الاختبار الفصل الاول 37/36

س 1

$$[(p\to q)\vee(q\to r)]\to(p\to\neg r)$$

$$\equiv[(\neg p\vee q)\vee(\neg q\vee r)]\to(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv\neg[(\neg p\vee q)\vee(\neg q\vee r)]\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv(\neg(\neg p\vee q)\wedge\neg(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv[(p\wedge\neg q)\wedge(q\wedge\neg r)]\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv[p\wedge(\neg q\wedge q)\wedge\neg r]\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv(p\wedge F\wedge\neg r)\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv F\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv\neg p\vee\neg r\equiv\neg(p\wedge r)$$

وبالتالي العبارة ليست تناقض.

(ب)

$$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv (\neg q \vee \neg r) \to \neg p$$

لدينا :

$$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$$

$$\equiv \big((\neg p \vee q) \wedge \neg p\big) \vee \big((\neg p \vee q) \wedge r\big)$$

$$\equiv \big[(\neg p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)\big] \vee \big[(\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)\big]$$

$$\equiv \big[\neg p \vee (q \wedge \neg p)\big] \vee \big[(\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)\big]$$

$$\equiv \neg p \vee \big[(\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)\big]$$

$$\equiv \big(\neg p \vee (\neg p \wedge r)\big) \vee (q \wedge r)$$

$$\equiv \neg p \vee (q \wedge r)$$

$$\equiv \neg (q \wedge r) \to \neg p$$

$$\equiv (\neg q \vee \neg r) \to \neg p$$

س2 : المكافئ العكسي للعبارة

"إذا كان $a+b-c$ زوجياً فإن a زوجي أو b زوجي أو c زوجي."

هي العبارة :

"إذا كان a فردي و b فردي و c فردي فإن $a+b-c$ فردي"

لنبرهن : a فردي و b فردي و c فردي

فإنه يوجد $p,q,r \in \mathbb{Z}$ حيث

$a=2p+1$, $b=2q+1$, $c=2r+1$

فإن

$$a+b-c=(2p+1)+(2q+1)-(2r+1)$$
$$=2p+2q-2r+1=2\underbrace{(p+q-r)}_{\in \mathbb{Z}}+1$$

فإن $a+b-c$ عدد فردي.

س2
ب.

$m, n \in \mathbb{Q}$ ، $n \neq 0$

ونعلم أن $\sqrt{5}$ عدد غير كسري.

استخدم البرهان بالتناقض لإثبات أن

$\frac{\sqrt{5}}{n} - m$ عدد غير كسري.

الحل:

نفرض أن $\frac{\sqrt{5}}{n} - m$ عدد كسري

وبما أن m عدد كسري فإن $\left(\frac{\sqrt{5}}{n} - m\right) + m$

فإن $\frac{\sqrt{5}}{n}$ عدد كسري

وبما أن n عدد كسري فإن $\frac{\sqrt{5}}{n} \cdot n = \sqrt{5}$ عدد كسري.

ونعلم أن $\sqrt{5}$ عدد غير كسري. وهذا تناقض

وبالتالي $\frac{\sqrt{5}}{n} - m$ عدد غير كسري.

س 3 (أ): $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3 لكل $n \geq 0$.

الخطوة الاساسية: $n=0$: $4^0 - 1 = 0$ يقبل القسمة على 3

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 0$، نفرض أن $4^k - 1$ يقبل القسمة على 3 ونبرهن أن: $4^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 3.

لدينا: $4^k - 1$ يقبل القسمة على 3 (فرضية الاستقراء)

فإنه يوجد $a \in \mathbb{Z}$ حيث $4^k - 1 = 3 \cdot a$

إذن $4^k = 3a + 1$ فإذن $4^{k+1} = 12a + 4$

إذن $4^{k+1} - 1 = 12a + 3$

إذن $4^{k+1} - 1 = 3(\underbrace{4a+1}_{\in \mathbb{Z}})$ يقبل القسمة على 3.

النتيجة: لكل $n \geq 0$، $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3.

س3 ب:

$$u_1 = \frac{3}{4},\ u_2 = \frac{8}{13},\ u_n = \frac{3u_{n-1}+2u_{n-2}}{5},\ \forall n \geq 3$$

فأثبت أن $u_n < 1$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$.

الحل:

الخطوة الأساسية: $u_1 = \frac{3}{4} < 1$ ، $u_2 = \frac{8}{13} < 1$

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 1$

ونفرض أن $u_1 < 1,\ u_2 < 1, \dots, u_{k-1} < 1,\ u_k < 1$

ونبرهن أن $u_{k+1} < 1$

لدينا: $u_{k+1} = \frac{3u_k + 2u_{k-1}}{5}$ (حسب التعريف الاستقرائي)

ولدينا $u_{k-1} < 1$ و $u_k < 1$

فإن: $2u_{k-1} < 2$ و $3u_k < 3$

إذن: $3u_k + 2u_{k-1} < 5$ ، بالتالي $\frac{3u_k+2u_{k-1}}{5} < 1$

إذن: $u_{k+1} < 1$

النتيجة: لكل $n \geq 1$ ، $u_n < 1$

<u>س4</u>

لتكن R علاقة من $A=\{1,2,3,4\}$ إلى $B=\{2,3,4,5\}$

$$aRb \iff a+b=5$$

(i) $R=\{(1,4),(2,3),(3,2)\}$

(ii) $Im(R)=\{4,3,2\}$ $\qquad D_R=\{1,2,3\}$

(iii)

$$M_R=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ب) لتكن $S = \{(x,y),(x,z),(y,x),(z,y)\}$ علاقة على $C = \{x,y,z\}$

(i) $S^{-1} = \{(y,x),(z,x),(x,y),(y,z)\}$

$S - S^{-1} = \{(x,z),(z,y)\}$

(ii) $S^2 = S \circ S = \{(x,x),(x,y),(y,y),(y,z),(z,x)\}$

الرسم الموجه للعلاقة S