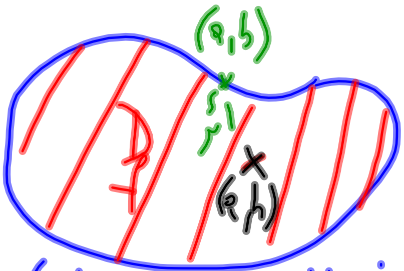
النهايات والاتصال

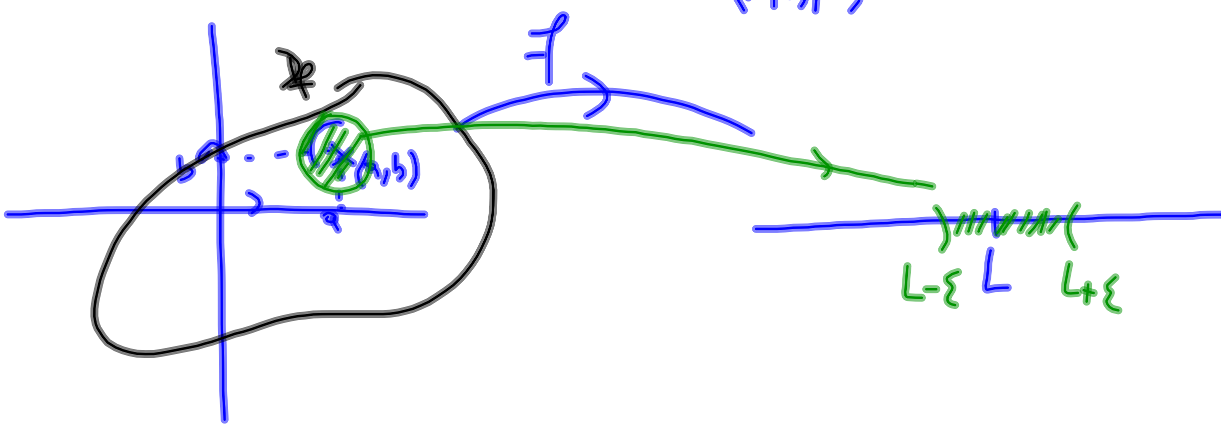
تعريف: لتكن f دالة في متغيرين حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$
و $(a,b)\in D_f$ أو (a,b) على الحد D_f ، و لتكن $L\in\mathbb{R}$



L هي نهاية f عند النقطة (a,b) ونرمز $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ إذا كان

لكل $\varepsilon>0$ $(\varepsilon\in\mathbb{R})$ ، يوجد $r>0$

حيث إذا كان $(x,y)\in D_f\cap D_{((a,b),r)}$ فإن $|f(x,y)-L|<\varepsilon$



مبرهنة : لتكن f دالة في متغيرين , $L \in \mathbb{R}$

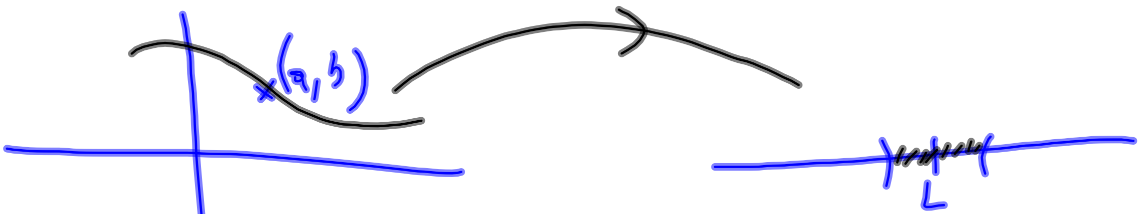
ولتكن $(a,b) \in D_f$ أو (a,b) على حد D_f

لدينا :

L نهاية f عند النقطة (a,b) $\left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L\right)$

إذا وفقط إذا كان لكل مسار Δ يمر من (a,b)

فإن $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ (x,y)\in\Delta}} f(x,y) = L$



مبرهنة : إذا كان f لها نهاية عند النقطة (a,b)

فإن النهاية تكون وحيدة

ملاحظة:

اذا كان يوجد Δ_1 و Δ_2 كل منهما
مسار يمر من النقطة (a,b) حيث

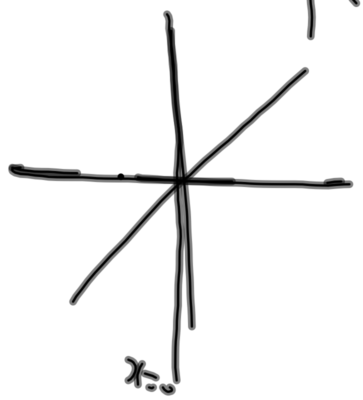
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in\Delta_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in\Delta_2}} f(x,y)$$

فان f ليس لها نهاية عند النقطة (a,b)

بان $\frac{1}{2} = \lim_{\substack{(0,0)\\y=x}} f(x,y) \neq \lim f(x,y)$

مثال: اثبت أن

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$



$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

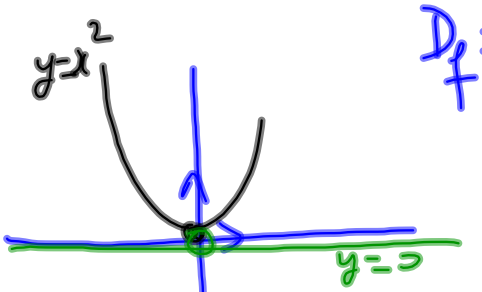
$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

مثال: هل توجد النهاية التالية:

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \quad ?$$

الحل: لدينا

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$



$$\lim_{\substack{(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(0)}{x^4+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

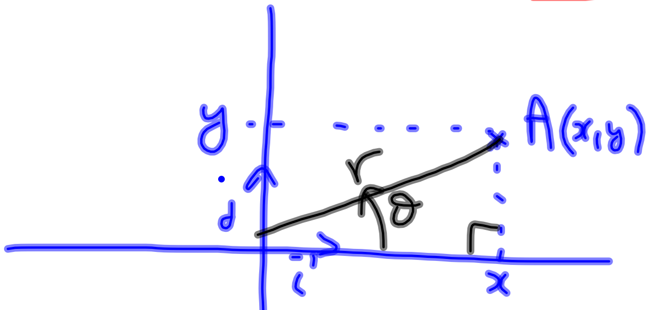
بما أن:

$$\frac{1}{2} = \lim_{\substack{(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0$$

فإن النهاية غير موجودة عند النقطة $(0,0)$

للمثال.

الاحداثيات القطبية



$r > 0$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

(r,θ) هي الاحداثيات القطبية للنقطة $A(x,y)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} ; \begin{matrix} r > 0 \\ \theta \in (-\pi, \pi] \end{matrix} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$x \neq 0$

ملاحظة:

$$\begin{cases} r\cos\theta = 0 \\ r\sin\theta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r=0 \text{ أو } \cos\theta = 0 \\ r=0 \text{ أو } \sin\theta = 0 \end{cases}$$

بما أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ فإن ($\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 0$ لا يمكن)

فإن $\begin{cases} r\cos\theta = 0 \\ r\sin\theta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow r = 0$

مبرهنة: إذا كان $\lim_{(a,b)} g(x,y) = 0$, الدالة h محدودة بجوار النقطة (a,b)

فإن $\lim_{(a,b)} g(x,y)\, h(x,y) = 0$

مثال: أوجد النهاية للدالة f عند النقطة (٠،٠) في الحالات التالية:

(١) $$f(x,y)=\frac{x^2y}{2x^2+y^2}$$

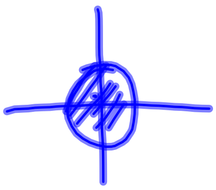
(٢) $$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+4y^2}$$

الحل: (1)

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{2x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^2\, r\sin\theta}{2(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{r^2\left(2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}$$



$$=\lim_{r\to 0} r\,\frac{\cos^2\theta\,\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}$$

بما ان $\frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{1+\cos^2\theta}$ محدود لكل $\theta\in\mathbb{R}$

و $\lim_{r\to 0} r=0$

فإن $\lim_{r\to 0} r\cdot\frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{1+\cos^2\theta}=0$

وبالتالي $\lim_{(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} r\,\frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{1+\cos^2\theta}=0$

$$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+4y^2} \qquad (\text{C})$$

$$\lim_{(0,0)}\frac{x^3}{x^2+4y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+4(r\sin\theta)^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)}$$

$$=\lim_{r\to 0} r\,\frac{\cos^3\theta}{1+3\sin^2\theta}=0$$

لأن $\lim_{r\to 0} r=0$, والدالة $\frac{\cos^3\theta}{1+3\sin^2\theta}$ محدودة

وبالتالي

$$\lim_{(0,0)}\frac{x^3}{x^2+4y^2}=0$$

ملاحظة :

$$\left(0\le \sin^2\theta\le 1 \quad \forall\theta\in\mathbb{R}\right)$$

$$1\le 1+3\sin^2\theta\le 2$$

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+3\sin^2\theta}\le 1$$

ولدينا

$$-1\le\cos^3\theta\le 1$$

إذن

$$-1\le\frac{\cos^3\theta}{1+3\sin^2\theta}\le 1$$

(محدودة $\frac{\cos^3\theta}{1+3\sin^2\theta}$)

مبرهنة: لتكن f و g كل منهما دالة، ولتكن $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$

(1) إذا كان $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$

فإن $\lim\limits_{(a,b)} (f+g) = L_1 + L_2$ و $\lim\limits_{(a,b)} (f \cdot g) = L_1 L_2$ ، $\lim\limits_{(a,b)} |f(x,y)| = |L_1|$

(2) إذا كان $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ و g ليست لها نهاية عند (a,b)

فإن $\lim\limits_{(a,b)} \big(f(x,y) + g(x,y)\big)$ غير موجودة.

(3) إذا كان f و g كل منهما ليس له نهاية عند النقطة (a,b) فإنه لا يمكن أن نستنتج نهاية $f+g$ عند (a,b) وبالتالي ندرس المثال على حاله.

ملاحظة: إذا كان $\lim\limits_{(a,b)} |f(x,y)| = L$ و $L > 0$ فإنه لا يمكن أن نستنتج نهاية f عند النقطة (a,b)

مبرهنة: $\lim\limits_{(a,b)} |f(x,y)| = 0 \iff \lim\limits_{(a,b)} f(x,y) = 0$

مثال: هل هي موجودة: $\lim_{(0,0)} \frac{xy+x^2y}{x^2+y^2}$

الحل: نعلم أن $\lim_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ غير موجودة.

ونعلم أن $\lim_{(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

فإن $\lim_{(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right) = \lim_{(0,0)} \frac{xy+x^2y}{x^2+y^2}$ غير موجودة عند النقطة $(0,0)$

مبرهنة

لتكن $f(x,y)=\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}$ حيث $\alpha>0, \beta>0, \gamma>0$

ملاحظة: لا نستعمل المبرهنة مباشرة ونستعمل البرهان

(1) إذا كان $\alpha+\beta>2\gamma$ فإن $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}=0$

(2) إذا كان $\alpha+\beta\leq 2\gamma$ فإن $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}$ غير موجودة.

البرهان: (1)

$$\lim_{(0,0)}\frac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^{\alpha}(r\sin\theta)^{\beta}}{(r^2)^{\gamma}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^{\alpha+\beta}\cos^{\alpha}\theta\sin^{\beta}\theta}{r^{2\gamma}}$$

$$=\lim_{r\to 0} r^{\alpha+\beta-2\gamma}\cdot\left(\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta\right)$$

(1) إذا كان $\alpha+\beta-2\gamma>0$ $(\alpha+\beta>2\gamma)$ فإن $\lim\limits_{r\to 0} r^{\alpha+\beta-2\gamma}=0$

ونعلم أن $\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta$ محدودة فإن $\lim\limits_{r\to 0} r^{\alpha+\beta-2\gamma}\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta=0$

وبالتالي $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{(x^2+y^2)^{\gamma}}=0$

(2) إذا كان $\alpha+\beta-2\gamma\leq 0$ فإن $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r>0}} r^{\alpha+\beta-2\gamma}=\begin{cases}+\infty ; & \alpha+\beta<2\gamma\\ \text{أو} & \\ 1 & \end{cases}$

ونعلم أن $-1\leq\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta\leq 1$ فإن

$\lim\limits_{r\to 0} r^{\alpha+\beta-2\gamma}\cos^{\alpha}\theta\cdot\sin^{\beta}\theta=\Big\{$ غير موجودة.