الفصل الأول
مقدمة في البرمجة الخطية

Introduction to linear programming

تعريف (**1**-**1**): الدالة الخطية: **Linear function**

نقول أن الدالة $z(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_N)$ في المتغيرات $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N$

إذا وفقط تحقق $z(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_N) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + c_Nx_N$

حيث $c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots, c_N$ ثوابت .

فمثلاً $z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ تكون دالة خطية في x_1, x_2

ولكن $z(x_1, x_2) = x_1^2x_2$ ليست دالة خطية في x_1, x_2 ولكنها دالة من الدرجة الثالثة.

تعريف (**2**-**1**): المتباينة الخطية (المتراجحة الخطية) **Linear inequality**

لتكن $z(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_N)$ دالة خطية، b عدد حقيقي فإن كل من

$$z(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_N) \le b$$

$$z(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_N) \ge b$$

تسمي متراجحة خطية

فمثلاُ $5x_1 + 4x_2 \le 3$ تسمي متراجحة خطية بينما $x_1^2x_2 \le 3$ ليست متراجحة خطية

تعريف (**3**-**1**): مسألة الرمجة الخطية **Lp problem**

مسألة البرمجة الخطية هي مسألة أمثلية optimization pb تتطلب الآتي:

1- محاولة إيجاد القيمة القصوى max أو الصغرى min للدالة الخطية $z(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_N)$ حيث $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N$ تسمي متغيرات القرار decision variables ، الدالة z تسمي بدالة الهدف objective function

2- لابد أن تحقق متغيرات القرار $x_1, x_2, ..., x_N$ مجموعة من القيود constraints بحيث أن كل قيد يكون دالة خطية أو متراجحة خطية

3- تحديد الاشارة sign restriction ، في معظم مسائل البرمجة الخطية التي سنتناولها تكون أشارة كل متغير من متغيرات القرار غير سالب (موجب أو صفر)

يمكن صياغة مسألة البرمجة الخطية باستخدام المصفوفات علي الصورة الآتية:

$$\begin{aligned} \text{max or min} \quad & z=\mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ & \mathbf{AX} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{HX} = \mathbf{r} \\ & \mathbf{X} \ge \mathbf{l} \\ & \mathbf{X} \le \mathbf{u} \end{aligned}$$

where $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & & a_{MN} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{L1} & h_{L2} & \dots & h_{LN} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_L \end{pmatrix}$$

$\mathbf{c}^T$ يرمز إلي منقول (مدور) المصفوفة $\mathbf{c}$

$\mathbf{u}, \mathbf{l}$ هما متجهي الحدود السفلي والعليا لمتغيرات القرار علي الترتيب

تعرف منطقة الحل feasible region Ω في مسألة البرمجة الخطية بأنها مجموعة النقاط التي تحقق جميع القيود، كما يعرف الحل الأمثل optimal solution لمسألة البرمجة الخطية في الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولي:

في حالة مسألة القيمة العظمي max بأنه أحد نقاط منطقة الحل بحيث تكون دالة الهدف عند هذه النقطة أكبر ما يمكن

الحالة الثانية:

في حالة مسألة القيمة الصغري min بأنه أحد نقاط منطقة الحل بحيث تكون دالة الهدف عند هذه النقطة أصغر ما يمكن

Solving LP problems graphically حل مسائل البرمجة الخطية بيانياً

سنهتم هنا بحل مسائل البرمجة الخطية التي علي الصورة الآتية:

$$\begin{aligned} \text{max or min} \quad & z=\mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ & \mathbf{AX} \le \mathbf{b} \text{ or } \mathbf{AX} \ge \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

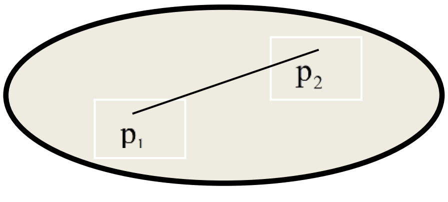
where $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & & a_{MN} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$, $\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

تعريف (**1-4**): المجموعة المحدبة **Convex set**

يقال أن مجموعة S أنها محدبة إذا كانت كل تركيبة خطية Linear combination لأي عنصريين من S يكون عنصراً في S، أي أذا كان:

$$\lambda x+(1-\lambda)y \in S \quad \forall\ x,y \in S\ ,\ \lambda \in [0,1]$$

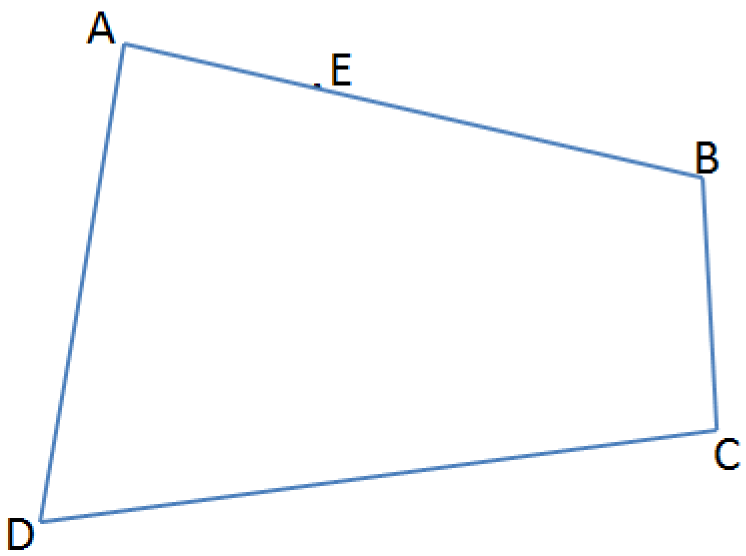
وهندسياً نقول أن المجموعة S محدبة إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين اختياريتين في S تقع أيضاً بأكملها (كليًا) في S ، كما هو موضح في شكل (1-1) التالي:



شكل (**1-1**)

تعريف (**1**-**5**): النقاط الحدية **Corner points or Extreme points**

لأي مجموعة محدبة S ، تكون النقطة $s \in S$ نقطة حدية إذا كانت s طرف لقطعة مستقيمة تقع بأكملها في S ، في الشكل التالي A, B, C, D تمثل نقاط حدية بينما E ليست نقطة حدية.



شكل (**1**-**2**)

تعريف (**1**-**6**): منطقة الحل الممكنه **feasible region** Ω

نعرف منطقة الحل Ω في مسألة البرمجة الخطية بأنها مجموعة النقاط التي تحقق جميع القيود.

تعريف (**1**-**7**): الحل الأمثل **Optimal solution**

هو أحد نقاط منطقة الحل بحيث تكون قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة أكبر ما يمكن وذلك في مسألة القيمة العظمي $\max$ أو أن قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة تكون أصغر ما يمكن وذلك في حالة مسألة القيمة الصغري $\min$.

نظرية (**1**-**1**)

منطقة الحل في أي مسألة برمجة خطية هي منطقة محدبة لها عدد منته من النقاط الحدية.

نظرية (**1**-**2**)

إذا كان لدينا مسألة برمجة خطية وكانت منطقة الحل محدودة فإن الحل الأمثل يكون موجوداً عند نقطة حدية، فإن لم تكن منطقة الحل محدودة فإن الحل أما أن يكون عند نقطة حدية أو أن المسألة ليس لها حل.

مثال (**1-1**)

أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 15 \\ & x_1 \ge 0 \ , \ \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

1. نرسم منطقة الحل Ω الموجودة في الربع الأول والمحدودة بالمستقيمات التالية:

$$2x_1 + 3x_2 = 12 \qquad (1)$$
$$5x_1 + 2x_2 = 15 \qquad (2)$$

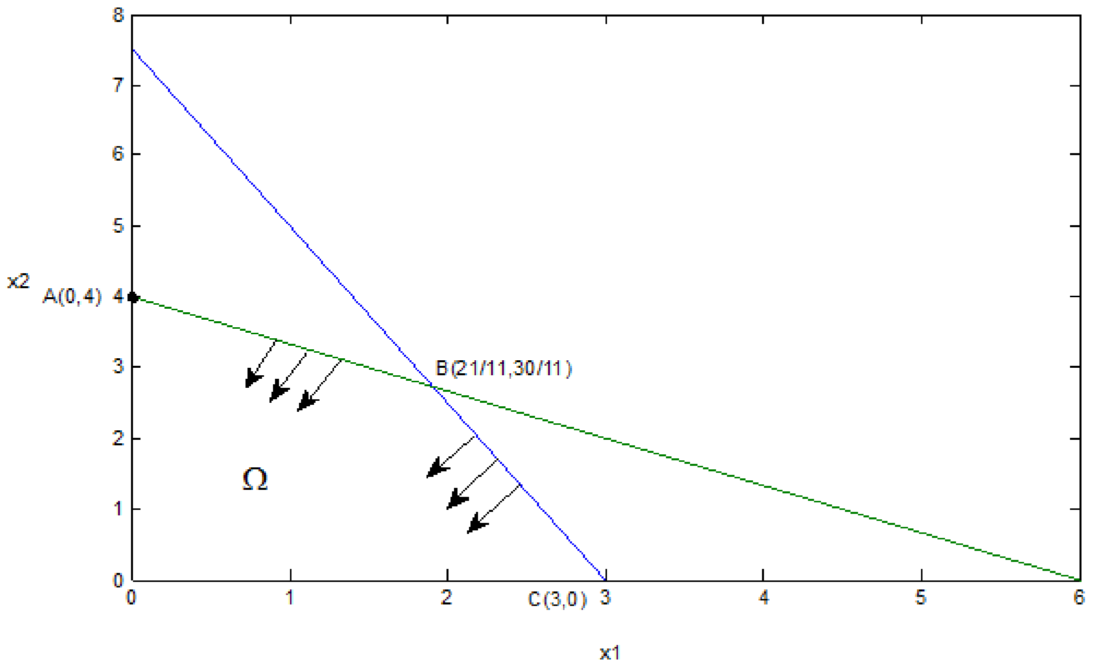
نلاحظ أن المستقيم الأول يمر بالنقطتين $(0,4),\ (6,0)$ والمستقيم الثاني يمر بالنقطتين $(0,7\frac{1}{2}),\ (3,0)$ ، لإيجاد نقطة تقاطعهما نحل المعادلتين $(1), (2)$ فتكون نقطة التقاطع هي $B(\frac{21}{11}, \frac{30}{11})$ ، كما هو مبين في الشكل (1-3) .

2. نحسب قيمة دالة الهدف $z = x_1 + x_2$ لكل نقطة من النقاط الحدية o,A,B,C فنجد أن:

$$z(0,0) = 0,\ z(0,4) = 4,\ z(\tfrac{21}{11}, \tfrac{30}{11}) = 4\tfrac{7}{11},\ z(3,0) = 3$$

واضح لدينا أن أقصى قيمة لدالة الهدف هي $z = 4\frac{7}{11}$ وذلك عند النقطة $B = (\frac{21}{11}, \frac{30}{11})$

$\therefore$ الحل الأمثل هو $x_1 = \frac{21}{11},\ x_2 = \frac{30}{11}$ حيث $z = 4\frac{7}{11}$.



شكل (3-1)

مثال (2-1)

تنتج شركة نوعين من الجوالات، نموذج A و نموذج B وأنه يتطلب 5 ساعات لإنتاج وحدة من النموذج A و وساعتين لإنتاج وحدة من النموذج B ، علما بأن عدد ساعات العمل 900 ساعة أسبوعياً وأن ثمن تكلفة الوحدة من النموذج A هو 8$ ، وثمن تكلفة الوحدة من النموذج B هو10$ وأن الاعتماد المالي المخصص للإنتاج في الاسبوع هو 2800$ ، والمكسب لكل وحدة من النموذج A هو 3$ والمكسب لكل وحدة من النموذج B هو 2$ ، كم عدد الجوالات من كل نموذج يلزم انتاجها أسبوعياً لتحقيق أقصي ربح ممكن؟

الحل:

نفرض أن x_1, x_2 هما عدد الجوالات من النوعين A, B علي الترتيب التي تنتجها الشركة أسبوعياً ، وبالتالي فإن قيد الزمن اللازم لانتاج نوعي الجوالات في الأسبوع هو

$$5x_1 + 2x_2 \le 900$$

قيد التكلفة في الأسبوع هو

$$8x_1 + 10x_2 \le 2800$$

قيد الاشارة هو

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

وتكون دالة الهدف (دالة الربح) هي $z=3x_1 +2x_2$

$\therefore$ يمكن تلخيص النموزج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية **LP** كالآتي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t} \quad & 5x_1 + 2x_2 \leq 900 \\ & 8x_1 + 10x_2 \leq 2800 \\ & x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

لحل المسألة نتبع الآتي:

1. نرسم منطقة الحل Ω الموجودة في الربع الأول والمحدودة بالمستقيمات التالية:

$$5x_1 + 2x_2 = 900 \qquad (1)$$

$$8x_1 + 10x_2 = 2800 \qquad (2)$$

نلاحظ أن المستقيم الأول يمر بالنقطتين $(180,0),\ (0,450)$ والمستقيم الثاني يمر بالنقطتين $(350,0),\ (0,280)$ ، لإيجاد نقطة تقاطعهما نحل المعادلتين $(1),(2)$ فتكون نقطة التقاطع هي $B(100,200)$ ، كما هو مبين في الشكل (4-1) .

2. نحسب قيمة دالة الهدف $z = 3x_1 + 2x_2$ لكل نقطة من النقاط الحدية o,A,B,C فنجد أن:

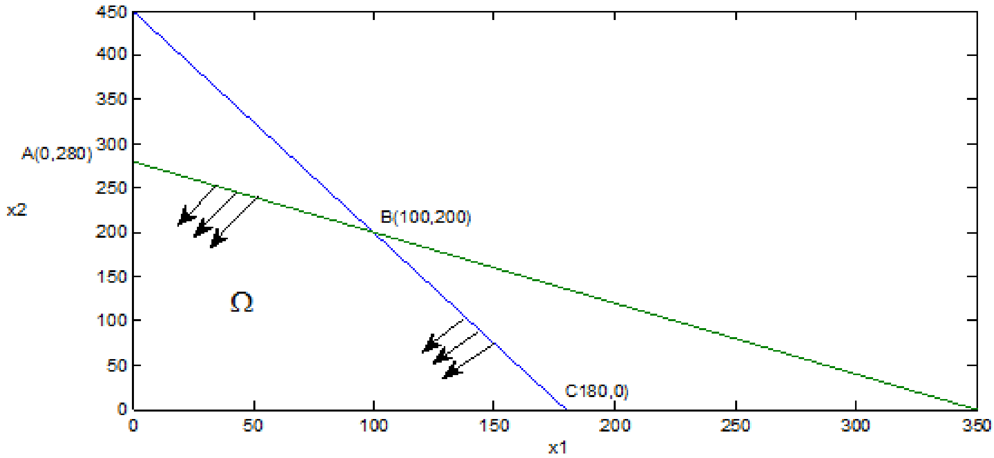
$$z_o = 0,\ z_A = 560,\ z_B = 700,\ z_C = 540$$

$\therefore$ القيمة القصوي لدالة الهدف هي $z = 700$ عند النقطة $B(100,200)$

$\therefore$ الحل الأمثل هو $x_1 = 100,\ x_2 = 200$ حيث $z = 700$.

$\therefore$يلزم انتاج 100 جوال من النوع A، 200 جوال من النوع B في الأسبوع لكي تحقق الشركة أقصي ربح ممكن وهو 700$ أسوعياً .

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات



شكل (**1-4**)

مثال (**3-1**)

أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ & x_1 \ge 0 \ , \ \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

1. نرسم منطقة الحل Ω الموجودة في الربع الأول والمحدودة بالمستقيمات التالية:

$$3x_1 + 4x_2 = 12 \qquad (1)$$

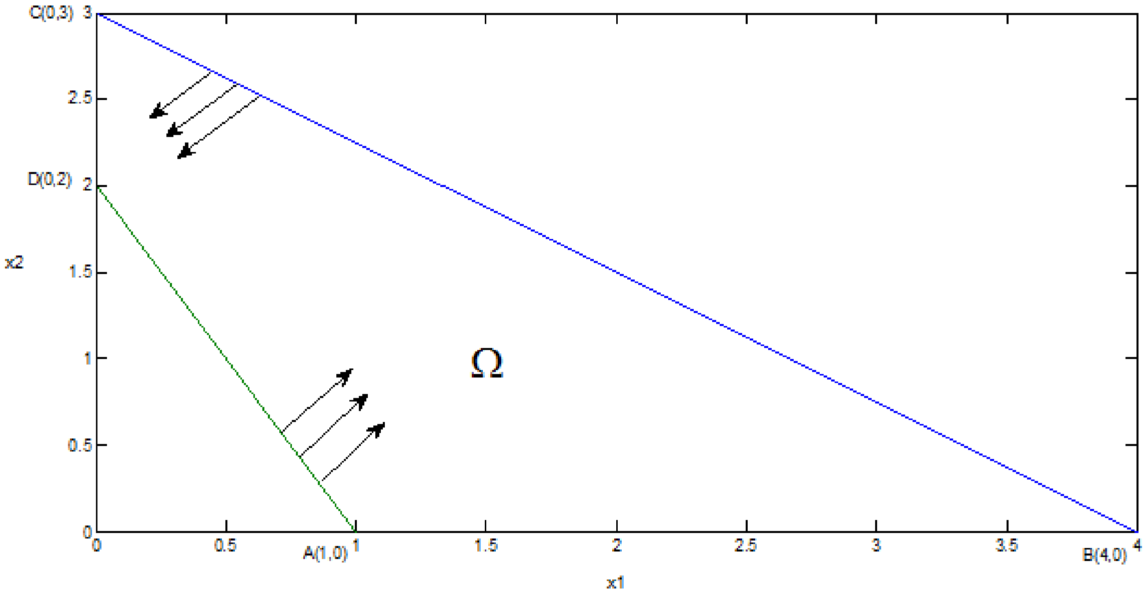
$$2x_1 + x_2 = 2 \qquad (2)$$

نلاحظ أن المستقيم الأول يمر بالنقطتين $B(4,0), C(0,3)$ والمستقيم الثاني يمر بالنقطتين $A(1,0), D(0,2)$ كما هو مبين في الشكل (1-5) .

2. نحسب قيمة دالة الهدف $z = x_1 + 2x_2$ لكل نقطة من النقاط الحدية A,B,C,D لمنطقة الحل Ω كالآتي: $z(1,0) = 1,\ z(4,0) = 4,\ z(0,3) = 6,\ z(0,2) = 4$

واضح لدينا أن أقل قيمة لدالة الهدف هي $z = 1$ وذلك عند النقطة $A = (1,0)$

∴ الحل الأمثل هو $x_1 = 1,\ x_2 = 0$ حيث $z = 1$



شكل (**1-5**)

مثال (**1-4**)

أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية:

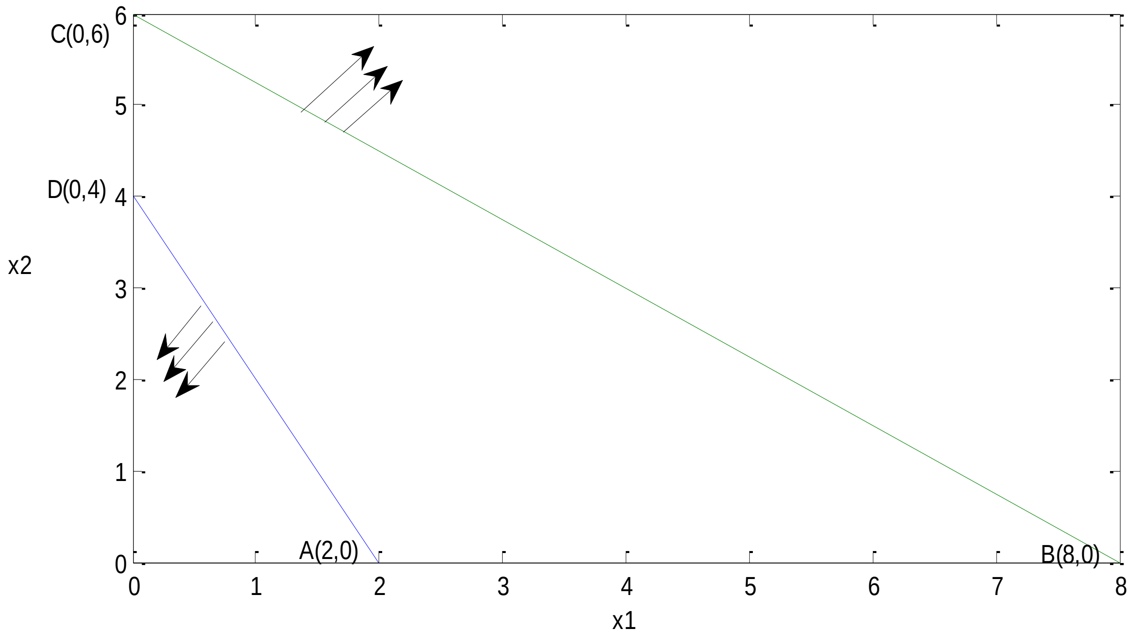
$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t} \quad & 2x_1 + x_2 \le 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 \ge 24 \\ & x_1 \ge 0\ ,\ \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

1. نرسم منطقة الحل Ω الموجودة في الربع الأول والمحدودة بالمستقيمات التالية:

$$2x_1 + x_2 = 4 \qquad (1)$$
$$3x_1 + 4x_2 = 24 \qquad (2)$$

واضح أن المستقيم الأول يمر بالنقطتين $A(2,0), D(0,4)$ والمستقيم الثاني يمر بالنقطتين $B(8,0), C(0,6)$ كما هو مبين في الشكل (1-6) ، نلاحظ من الرسم أنه لا يوجد تقاطع بين متراجحات القيود و بناء عليه فإن منطقة الحل Ω هي المجموعة الخالية، حينئذ نقول أن المسألة غير قابلة للحل Infeasible LP Problem .



شكل (**1-6**)

مثال (**1-5**)

أوجد حل المسألة التالية:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 15 \\ & x_1 \ge 0 \,,\; x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

1. نرسم منطقة الحل Ω الموجودة في الربع الأول والمحدودة بالمستقيمات التالية:

$$2x_1 + 3x_2 = 12 \qquad (1)$$
$$5x_1 + 2x_2 = 15 \qquad (2)$$

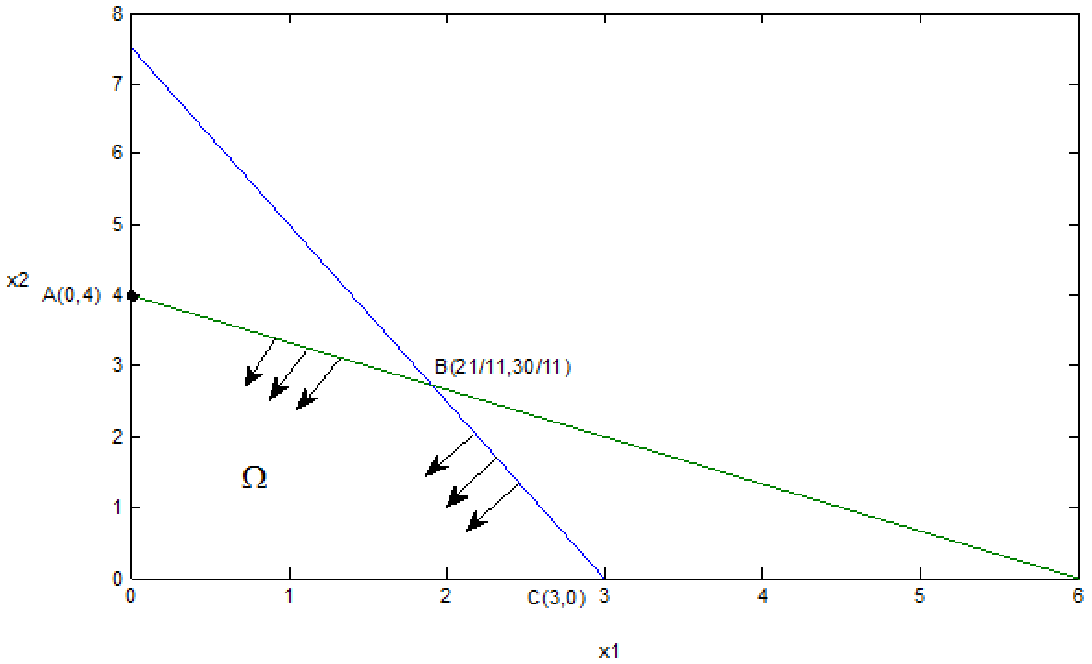
نلاحظ أن المستقيم الأول يمر بالنقطتين $(0,4), (6,0)$ والمستقيم الثاني يمر بالنقطتين $(0,7\tfrac{1}{2}), (3,0)$ ، لإيجاد نقطة تقاطعهما نحل المعادلتين $(1), (2)$ فتكون نقطة التقاطع هي $B(\tfrac{21}{11}, \tfrac{30}{11})$ ، كما هو مبين في الشكل (1-7) .

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

2. نحسب قيمة دالة الهدف $z = 4x_1 + 6x_2$ لكل نقطة من النقاط الحدية o,A,B,C علي الترتيب فنجد أن:

$$z(0,0) = 0,\ z(3,0) = 12,\ z(\tfrac{21}{11},\tfrac{30}{11}) = 24,\ z(0,4) = 24$$

واضح لدينا أن أقصي قيمة لدالة الهدف هي $z = 24$ وذلك علي امتداد القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول الأمثلية تقع جميعها علي القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.



شكل (**1-7**)

مثال (**1-6**)

أوجد حل المسألة التالية:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t} \quad & x_1 + 3x_2 \ge 6 \\
& x_1 + x_2 \ge 4 \\
& x_1 \ge 0\ ,\ \ x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

الحل:

1. نرسم منطقة الحل Ω الموجودة في الربع الأول والمحدودة بالمستقيمات التالية:

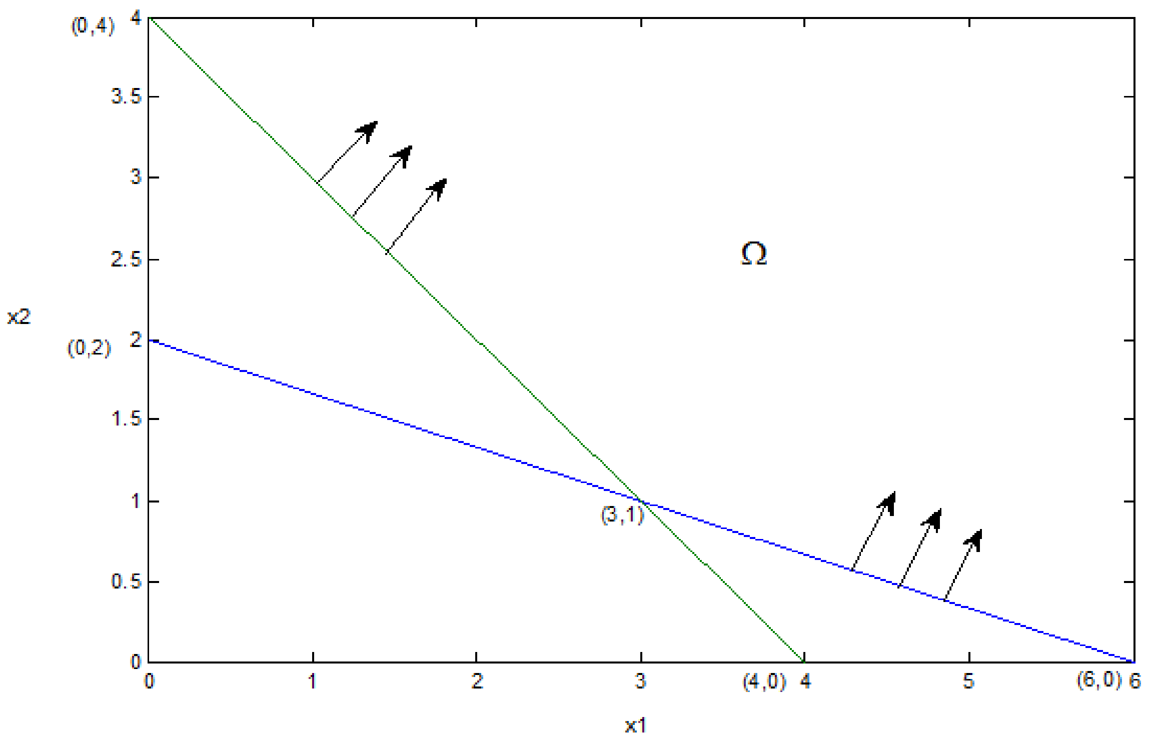
$$x_1 + 3x_2 = 6 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 4 \qquad (2)$$

إعداد: د. عماد السيد علي المهدي – جامعة الملك سعود – كلية العلوم – قسم الرياضيات

واضح أن المستقيم الأول يمر بالنقطتين (0,2), (6,0) والمستقيم الثاني يمر بالنقطتين (0,4), (4,0) ، كما هو مبين في الشكل (8-1) ، لإيجاد نقطة تقاطعهما نحل المعادلتين (1), (2) فتكون نقطة التقاطع هي (3,1) ، كما هو مبين في الشكل (8-1) .

واضح من الرسم أن منطقة الحل Ω غير محدودة ، في هذه الحالة تقول أن المسألة غير محدودة الحل Unbounded LP problem



شكل (8-1)

مما سبق نجد أنه يوجد أربع حالات من مسائل البرمجة الخطية:

(1) مسائل يكون لها حل وحيد

(2) مسائل يكون لها عدد لا نهائي من الحلول

(3) مسائل ليس لها حل

(4) مسائل تكون غير محدودة الحل

تمــاريــن

1. أوجد حل المسألة التالية:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0\ ,\ \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2. مصنع لإنتاج مستلزمات الألعاب الرياضية ، ينتج نوعين من الكرات (كرة البيسبول وكرة السلة) ، و بفرض أن المصنع يمكنه إنتاج 5000 كرة أسبوعيًا، ولكي يتمكن المصنع من تلبية احتياجات المستهلكين الدائمين لابد وأن ينتج 1500 كرة سلة ، 2000 كرة بيسبول . إذا علمت أن المكسب لكل كرة سلة هو $15 ، والمكسب لكل كرة بيسبول هو $5 ، فكم عدد الكرات من كل نوع يلزم إنتاجها أسبوعياً لتحقيق أقصي ربح ممكن ؟

3. مصنع للأخشاب ينتج طاولات وكراسي، وترغب إدارة المصنع في تحقيق أقصي ربح ممكن لدالة الهدف
والمرتبطة بالقيود الآتية:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 20x_2 &\le 400 \\ 10x_1 + 15x_2 &\le 450 \\ x_1 \ge 0\ ,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

حيث x_1 ، x_2 يرمزان إلي عدد الكراسي، عدد الطاولات المراد إنتاجهما علي الترتيب، علماً بأن كمية الأخشاب المتوفرة هي 400 قدم لوحي (board-foot) وأن عدد الساعات البشرية اللازمة هي 450 ساعة، أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة باستخدام الرسم.