الفصل الثاني 35/36

$$\lim_{(0,0)} \frac{2xy+x^4}{x^2+y^2} = ?$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{2xy+x^4}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{2xy+x^4}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+x^4}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(2+x^2)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2+x^2}{2} = 1$$

إذا $\lim\limits_{(0,0)} \frac{2xy+x^4}{x^2+y^2}$ غير موجودة.

س2:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(1) نطاق الدالة f : $D_f=\mathbb{R}^2$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\sin^3\theta}{r^2(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1})}=\lim_{r\to 0} r\sin^3\theta=0$$

لأن $-1\leq\sin^3\theta\leq 1$, $\lim\limits_{r\to 0} r=0$

(3) $\dfrac{y^3}{x^2+y^2} \longmapsto (x,y)$ ، الدالة كسرية متصلة عند كل نقطة من نطاقها $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

وبالتالي f متصلة عند كل نقطة $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

عند النقطة $(0,0)$ لدينا: $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

فإن f متصلة عند النقطة $(0,0)$

وبالتالي f متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ (مجالها).

(4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

اذن $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y^3}{y^2}-0}{y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

اذن $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1}$

(5) عند النقطة $(0,0) \neq (x,y)$

$$f_x(x,y) = \frac{-y^3\,2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - y^3\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(3x^2+3y^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases} \quad ; \quad f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(6)

$$\lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

إذن $f_{xy}(0,0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-1}{x} = \pm\infty$$

إذن $f_{yx}(0,0)$ غير موجود