المراجعة

س4: (الفصل الثاني 35/36)

(أ) R علاقة على $A = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

$$aRb \iff a^2 = b$$

(i) $R = \{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$

(ii) مجال العلاقة R: $D_R = \{-2,-1,0,1,2\}$

مدى العلاقة R: $Im(R) = \{4,1,0\}$

$$M_R = \begin{array}{c|ccccccc} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(ب) لكن $S=\{(1,1),(1,2),(3,1),(3,3)\}$ خ.. على $B=\{1,2,3\}$

(i) $S^{-1}=\{(1,1),(2,1),(1,3),(3,3)\}$

(ii) $S\cap S^{-1}=\{(1,1),(3,3)\}$

$\left(S\cup S^{-1}=\{(1,1),(1,2),(3,1),(3,3),(2,1),(1,3)\}\right)$

(iii) $S-S^{-1}=\{(1,2),(3,1)\}$

(iv) $S\circ S^{-1}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(3,1),(3,3)\}$

$\left(S^{-1}\circ S=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}\right.$

$$S\circ S^{-1}\neq S^{-1}\circ S \;)$$

ملاحظة :

$$\boxed{(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}}$$

$$(S\circ S^{-1})^{-1}=(S^{-1})^{-1}\circ S^{-1}=S\circ S^{-1}$$

$$(S^{-1}\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ(S^{-1})^{-1}=S^{-1}\circ S$$

الفصل الاول ٣٥/٣٦

س 2 (أ) لتكن k, m, n أعداد طبيعية

حيث $k+m+n=10$

أثبت بالبرهان بالتناقض أن k أو m أو n أكبر من 3

الحل: نفرض أن $k \leq 3$ و $m \leq 3$, $n \leq 3$

بجمع العبارات فإن $k+m+n \leq 3+3+3=9$

وبالتالي $k+m+n \neq 10$ ونعلم أن $k+m+n=10$

وهذا تناقض

وبالتالي فإن أحد k, m, n على الأقل أكبر من 3.

العرض الثاني 35/36

س3 (أ) أثبت

لكل $n \geq 4$ ، $1 \times 2 \times \cdots \times n > 2^n$

$(n! > 2^n)$

(ب) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ معرفة استقرائياً:

$a_1=-1$, $a_2=-\frac{1}{2}$, $a_3=-\sqrt{10}$, $a_n=a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-3}$ لكل $n\geq 4$

أثبت أن $a_n<0$ لكل $n\geq 1$

الحل: الخطوة الأساسية:

$a_1=-1<0$, $a_2=-\frac{1}{2}<0$, $a_3=-\sqrt{10}<0$ (صائب)

خطوة الاستقراء: ليكن $k\geq 3$

نفرض أن: $a_1<0, a_2<0, \dots, a_{k-1}<0, a_k<0$ ونبرهن $a_{k+1}<0$

لدينا حسب التعريف الاستقرائي: $a_{k+1}=a_k\cdot a_{k-1}\cdot a_{k-2}$

وحسب فرضية الاستقراء $a_k<0$, $a_{k-1}<0$, $a_{k-2}<0$

فإن $a_{k+1}<0$ (جداء 3 أعداد سالبة).

النتيجة: لكل $n\geq 1$, $a_n<0$

الفصل الأول 35/36

س 3 (ب): لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية أعداد صحيحة:

معرفة استقرائيا: $\forall n\geq 2,\ a_n=\frac{a_{n-1}\cdot a_{n-2}}{3}+6,\ a_0=9,\ a_1=15$

أثبت أن $3|a_n$ لكل $n\geq 0$.

الحل: الخطوة الاساسية:

$a_0=9=3\cdot 3$ فإن $3|a_0$ و $a_1=15=3\cdot 5$ فإن $3|a_1$

خطوة الاستقراء: ليكن $k\geq 1$

نفرض أن $3|a_2, 3|a_3, \ldots, 3|a_{k-1}, 3|a_k$ ونبرهن أن $3|a_{k+1}$

لدينا حسب التعريف الاستقرائي: $a_{k+1}=\frac{a_k\cdot a_{k-1}}{3}+6$

حسب فرضية الاستقراء فان: $3|a_k$ و $3|a_{k-1}$

فإنه يوجد $m,q\in\mathbb{Z}$ حيث $a_k=3\cdot m$ و $a_{k-1}=3\cdot q$

فإن

$$a_{k+1}=\frac{a_k\cdot a_{k-1}}{3}+6=\frac{3m\cdot 3q}{3}+6$$

$$=3mq+6=3(\underbrace{mq+2}_{\in\mathbb{Z}})$$

وبالتالي $3|a_{k+1}$

النتيجة: لكل $n\geq 0$، $3|a_n$