانت الزيادات المتناسبة في جميع عناصر الانتاج بمقدار (λ) ستؤدي الى زيادة في الانتاج بمقدار (λ^r)

مثال دالة الانتاج $Q = f(L,K)$

اذا زادت جميع عناصر الانتاج بمقدار (ʎ) سيكون الاثر على الانتاج

$$f(\lambda L, \lambda K) = \lambda^r f(L,K) = \lambda^r Q$$

اذا كانت **r =1** فان الزيادة في لانتاج تساوي الزيادة في عناصر الانتاج اي هناك حالة ثبات الغلة

اذا كانت **r >1** فان الزيادة في لانتاج اكبرمن الزيادة في عناصر الانتاج اي هناك حالة تزايد الغلة

اذا كانت **r <1** فان الزيادة في لانتاج اقل من الزيادة في عناصر الانتاج اي هناك حالة تناقص الغلة

مثال لو قمنا بمضاعفة عناصر الانتاج (λ=2)

$$f(2L, 2K) = 2^r f(L,K) = 2^r Q$$

اذا كانت r =1 فان مضاعفة عناصر الانتاج ضاعفت الانتاج بنفس المقدار (الضعف) حالة ثبات الغلة

اذا كانت r >1 مثلا r=3 فان مضاعفة عناصر الانتاج زادت الانتاج باكثر من الضعف 2^3 =8 حالة تزايد الغلة

اذا كانت r <1 مثلا $r=\frac{1}{2}$ فان مضاعفة عناصرالانتاج زادت الانتاج باقل من الضعف $2^{\frac{1}{2}}$ =1.4 حالة تناقص الغلة

تمرين1

اذا اعطيتي دالة الانتاج التالية

$$Q = 24L^2 + 4L - L^3$$

---

1. هل دالة الانتاج هذه دالة انتاج في الاجل القصير ام الطويل ولماذا؟
2. اوجدي الانتاجية الحدية لعنصر العمل مع كتابة القانون؟
3. اوجدي الانتاجية الحدية لراس المال مع كتابة القانون ؟
4. هل تخضع الانتاجية الحدية لعنصر العمل لقانون تناقص الغلة ولماذا ؟
5. اوجدي الانتاج المتوسط لعنصر العمل ، والانتاج المتوسط لراس المال مع كتابة القانون؟
6. اوجدي عدد العمال الذي تصل عنده الانتاجية الحدية لاقصى قيمه لها (نفس اجابة اذا طلب عدد العمال عند بدء قانون تناقص الغلة او عدد العمال عند نقطة الانقلاب)
7. اوجدي عدد العمال عند مرحلة ثبات الغلة (نفس اجابة السؤال اوجدي عدد العمال عندما يصل الانتاج المتوسط لاقصى قيمة او عندما يتساوى الانتاج الحدي للعمل مع الانتاج المتوسط للعمل او عندما يصل عنصر العمل لأقصى كفاءة)
8. اوجدي عدد العمال عندما يصل الانتاج الحدي للصفر (اوجدي عدد العمال عندما يصل الانتاج الكلي لأقصى قيمة او عدد العمال عندما تصل كفاءة راس المال لاقصى قيمة , عند نهاية المرحلة الاقتصادية
9. مرحلة تزايد الغلة تكون عندما عدد العمال أقل من ؟ حددي في ضوء النتائج التي توصلتي لها مع توضيح مراحل الانتاج على الرسم

تمرين2

إذا أعطيتي دالة الإنتاج التالية :

$$Q = L^{1/2} K^{1/2}$$

ودالة التكاليف التالية

$$1500 = 3L + 6K$$

أ ـ ما هي درجة تجانس دالة الانتاج وفي أي مرحلة من مراحل الإنتاج ؟

ب ـ ماهو سعر عنصر العمل وسعر راس المال

ج ـ أوجدي الإنتاجية الحدية لعنصر العمل ، والانتاجية الحدية لراس المال

د ـ هل تخضع الإنتاجية الحدية لعنصر العمل لقانون تناقص الغلة ؟ ولماذا؟

ه ـ أوجدي الإنتاج المتوسط لعنصر العمل،والانتاج المتوسط لعنصر رأس المال

و ـ أوجدي معدل الإحلال الحدي الفني لعنصري الإنتاج($MRTS_{KL}$) وتحققي هل هو متزايد أم متناقص بالنسبة لعنصر العمل ولماذا؟ .

ز ـ أوجدي الكميات من عنصري الإنتاج التي تحقق لهذا المنتج اقصى إنتاج ؟

حل تمرين 2

❖**درجة تجانس دالة الإنتاج وفي أي مرحلة من مراحل الإنتاج**

$$f(\lambda L, \lambda K) = (\lambda L)^{\frac{1}{2}}(\lambda K)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lambda^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = \lambda L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$\lambda^1 \leftarrow 1$ واحد صحيح ∴ متجانسة من الدرجة الأولى مرحلة ثبات الغلة

❖سعر عنصر العمل وسعر عنصر راس المال :

سعر عنصر العمل(w)= 3 ، سعر عنصر راس المال(r) =6

❖**الإنتاجية الحدية لعنصر العمل (MP_L) وهل تخضع لقانون تناقص الغلة**

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$$

(دائما $Mp_L > 0$ في الجزء الذي يحقق كفاءة انتاجية)

$$\frac{\partial MP_L}{\partial L} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\frac{1}{4} L^{\frac{-3}{2}} K^{\frac{1}{2}} < 0$$

∴ $0 > \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ (سالبة) ∴ Q لها خاصية تناقص الغلة

ويمكن إثبات الشيء نفسه بالنسبة للعنصر K

تابع حل تمرين 2

❖ الإنتاجية الحدية لعنصر راس المال (K)وهل تخضع لقانون تناقص الغلة ؟

$$MP_k = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{2} L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$$

(دائما $Mp_K > 0$ في الجزء الذي يحقق كفاءة انتاجية)

$$\frac{\partial MP_K}{\partial K} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\frac{1}{4} L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{-3}{2}} < 0$$

$$\therefore \quad 0 > \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} \quad \therefore \quad Q \text{ (سالبة) لها خاصية تناقص الغلة}$$

❖ الإنتاج المتوسط لعنصر العمل (AP_L)

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{L^{1/2} K^{1/2}}{L} = L^{\frac{-1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

❖ الإنتاج المتوسط لعنصر راس المال (AP_k)

$$AP_k = \frac{Q}{K} = \frac{L^{1/2} K^{1/2}}{K} = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{-1}{2}}$$

❖ معدل الإحلال الحدي الفني للعمل محل راس المال$(MRTS_{KL})$

$$MRTS_{KL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{-1}{2}}}$$

$$MRTS_{KL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K}{L}$$

تابع حل تمرين 2

❖ تحققي هل $(MRTS_{KL})$ متزايد أم متناقص بالنسبة لعنصر العمل ولماذا؟

$$\frac{\partial MRTS_{KL}}{\partial L} = \frac{L(0)-K(1)}{L^2} = \frac{-K}{L^2} < 0$$

متناقص لان مشتقة $(MRTS_{KL})$ بالنسبة للعمل اقل من الصفر

❖ الكميات من عنصري الإنتاج التي تحقق لهذا المنتج اقصى إنتاج ؟

الشرط الاول

$$MRTS_{KL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{3}{6} \longrightarrow K=\frac{3}{6} L \quad OR \quad L = 2K$$

الشرط الثاني

1500=3L+6K

1500=3(2K)+6K

1500=12K ⟶ $K^*=125$

L=2(125) ⟶ $L^*=250$

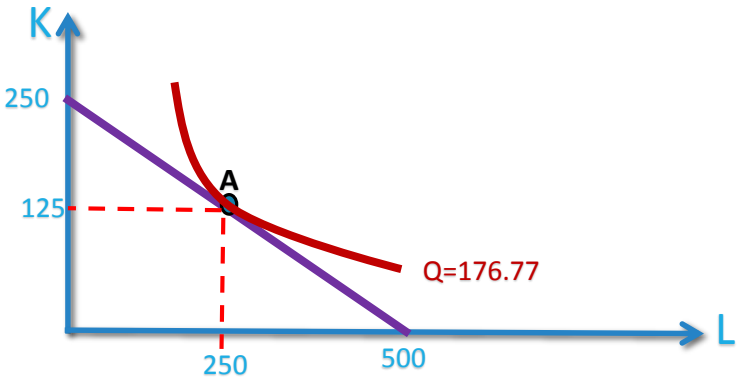
وبما ان $L = 2K$ اذن

$Q^* = 250^{\frac{1}{2}} * 125^{\frac{1}{2}} = 176.770$

$K^*=125$, $L^*=250$, $Q^*=176.77$

تابع تمرين 2

❖ **وضحي على الرسم التوازن**



اذا طلب ماهو الشرط الكافي وهل تحقق الشرط الكافي هو ان المحدد الهيشيني اكبر من الصفر

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & -w \\ L_{21} & L_{22} & -r \\ -w & -r & 0 \end{vmatrix} > 0$$

تمرين 3

إذا أعطيتي دالة الإنتاج التالية :

$$Q = L^{\propto} K^{\beta}$$

ودالة التكاليف التالية

$$TC = wL + rK$$

حيث $0 < \beta < 1$ ، $0 < \propto < 1$ ، $\propto + \beta = 1$

أ ـ ما نوع هذه الدالة ؟ وما هي درجة تجانس دالة الانتاج؟ وفي أي مرحلة من مراحل الإنتاج؟

ب ـ ماهو سعر عنصر العمل وسعر راس المال ؟

ج ـ أوجدي الإنتاجية الحدية لعنصر العمل ، والانتاجية الحدية لراس المال

د ـ هل تخضع الإنتاجية الحدية لعنصر العمل لقانون تناقص الغلة ؟ ولماذا؟

ه ـ أوجدي الإنتاج المتوسط لعنصر العمل،والانتاج المتوسط لعنصر رأس المال

و ـ أوجدي معدل الإحلال الحدي الفني لعنصري الإنتاج($MRTS_{KL}$) وتحققي هل هو متزايد أم متناقص بالنسبةلعنصر العمل ولماذا؟ .

ز ـ أوجدي الكميات من عنصري الإنتاج التي تحقق لهذا المنتج اقصى إنتاج اذا علمتي ان اجر العامل 2 وسعر راس المال 3 واجمالي التكاليف 60 ؟

تمرين 4

إذا أعطيتي دالة الإنتاج التالية :

$$Q = L\ K$$

ودالة التكاليف التالية

$$300 = 15L + 2K$$

أ ـ ما نوع هذه الدالة ؟ وما هي درجة تجانس دالة الانتاج؟ وفي أي مرحلة من مراحل الإنتاج؟

ب ـ ماهو سعر عنصر العمل وسعر راس المال ؟

ج ـ أوجدي الكميات من عنصري الإنتاج التي تحقق لهذا المنتج اقصى إنتاج باستخدام دالة لانجرانج مع التوضيح بالرسم

د ـ ماهو الشرط الكافي ؟وهل تحقق؟