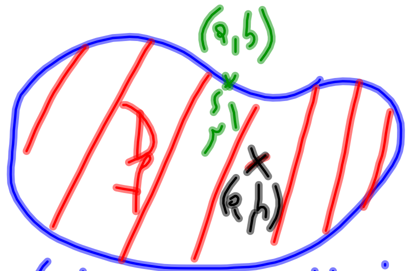
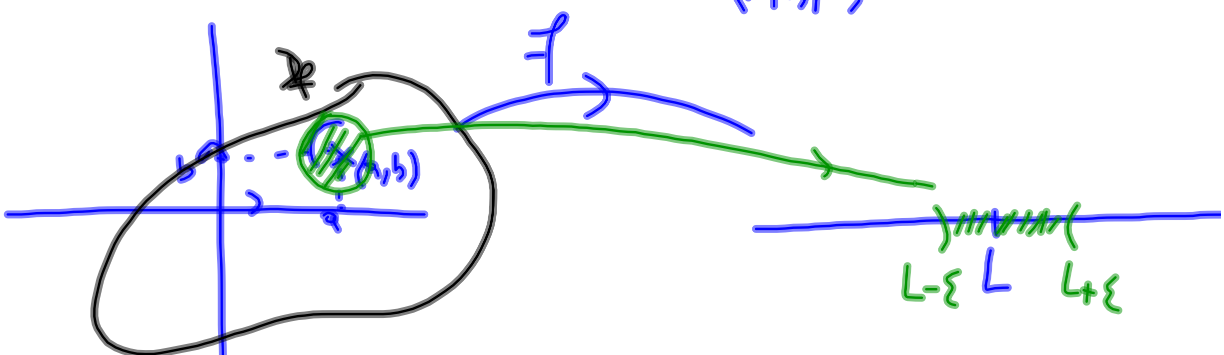
النهايات والاتصال

تعريف: لتكن f دالة في متغيرين حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$
و $(a,b)\in D_f$ أو (a,b) على الحد D_f ، ولتكن $L\in\mathbb{R}$



L هي نهاية f عند النقطة (a,b) ونرمز $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ إذا كان
لكل $\varepsilon>0$ $(\varepsilon\in\mathbb{R})$ ، يوجد $r>0$
حيث إذا كان $(x,y)\in D_f\cap D_{((a,b),r)}$ فإن $|f(x,y)-L|<\varepsilon$



مبرهنة: لتكن f دالة بمتغيرين , $L \in \mathbb{R}$

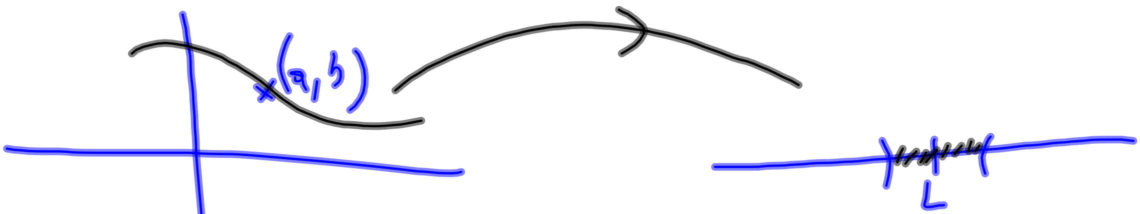
ولتكن $(a,b) \in D_f$ أو (a,b) على حد D_f

لدينا:

L نهاية f عند النقطة (a,b) : $\left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L\right)$

إذا وفقط إذا كان لكل مسار Δ يمر من (a,b)

فإن $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ (x,y)\in\Delta}} f(x,y) = L$



مبرهنة: إذا كان f لها نهاية عند النقطة (a,b)

فإن النهاية تكون وحيدة

ملاحظة:

اذا كان يوجد Δ_1 و Δ_2 كل منهما مسار يمر من النقطة (a,b) حيث

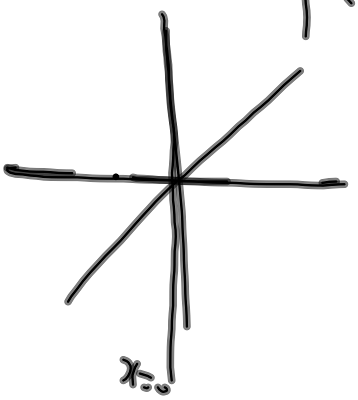
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in\Delta_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in\Delta_2}} f(x,y)$$

فان f ليس لها نهاية عند النقطة (a,b)

بان $\frac{1}{2} = \lim_{\substack{(0,0)\\y=x}} f(x,y) \neq \lim f(x,y)$

مثال: اثبت أن

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$



$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0$$

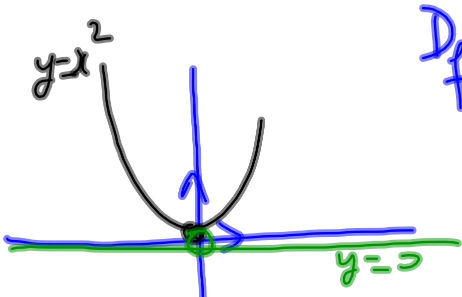
$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

مثال: هل توجد النهاية التالية:

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \quad ?$$

الحل: لدينا

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$



$$\lim_{\substack{(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(0)}{x^4+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

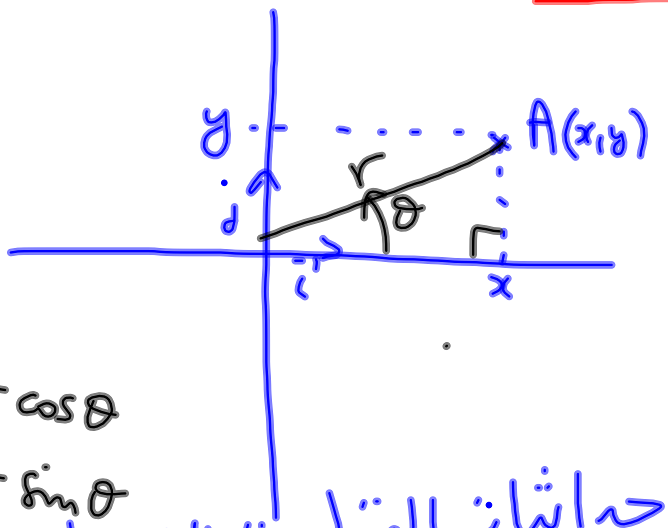
بما أن:

$$\frac{1}{2} = \lim_{\substack{(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0$$

فإن النهاية غير موجودة عند النقطة: $(0,0)$

لماذا؟

الاحداثيات القطبية



$r>0$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

(r,θ) هي الاحداثيات القطبية للنقطة $A(x,y)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} ; \begin{matrix} r>0 \\ \theta \in]-\pi,\pi] \end{matrix} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$x \neq 0$

ملاحظة:

$$\begin{cases} r\cos\theta = 0 \\ r\sin\theta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = 0 \text{ أو } \cos\theta = 0 \\ r = 0 \text{ أو } \sin\theta = 0 \end{cases}$$

بما أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ فإن ($\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 0$ لا يمكن)

فإن $\begin{cases} r\cos\theta = 0 \\ r\sin\theta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow r = 0$

مبرهنة: إذا كان $\lim\limits_{(a,b)} g(x,y) = 0$, الدالة h محدودة بجوار النقطة (a,b)

فإن $\lim\limits_{(a,b)} g(x,y)\, h(x,y) = 0$

مثال: أوجد النهاية للدالة f عند النقطة $(0,0)$ في الحالات التالية:

(١) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{2x^2+y^2}$

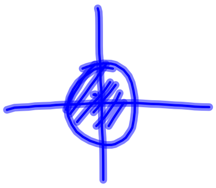
(٢) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+4y^2}$

الحل (1):

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{2x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^2\, r\sin\theta}{2(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{r^2\left(2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}$$



$$=\lim_{r\to 0} r\,\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1+\cos^2\theta}$$

بما أن $\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1+\cos^2\theta}$ محدود , لكل $\theta\in R$

و $\lim_{r\to 0} r=0$

فإن $\lim_{r\to 0} r\cdot\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1+\cos^2\theta}=0$

وبالتالي $\lim_{(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} r\,\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1+\cos^2\theta}=0$

$$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+4y^2}$$ (ج)

$$\lim_{(0,0)}\frac{x^3}{x^2+4y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+4(r\sin\theta)^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)}$$

$$=\lim_{r\to 0} r\,\frac{\cos^3\theta}{1+3\sin^2\theta}=0$$

لأن $\lim_{r\to 0} r=0$ و الدالة $\frac{\cos^3\theta}{1+3\sin^2\theta}$ محدودة

وبالتالي $$\lim_{(0,0)}\frac{x^3}{x^2+4y^2}=0$$

ملاحظة :
$\left(0\le \sin^2\theta\le 1 \quad \forall\theta\in\mathbb{R}\right)$

$$1\le 1+3\sin^2\theta\le 2$$

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+3\sin^2\theta}\le 1$$

ولدينا $$-1\le\cos^3\theta\le 1$$

إذن $$-1\le\frac{\cos^3\theta}{1+3\sin^2\theta}\le 1$$ $\left(\text{محدودة } \frac{\cos^3\theta}{1+3\sin^2\theta}\right)$

مبرهنة: لتكن f و g كل منهما دالة، لتكن: $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$

(١) إذا كان $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ و $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$

فإن $\lim_{(a,b)} (f+g) = L_1 + L_2$ و $\lim_{(a,b)} (f \cdot g) = L_1 L_2$ ، $\lim_{(a,b)} |f(x,y)| = |L_1|$

(٢) إذا كان $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ و g ليست لها نهاية عند (a,b)

فإن $\lim_{(a,b)} (f(x,y) + g(x,y))$ غير موجودة.

(٣) إذا كان f و g كل منهما ليس له نهاية عند النقطة (a,b) فإنه لا يمكن أن نستنتج نهاية $f+g$ عند (a,b) وبالتالي ندرس المثال على حاله.

ملاحظة: إذا كان $\lim_{(a,b)} |f(x,y)| = L$ و $L > 0$

فإنه لا يمكن أن نستنتج نهاية f عند النقطة (a,b)

مبرهنة: $\lim_{(a,b)} |f(x,y)| = 0 \iff \lim_{(a,b)} f(x,y) = 0$

مثال: هل هي $\lim_{(0,0)} \frac{xy + x^2y}{x^2+y^2}$ موجودة.

الحل: نعلم أن $\lim_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ غير موجودة.

ونعلم أن $\lim_{(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

فإن $\lim_{(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{(0,0)} \frac{xy+x^2y}{x^2+y^2}$ غير موجودة عند النقطة (ط م)

مبرهنة

ملاحظة : لا نستعمل البرهنة مباشرة ونستعمل البرهان

لتكن $f(x,y)=\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}$ حيث $\alpha>0,\beta>0,\gamma>0$

(1) إذا كان $\alpha+\beta>2\gamma$ فإن $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}=0$

(2) إذا كان $\alpha+\beta\leq 2\gamma$ فإن $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}$ غير موجودة.

البرهان : (1)

$$\lim_{(0,0)}\frac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^{\alpha}(r\sin\theta)^{\beta}}{(r^2)^{\gamma}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^{\alpha+\beta}\cos^{\alpha}\theta\sin^{\beta}\theta}{r^{2\gamma}}$$

$$=\lim_{r\to 0} r^{\alpha+\beta-2\gamma}\cdot\left(\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta\right)$$

(1) إذا كان $\alpha+\beta-2\gamma>0$ $(\alpha+\beta>2\gamma)$ فإن $\lim\limits_{r\to 0} r^{\alpha+\beta-2\gamma}=0$

ونعلم أن $\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta$ محدودة فإن $\lim\limits_{r\to 0} r^{\alpha+\beta-2\gamma}\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta=0$

وبالتالي $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}=0$

(2) إذا كان $\alpha+\beta-2\gamma\leq 0$ فإن

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} r^{\alpha+\beta-2\gamma}=\begin{cases}+\infty \ ; & \alpha+\beta<2\gamma\\ \text{أو} & \\ 1 & \end{cases}$$

ونعلم أن $-1\leq\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta\leq 1$ فإن

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha+\beta-2\gamma}\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta=\Big\{$$ غير موجودة.

مبرهنة: لتكن f دالة في متغيرين و $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

حيث $(a,b)\in D_f$ أو (a,b) على حد D_f.

ولتكن g و h كل منهما دالة حيث

$$g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$$

لكل $(x,y)\in D_{((a,b),r)}$, $(x,y)\neq(a,b)$

إذا كان

$$L = \lim_{(a,b)} g(x,y) = \lim_{(a,b)} h(x,y)$$

فإن

$$\lim_{(a,b)} f(x,y) = L$$

مثال: أوجد النهاية للدالة f عند النقطة $(0,0)$ في الحالات التالية.

(١) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(٢) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

(٣) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+|y|}$

(٤) $\lim\limits_{(0,0)} (x^2+y)\sin\dfrac{1}{xy}$

تذكير: (1) لدينا $(|a|-|b|)^2 = a^2+b^2-2|ab|$

و لدينا $(|a|-|b|)^2 \geq 0$ لكل $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad a^2+b^2-2|ab|\geq 0$

$\text{''} \quad a^2+b^2 \geq 2|ab|$

$$\boxed{(a,b)\neq(0,0) \quad \frac{|ab|}{a^2+b^2}\leq \frac{1}{2} \quad \left(\frac{2|ab|}{a^2+b^2}\leq 1\right)}$$

(2) $0\leq \frac{a^2}{a^2+b^2}\leq 1$; لكل $(a,b)\neq(0,0)$

$0\leq \frac{b^2}{a^2+b^2}\leq 1 \; ; \forall (a,b)\neq(0,0)$

(3) $\big||a|-|b|\big|\leq |a+b|\leq |a|+|b|$ لكل $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

الحل:

لدينا: $0 \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

ولدينا: $0 \le \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

$0 \le \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|x| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le |x|$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

وبنفس الطريقة: نبرهن أن $0 \le \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le |y|$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

بأن: $0 \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le |x|+|y|$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

بما أن: $\lim_{(0,0)} 0 = 0$, $\lim_{(0,0)} |x|+|y| = 0$

فإن $\lim_{(0,0)} \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$

وبالتالي $\lim_{(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$ (ح)

لدينا $0 \le \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$ لكل $(x,y) \neq (0,0)$

إذن $0 \le \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y|$ لكل $(x,y) \neq (0,0)$

بما أن $\lim_{(0,0)} 0 = 0$ و $\lim_{(0,0)} |y| = 0$

إذن $\lim_{(0,0)} \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} = 0$

ولدينا $\frac{x^2}{x^2+y^2}|y| = \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right|$

إذن $\lim_{(0,0)} \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = 0$ وبالتالي $\lim_{(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

(٣)

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^3}{x^2+|y|}$$

لدينا $0 \leq x^2 \leq x^2+|y|$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+|y|} \leq 1$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

فإن $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+|y|}|x| \leq |x|$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

بما أن $\lim\limits_{(0,0)}|x|=0$, $\lim\limits_{(0,0)} 0=0$ فإن $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+|y|}|x|=0$

ونعلم أن $\left|\dfrac{x^3}{x^2+|y|}\right| = \dfrac{x^2}{x^2+|y|}\cdot|x|$

فإن $\lim\limits_{(0,0)}\left|\dfrac{x^3}{x^2+|y|}\right|=0$, وبالتالي $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{x^3}{x^2+|y|}=0$

$$\lim_{(0,0)} (x^2+y)\sin\frac{1}{xy}$$ (٤)

لدينا $0 \le \left|\sin\frac{1}{xy}\right| \le 1$ لكل $xy \neq 0$

$0 \le |(x^2+y)|\left|\sin\frac{1}{xy}\right| \le |x^2+y|$ لكل $xy \neq 0$

ولدينا $\lim_{(0,0)} 0 = 0$, $\lim_{(0,0)} |x^2+y| = 0$

إذن $\lim_{(0,0)} |(x^2+y)|\left|\sin\frac{1}{xy}\right| = \lim_{(0,0)} \left|(x^2+y)\sin\frac{1}{xy}\right| = 0$

وبالتالي: $\lim_{(0,0)} (x^2+y)\sin\frac{1}{xy} = 0$

مثال: أوجد النهاية، إن أمكن، في الحالات التالية:

(١) $\lim_{(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+1}$, $\lim_{(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2}$

(٢)

(٣)

الحل: (1)

$$\lim_{(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+1}$$ (2)

لدينا $\lim_{(1,1)}(x-1)(y-1)=0$, $\lim_{(1,1)} x^2+y^2-2x-2y+1=-1$

إذن $\lim_{(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+1} = \frac{0}{-1} = 0$

(ب)

$$\lim_{(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2}$$

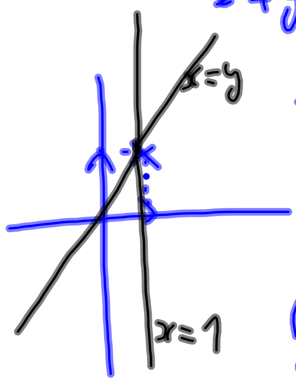
لدينا $\lim_{(1,1)} (x-1)(y-1) = 0$, $\lim_{(1,1)} x^2+y^2-2x-2y+2 = 0$

لا يمكن أن نستنتج النهاية مباشرة.

نلاحظ: $x^2+y^2-2x-2y+2 = (x-1)^2+(y-1)^2$

وبالتالي

$$\frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2} = \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$



لدينا:

$$\lim_{\substack{(1,1)\\ y=x}} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{2x^2-4x+2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ولدينا:

$$\lim_{\substack{(1,1)\\ x=1}} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2} = \lim_{y\to 1} \frac{0(y-1)}{1^2+y^2-2-2y+2}$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{0(y-1)}{y^2-2y+1} = \lim_{y\to 1} \frac{0(y-1)}{(y-1)^2} = \lim_{y\to 1} 0 = 0$$

بما أن

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=x}} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2} = \frac{1}{2} \neq \lim_{\substack{y\to 1\\ x=1}} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2} = 0$$

فإن

$$\lim_{(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2}$$ غير موجودة.

اتصال الدالة

تعريف: لتكن f دالة معرفة على D_f.

و $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

(1) f متصلة عند النقطة (a,b) إذا كان:
$$\begin{cases} (a,b)\in D_f \\ \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b) \end{cases}$$

(2) f متصلة على المجموعة D إذا كان f متصلة عند كل نقطة من D.

مثال: بين فيما إذا كان f متصلة عند النقطة (a,b) وأوجد مجال إتصال الدالة في الحالات التالية:

(١) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} ; & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 ; & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(٢) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} ; & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 ; & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(٣) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(٤) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} ; & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 ; & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

الحل: (1)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نعتبر الدالة: g كمايلي $g:(x,y)\longmapsto\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ أي $g(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y}$

g هي دالة الكسرية ومجالها $D_g=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ فهي متصلة:

على مجالها $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ولدينا $D_f=\mathbb{R}^2$

وبما أن $f(x,y)=g(x,y)$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

بأن f متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

عند النقطة: $(x,y)=(0,0)$: $(0,0)\in D_f$

ولدينا:

$$\lim_{(0,0)} f(x,y)=\lim_{(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$

(نعلم مما سبق أن $\lim_{(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$)

فإن f متصلة عند النقطة $(0,0)$

وبالتالي f متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$.