المتسلسلات

المتتابعات أو المتتاليات

التعريف: المتتابعة هي تطبيق من $\mathbb{N}_0$ (أو جزء من $\mathbb{N}_0$) إلى $\mathbb{R}$.

حيث $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

مثال

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto \frac{1}{n}$$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto \frac{n}{n^2+1}$$

الرمز: $f(n) = f_n$

مثال: $u_n = (-1)^n$, $v_n = 1 + (-1)^n$, $w_n = 1 + \sin n$

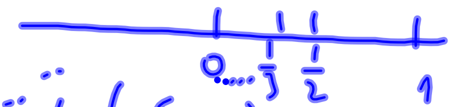
المتتالية المتقاربة

التعريف: ليكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية، $L \in \mathbb{R}$

← نقول أن $\{u_n\}$ متقاربة للقيمة L إذا كان كل فترة $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ، $\varepsilon>0$ ، تحتوي على كل الحدود u_n باستثناء عدد منته من الحدود ويرمز: $\lim_{n\to\infty} u_n = L$ أو $u_n \to L$

← إذا لم تكن المتتالية متقاربة فهي متباعدة

مثال: $u_n = \frac{1}{n}$



كل $\varepsilon>0$ الفترة $(-\varepsilon,\varepsilon)$ تحتوي على كل الحدود u_n ماعدا عدد منته من الحدود.

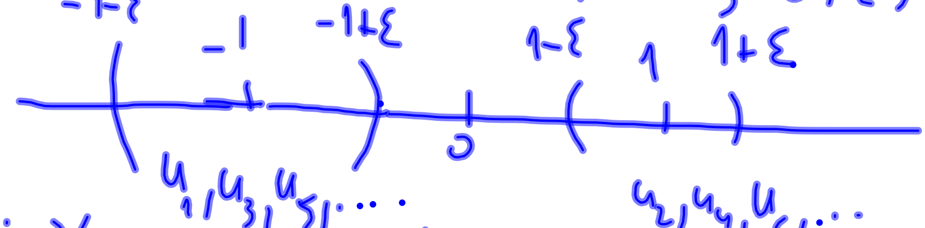
مثال: $u_n=(-1)^n$ ، لكل $n\in\mathbb{N}$

الحل: لدينا: $u_{2p}=(-1)^{2p}=1$ ، $u_{2p+1}=(-1)^{2p+1}=-1$

في الفترة $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ يوجد عدد لا منته من الحدود للمتتالية $\{u_n\}$ $(u_2,u_4,u_6,\dots)$

و خارج الفترة عدد لا منته من الحدود ،

$\varepsilon>0$



و في الفترة $(-1-\varepsilon,-1+\varepsilon)$ يوجد عدد لا منته من الحدود من المتتالية $\{u_n\}$: $(u_1,u_3,u_5,\dots)$

و يوجد عدد لا منته من الحدود خارج الفترة.

و بالتالي المتتالية $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ هي ليست متقاربة فهي متباعدة.

مبرهنة: ليكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة ، $L \in \mathbb{R}$

حيث $f(n) = u_n$ ، f دالة على جزء من $\mathbb{R}$

فإن

(١) إذا كان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ فإن $\{u_n\}$ متتابعة متقاربة إلى L

(٢) إذا كان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ فإن $\{u_n\}$ متتابعة متباعدة و $\lim_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$

مثال 3 ص 245

اثبت أن $\lim n^2 = +\infty$,

الحل: ليكن $f(x) = x^2$ فإن $f(n) = n^2$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

فإن $\lim n^2 = +\infty$

مثال 4 ص 245 , ص 246

حدد ما إذا كانت المتتابعة $\left\{n \sin\frac{\pi}{n}\right\}$ متقاربة أم متباعدة.

الحل: ليكن $f(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$ فإن $u_n = f(n) = n\sin\frac{\pi}{n}$

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\,\underbrace{\sin\frac{\pi}{x}}_{0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \pi \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}$$

$$= \pi \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}}_{1} = \pi$$

فإن المتتابعة $\left\{n \sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متقاربة إلى π.

مثال 5 ص 256

اثبت أن $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

الحل: ليكن $x>0$, $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = ?$$

تذكير: $\ln(x^b) = b\ln x$

لدينا $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, $\frac{1}{x} \to 0$

$$= 1$$

تذكير: $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$

إذن $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

مثال 6 ص 246

احسب

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

الحل : لتكن

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

نذكير :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= 0$$

إذن

$$\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

تذكير:

الغير معرف في النهايات

(١) $0 \cdot \infty$ (٢) $\frac{0}{0}$ (٣) $\frac{\infty}{\infty}$

(٤) $\infty - \infty$

(٥) 1^{∞} (٦) 0^{0} (٧) ∞^{0}

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = -\infty \,,\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \infty \,,\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \,,\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \,,\quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

مثال 7 ص 247

حدد ما إذا كانت المتتابعة: $\left(\frac{5n}{e^{2n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ متقاربة أو متباعدة.

الحل: ليكن $f(x) = \frac{5x}{e^{2x}}$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2\,\frac{e^{2x}}{2x}}$$

$$= \frac{5}{2} \lim \frac{1}{\underbrace{\frac{e^{2x}}{2x}}_{\to\infty}} = 0$$

بأن المتتابعة $\left\{\frac{5n}{e^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متقاربة

حيث $\lim \frac{5n}{e^{2n}} = 0$

مبرهنة : ليكن $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$

$$\lim_{n \to +\infty} r^n = \begin{cases} 0 & ; |r|<1 \ (-1<r<1) \\ 1 & , \quad r=1 \\ +\infty & , \quad r>1 \\ \text{غير موجودة} & \quad r \leq -1 \end{cases}$$

مثال : $\lim (1,05)^n = +\infty$, $r = 1,05 > 1$

$-1 < r = 0,98 < 1$, $\lim (0,98)^n = 0$

$-1 < r = -0,98 < 1$, $\lim (-0,98)^n = 0$

$r = -1,05 < -1$, $\lim (-1,05)^n$ غير موجودة

مثال : جد $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+1}{3^n+5}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+1}{3^n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{5}{3^n}\right)}$$

$$= \lim \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} \underbrace{\left(\frac{1+\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}^{\to 0}}{1+5\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\to 0}}\right)}_{\to 1}$$

لدينا :

$\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (لأن ; $-1 < r = \frac{2}{3} < 1$)

$\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$

$\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ $\left(-1 < \frac{1}{3} < 1\right)$

اذن $\lim \dfrac{2^n+1}{3^n+5} = 0$

مبرهنة: لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ كل منهما متتابعة

إذا كان $\lim a_n = 0$, $\alpha \leq b_n \leq \beta$

حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

فإن: $\lim a_n b_n = 0$

مثال جد $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n}$

لدينا: $-1 \leq \sin n \leq 1$, $\lim \frac{1}{n} = 0$

فإن: $\lim \frac{\sin n}{n} = \lim \frac{1}{n} \sin n = 0$

مبرهنة لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$
متتابعات حيث

$a_n \leq u_n \leq b_n$ لكل $n \geq n_0$

$n_0 \in \mathbb{N}$

إذا كان $\lim a_n = \lim b_n = L$

فإن $\lim u_n = L$

مثال جد $\lim \frac{2^n - 1}{3^n + 5}$

لدينا: $0 \leq 2^n - 1 \leq 2^n$

و $3^n \leq 3^n + 5 \leq 3^n + 5$

فإن $0 \leq 2^n - 1 \leq 2^n$

$$\frac{1}{3^n+5} \leq \frac{1}{3^n+5} \leq \frac{1}{3^n}$$

فإن $0 \leq \frac{2^n - 1}{3^n + 5} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ولدينا: $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

فإن $\lim \frac{2^n - 1}{3^n + 5} = 0$

تعريف : ليكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية :

(١) المتتابعة $\{u_n\}$ محدودة من الأعلى إذا كان يوجد $M \in \mathbb{R}$ حيث $u_n \leq M$ لكل n

(٢) المتتابعة $\{u_n\}$ محدودة من الاسفل إذا كان يوجد $m \in \mathbb{R}$ حيث $u_n \geq m$ لكل n

(٣) المتتابعة $\{u_n\}$ محدودة إذا كان $\{u_n\}$ محدودة من الاسفل ومحدودة من الاعلى إذا وفقط إذا كان يوجد M حيث $|u_n| \leq M$ لكل n

(٤) المتتابعة $\{u_n\}$ متزايدة إذا كان $u_n \leq u_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(٥) المتتابعة $\{u_n\}$ متناقصة إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(٦) المتتابعة $\{u_n\}$ مطردة إذا كان $\{u_n\}$ متزايدة أو $\{u_n\}$ متناقصة .

ملاحظة :

(١) إذا كان المتتابعة $\{u_n\}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

(٢) إذا كان المتتابعة $\{u_n\}$ متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة .

(٣) كل متتابعة مطردة ومحدودة فهي متقاربة .

مثال 12 ص 261

ليكن $a_1 = \frac{3}{4}$ ، $a_n = \frac{4n^2-1}{4n^2} a_{n-1}$ لكل $n \geq 2$

فاثبت أن المتتابعة $\{a_n\}$ متقاربة.

الحل: ليكن $n \geq 2$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{4n^2-1}{4n^2} a_{n-1} - a_{n-1}$$

$$= \left(\frac{4n^2-1}{4n^2} - 1\right) a_{n-1} = \frac{-1}{4n^2} a_{n-1}$$

نبرهن أن $a_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$

بالاستقراء: $a_1 = \frac{3}{4} > 0$. نفرض أن $a_{k-1} \geq 0$

ونبرهن أن $a_k \geq 0$ حيث $k \geq 2$

لدينا $a_k = \frac{4k^2-1}{4k^2} a_{k-1}$ ، $a_{k-1} \geq 0$

إذن $a_k = \frac{4k^2-1}{4k^2} a_{k-1} \geq 0$

وبالتالي $a_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$

ومنه نبين أن $a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{4n^2} a_{n-1} \leq 0$

فإنه: $a_n \leq a_{n-1}$

إذن $\{a_n\}$ متناقصة.

$\leftarrow$ لدينا، $a_n \geq 0$ لكل $n \geq 1$

إذن $\{a_n\}$ محددة من الأسفل (بالعدد 0)

وبالتالي $\{a_n\}$ متقاربة لأنها محددة من الأسفل، متناقصة.

مثال 13 ص 262 , 263

ليكن $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... , $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

(أ) أثبت أن $\{a_n\}$ متتابعة محدودة، متزايدة

(ب) أثبت أن $\{a_n\}$ تتقارب من عدد $r>0$.

(ج) أثبت أن $r=2$ (باستخدام أ، ب)

الحل

أ) ← $0\le a_n\le 2$: لأن: $0\le a_1=\sqrt{2}\le 2$, ليكن $k\in\mathbb{N}$

ونفرض $0\le a_k\le 2$ ونبرهن أن $0\le a_{k+1}\le 2$

بما أن $0\le a_k\le 2$ فإن $0\le 2\le 2+a_k\le 4$

فإن $0\le a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}\le\sqrt{4}=2$

فإن $0\le a_n\le 2$ لكل $n\in\mathbb{N}$

وبالتالي $\{a_n\}$ محدودة.

← $\{a_n\}$ متزايدة : لأن: $a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n$

$$=\frac{(\sqrt{2+a_n}-a_n)(\sqrt{2+a_n}+a_n)}{(\sqrt{2+a_n}+a_n)}=\frac{2+a_n-a_n^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n}$$

$$=\frac{-(a_n^2-a_n-2)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}=\frac{-(a_n-2)(a_n+1)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}$$

ولدينا $a_n+1\ge 0$, $-(a_n-2)\ge 0$

و $\sqrt{2+a_n}+a_n>0$ وبالتالي $a_{n+1}-a_n\ge 0$

فإن $a_{n+1}\ge a_n$ فإن $\{a_n\}$ متزايدة

وبما أن $\{a_n\}$ محدودة

(ب) بما أن $\{a_n\}$ متزايدة، محدودة

فإنها متقاربة للعدد r , $r\in\mathbb{R}$

وبما أن $0\le a_n\le 2$

فإن $0\le\lim a_n\le 2$

فإن $0\le r\le 2$

(ج) بما أن $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

فإن $\lim a_{n+1}=\lim\sqrt{2+a_n}$

فإن $r=\sqrt{2+r}$ فإن $r^2=2+r$

فإن $r^2-r-2=0$ فإن $(r-2)(r+1)=0$

أي $r=-1$ أو $r=2$

بما أن $r\ge 0$ فإن $\boxed{r=2}$