الفهرس

الفصل الأول

1-1 التغير الحدى و المرونات التعريف الرياضى للتغير الحدى

مر في دراسة الاقتصاد ألفاظ وجمل تحتوي على تعبير التغير الحدي ومن أمثلة ذلك المنفعة الحدية ، التكلفة الحدية ، الإيراد الحدي ، الميل الحدي للاستهلاك ، الميل الحدي للاستيراد ..... الخ وكثير ما عرف الاقتصاديون التقليديون التغير الحدي بأنه مقدار التغير في المتغير التابع الناتج عن تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة وعادة ما يعطى هذا التعريف لسهولة التحليل .إلا انه لو افترضنا إن العلاقة بين المتغيرات مستمرة وقابلة للتفاضل ، فانه يمكن إيجاد تعريفا للتغير الحدي أكثر دقة من ذلك الذي يستخدمه الاقتصاديون التقليديون . فيمكن تعريف التغير الحدي بأنه مقدار التغير في المتغير التابع الذي ينتج عن التغير في المتغير المستقل بمقدار طفيف يقرب من الصفر ولتوضيح ذلك

نفترض إن دالة التكاليف $Y = \int(X)$

حيث

Y تمثل التكاليف الكلية

X تمثل الكمية المنتجة

وفي هذه الحالة تعرف التكلفة الحدية كالأتي :

$$Mc = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

حيث M_C تمثل التكلفة الحدية Marginal Cost وباستخدام معلوماتنا عن حساب التفاضل يمكننا التعبير عن التكلفة الحدية كالأتي :-

$$Mc = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{dY}{dX}$$

أي إن التكلفة الحدية ليست إلا معامل التفاضل الأول للمتغير التابع (التكلفة الكلية) بالنسبة للمتغير المستقل (كمية الإنتاج)

أو

$$Mc = \frac{dY}{dX}$$

وباستخدام نفس أسلوب التحليل يمكن استنتاج تعار يف التغيرات الحدية الأخرى

مثال 1 :-

نفترض إن دالة الاستهلاك هي $C = c\left(Y^d\right)$

حيث

C تمثل الإنفاق الاستهلاكي

Y^d تمثل الدخل المتاح .

في هذه الحالة يعرف الميل الحدي للاستهلاك

$$MPc = \frac{dC}{dY^d}$$

حيث

M_{pc} الميل الحدي للاستهلاك The Marginal Propensity

مثال 2 :-

نفترض إن دالة الإيراد الكلي هي :-

$$R = R(q)$$

حيث

q تمثل الكمية المباعة

R تمثل الإيراد الكلي Revenue

في هذه الحالة نحصل على الإيراد الحدي

$$MR = \frac{dR}{dq}$$

حيث

MR الإيراد الحدي Marginal Revenues

مثال 3 :-

نفترض إن دالة الإنتاج الكلي هي : $q=\emptyset(L,K)$

حيث

q تمثل الكمية المنتجة

L تمثل كمية العمل Labor المستخدمة في الإنتاج

K تمثل كمية رأس المال Capital المستخدمة في الإنتاج

في هذه الحالة نحصل على

$$M_{PL}=\frac{\partial q}{\partial L}$$
$$M_{PK}=\frac{\partial q}{\partial K}$$

حيث ......

MPL تمثل الإنتاجية الحدية لعنصر العمل the marginal Productivity of Labor

MPK تمثل الإنتاجية الحدية لعنصر رأس المال the marginal Productivity of Capital

واضح إن في هذا المثال الأخير عبرنا عن التغير الحدي بمعامل التفاضل الجزئي الأول ، وذلك الدالة (أو المتغير التابع) تتوقف على أكثر من متغير مستقل واحد .ويمكن تحديد التغير الحدي باستخدام العلاقات الصريحة وذلك بتطبيق قواعد التفاضل المعروفة كما سوف يتضح من الأمثلة الآتية

مثال 1

نفترض إن دالة التكاليف الكلية هي $Y = a\, e^{b\, x^{c}}$

حيث ....

Y تمثل التكاليف الكلية

X تمثل الكمية المنتجة.

وفي هذه الحالة تعرف التكلفة الحدية كالأتي :

$$Mc=abcx^{c-1}e^{bx^{c}}=b\,c\,y\,x^{c-1}$$

حيث M_C تمثل التكلفة الحدية Marginal Cost

مثال 2

نفترض إن علاقة الاستهلاك بالدخل هي

$$Y = \log_e (ax^2+b)$$

حيث

Y تمثل الاستهلاك، وحيث X تمثل الدخل المتاح

في هذه الحالة يعرف الميل الحدي للاستهلاك

$$MPx = \frac{2ax}{ax^2 + b}$$

حيث

M_{px} الميل الحدي للاستهلاك The Marginal Propensity

مثال 3

نفترض إن دالة الإنتاج الكلي هي :

$$q= A\ L^{\alpha}\ K^{\beta}$$

حيث

q تمثل الكمية المنتجة

L تمثل كمية العمل Labor المستخدمة في الإنتاج

K تمثل كمية رأس المال Capital المستخدمة في الإنتاج

في هذه الحالة نحصل على

$$M_{PL} = \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{\alpha q}{L}$$

$$M_{PK} = \frac{\partial q}{\partial K} = \frac{\beta q}{K}$$

2-1 العلاقة بين التكلفة المتوسطة والتكلفة الحدية

نفترض إن دالة التكاليف الكلية هي : $Y = f(X)$

حيث .....

Y تمثل تكلفة الإنتاج

X تمثل الكمية المنتجة

التكلفة المتوسطة = التكلفة الكلية ÷ الإنتاج

$$Ac = \frac{Y}{X}$$

$$Mc = \frac{dY}{dX}$$

لإيجاد علاقة بينهما لابد ان نوجد قيمة التكلفة المتوسطة عند نهايتها الصغرى والشرط الضروري لتحقيق نهاية صغرى لدالة في متغير واحد هو ان يكون معامل التفاضل الأول للدالة مساويا للصفر .. أي عندما تكون التكلفة المتوسطة عند نهايتها الصغرى نحصل على

$$\frac{d(Ac)}{dX} = 0$$

$$\frac{d\left(\frac{Y}{X}\right)}{dX} = \frac{X\frac{dY}{dX} - Y\frac{dX}{dX}}{X^2} = 0$$

ومن هذه المعادلة نحصل على

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y}{X}$$

وبتعويض معادلة التكلفة الحدية ومعادلة التكلفة المتوسطة في العلاقة الأخيرة نحصل على ...

*MC = (AC) min

أي إن التكلفة الحدية تساوي التكلفة المتوسطة عند أدنى قيمة لها او عندما تكون التكلفة المتوسطة عند نهايتها الصغرى * لتحقيق نهاية صغرى (عظمى) لدالة ما يتطلب الشرطين الضروري والكافي ..* الشرط الكافي للنهاية الصغرى تكون

المشتقة الثانية اكبر من الصفر

$$\frac{d^2(Ac)}{dX^2} > 0$$

الشرط الكافي للنهاية العظمى تكون المشتقة الثانية للدالة اقل من الصفر

$$\frac{d^2(Ac)}{dX^2} < 0$$

3-1 العلاقة بين التكلفة الحدية والإنتاجية الحدية

هناك علاقة هامة وهي إن تناقص الغلة الحدية شرط ضروري وكافي لتحقيق تزايد التكلفة الحدية وذلك في حالة دالة الإنتاج في متغير واحد نفترض إن دالة الإنتاج الآتية : $q = \phi(L)$ حيث q الكمية المنتجة و L كمية العمل المستخدم في الإنتاج . فلو افترضنا إن تكلفة وحدة العمل تساوي w فان جملة التكاليف تساوي..

$$C = w\,L$$

ويمكن استنتاج التكلفة الحدية للإنتاج

$$Mc = \frac{dc}{dq} = L\left(\frac{dw}{dq}\right) + w\left(\frac{dL}{dq}\right)$$

وحيث إن تكلفة العنصر w ثابتة إذن ..

$$Mc = \frac{dc}{dq} = w\left(\frac{dL}{dq}\right)$$

الإنتاجية الحدية للعمل من دالة الإنتاج أعلاه هي ..

$$MPL = \frac{dq}{dL} = \phi'(L)$$

ومن هذه المعادلة ..

$$\frac{1}{MPL} = \frac{dL}{dq} = \frac{1}{\phi'(L)}$$

نعوض في التكلفة الحدية

$$Mc = \frac{dc}{dq} = w\left(\frac{dL}{dq}\right)$$

$$Mc = \frac{w}{\phi'(L)}$$

- يمكن إن نحصل على التكلفة الحدية لعنصر العمل كالأتي ..

C = WL

$$Mc_L = \frac{\mathrm{d\,c}}{\mathrm{dL}} = w$$

وبتعويض هذه المعادلة في معادلة Mc

$$Mc = \frac{\mathrm{d\,c}}{\mathrm{dq}} = \frac{w}{\phi'(L)}$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d\,c}}{\mathrm{dL}} = w$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d\,c}}{\mathrm{dq}} = \frac{\left(\frac{\mathrm{d\,c}}{\mathrm{dL}}\right)}{\phi'(L)}$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{dL}} = \phi'(L)$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d\,c}}{\mathrm{dq}} = \frac{\left(\frac{\mathrm{d\,c}}{\mathrm{dL}}\right)}{\left(\frac{dq}{dL}\right)}$$

* التكلفة الحدية للإنتاج =التكلفة الحدية للعنصر المتغير(العمل) ÷ الإنتاجية الحدية لعنصر الإنتاج المتغير (العمل) من المعادلة $\frac{\mathrm{d\,c}}{\mathrm{dq}} = \frac{w}{\phi'(L)}$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى q

$$\frac{d\mathbf{c}^2}{\mathrm{dq}^2} = \frac{\frac{dw}{dq}\phi'(L) - \frac{d[\phi'(L)]}{dq}w}{[\phi'(L)]^2} \quad \frac{d\mathbf{c}^2}{\mathrm{dq}^2} = \frac{0 - \frac{d[\phi'(L)]}{dq}w}{[\phi'(L)]^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{\mathrm{d\,c}}{\mathrm{dq}}\right)}{\mathrm{dq}} = -\frac{d\left(\frac{w}{\phi'(L)}\right)}{\mathrm{dq}}$$

$$\frac{d[\phi'(L)]}{dq} = \frac{d[\phi'(L)]}{dq} \times \frac{dL}{dq}$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dq} = \frac{1}{\phi'(L)}$$

$$\rightarrow \frac{d[\phi'(L)]}{dq} = [\phi''(L)] \times \frac{1}{\phi'(L)}$$

وذلك لان دالة ø`(L) في متغير L الذي بدوره دالة للمتغير q .. بتعويض المعادلة الأخيرة

$$\frac{dc^2}{dq^2} = \frac{-\frac{d[\phi'(L)]}{dq} w}{[\phi'(L)]^2}$$

$$\frac{dc^2}{dq^2} = \frac{-\phi''(L) w}{[\phi'(L)]^3}$$

يتضح من المعادلة أن $\frac{d^2c}{dq^2}$ تكون موجبة مما يدل على تزايد التكلفة الحدية فقط عندما تكون (L) ``ø سالبة . وذلك لان كلا من w التي تمثل قيمة وحدة العمل (أو الأجر اليومي)

وكذلك (L) `ø التي تمثل الإنتاجية الحدية للعمل لابد وان تكون كميات موجبة .وعليه فأن التكلفة الحدية تتزايد فقط إذا ما تناقصت الإنتاجية الحدية لعنصر العمل المتغير ولما كانت دالة الإنتاج في الأجل القصير تابعة فقط لعنصر العمل المتغير حيث إن رأس المال والأرض يفترض فيهما الثبات في هذه الفترة القصيرة ، فإن التكلفة الحدية في الأجل القصير تتزايد إذا ما تحقق قانون تناقص الغلة بالنسبة للعنصر المتغير .

4-1 تعريف المرونة

تعرف المرونة أي متغير تابع بالنسبة لمتغير مستقل معين بالتغير النسبي في المتغير التابع مقسوما على التغير النسبي في المتغير المستقل فمرونة الطلب ألسعريه مثلا تمثلها المعادلة :

$$\eta_p = -\frac{dq}{q} \div \frac{dp}{p} \rightarrow \eta_p = -\frac{dq}{dp} \times \frac{p}{q}$$

حيث

q تمثل الكمية المطلوبة

P السعر

η_p تمثل مرونة الطلب ألسعريه

وقد وضعت الإشارة السالبة للحصول على قيمة موجبة للمرونة نظراً لان علاقة الطلب بالســعر (في حالة السلعة العادية) علاقة عكسية .وتعرف مرونة الطلب ألدخليه بالمعادلة :

$$\eta_I = \frac{dq}{q} \div \frac{dI}{I} \rightarrow \eta_I = \frac{dq}{dI} \times \frac{I}{q}$$

حيث

q تمثل الكمية المطلوبة

I تمثل الدخل

η_I تمثل مرونة الطلب ألدخليه وبصفة عامة إذا كانت لدينا علاقة .

y = f (x)

فأن مرونة المتغير التابع بالنسبة للمتغير المستقل تساوي

$$\eta = \frac{dY}{Y} \div \frac{dX}{X} \rightarrow \eta = \frac{dY}{dX} \times \frac{X}{Y}$$

أما ذا كانت لدينا العلاقة ... $Y = \phi(X_1, X_2, ..., X_j, ..., X_n)$

$$\eta = \frac{\partial Y}{\partial Xi} \times \frac{Xi}{Y}$$

ويتضح مما سبق إن هناك علاقة بين المرونة والتغير الحدي حيث إن ..المرونة = التغير الحدي x مقلوب التغير المتوسط كالأتي ..

$$Mpc = \frac{dc}{dy}$$

حيث ..C تمثل الاستهلاك Y تمثل الدخل أما مرونة الاستهلاك فتعرف كالتالي

$$\eta_y = \frac{\partial c}{\partial y} \times \frac{y}{c}$$

حيث إن

$\frac{y}{c}$ يمثل مقلوب الميل المتوسط للاستهلاك ..

ويمكن من دراستنا لتفاضل العلاقات اللوغارتيمية يمكننا إن نعبر عن المرونة ونحسبها بطريقة أسهل في بعض الأحيان ..

فمن العلاقة الدالية : y = f (x)

تكون مرونة المتغير y بالنسبة للمتغير x مساوية :

$$\eta = \frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y} = \frac{d(\ell n\, y)}{d(\ell n\, x)}$$

حيث ..

ℓn تعبر عن اللوغاريتم الطبيعي (أي اللوغاريتم للأساس هـ أو e ≈ 2. 718)

وإذا كانت لدينا علاقة دالية

$$Y = \phi(X_1, X_2, ..., X_j, ..., X_n)$$

تكون مرونة المتغير y بالنسبة للمتغير xj مساوية

$$\eta_{xj} = \frac{\partial Y}{\partial Xj} \times \frac{Xj}{Y} = \frac{\partial(\ell n Y)}{\partial(\ell n Xj)}$$

ولتوضيح كيفية استخدام العلاقات اللوغارتيمية في حساب المرونة نفترض دالة الإنتاج الآتية:

$$q = A\,L^{\alpha}\ K^{\beta}$$

في هذه الحالة تكون مرونة الإنتاج q بالنسبة لعنصر الإنتاج (L) مثلا مساوية :

$$\eta_L = \frac{\partial q}{\partial L} \times \frac{L}{q} \rightarrow \eta_L = \left[\alpha\ A\,L^{\alpha-1}\ K^{\beta}\right] \times \frac{L}{q} = \alpha$$

إلا انه يمكن حساب هذه المرونة مباشرة بأخذ لوغاريتم الطرفين في دالة الإنتاج ، ثم نفاضل لوغاريتم المتغير التابع بالنسبة للوغاريتم المتغير المستقل المعين

.وبأخذ لوغاريتم طرفي معادلة الإنتاج نحصل على ...

$$\ell n\ q = \ell n\ A + \alpha\ \ell n\ L + \beta\ \ell n\ K$$

وتحسب مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل كالأتي :

$$\eta_L = \frac{\partial(\ell nq)}{\partial(\ell nL)} = \alpha$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً .ويلاحظ أن المرونة في هذه الحالة يمثلها أس المتغير المستقل المعين .ونظراً لسهولة حساب المرونات باستخدام العلاقات اللوغارتيمية ، فانه عادة ما تستخدم النماذج القياسية في صورة لوغاريتمه . حيث تمثل المعاملات السلوكية المقدرة مرونات المتغير التابع بالنسبة للمتغيرات المستقلة . فلو افترضنا ان دالة الاستثمار قدرت بمعادلة الانحدار التالية ..

$$\ell n\ I = \alpha + \beta\ \ell n\ y + \delta\ \ell n\ r$$

حيث إن

I الاستثمار

Y التغير في الدجل

$r\left(\frac{Y_t}{Y_{(t-1)}}\right)$ سعر الفائدة

في هذه الحالة تكون مرونة الاستثمار بالنسبة للتغير في الدخل مساوية $\eta_y = \frac{\partial(\ell nI)}{\partial(\ell ny)} = \beta$

و تكون مرونة الاستثمار بالنسبة للتغير في سعر الفائدة مساوية $\eta_r = \frac{\partial(\ell nI)}{\partial(\ell nr)} = \delta$

وواضح إن δ و β يمثلان المعاملات السلوكية للمتغيرات y , r .هذا وبجدر بالذكر انه عند حساب اللوغاريتم الطبيعي

نستعين بالقاعدتين التالية

$$e^{\ell n\,(x+2)} = x+2 \qquad e^{\ell n(x)} = X \qquad \log_e e^{f(x)} = f(x)$$

5-1 العلاقة بين الإيراد الحدي ومرونة الطلب

من التعاريف السابقة للتغير الحدي والمرونة يمكننا استنتاج علاقة هامة بين الإيراد الحدي ومرونة الطلب .

فلو افترضنا ان

q تمثل الكمية المطلوبة وان

p تمثل السعر فأن الإيراد الكلي يساوي

$$R = pq \quad \Rightarrow \quad < MR = \frac{d(p.q)}{dq} \Rightarrow MR = q.\frac{dp}{dq} + p$$

$$\Rightarrow \quad MR = p\left(\frac{q}{p}.\frac{dp}{dq} + 1\right) \; \eta = .\frac{dq}{dp} \times \frac{p}{q} \rightarrow \frac{1}{\eta} = \frac{dp}{dq} \times \frac{q}{p}$$

وبالتعويض في الإيراد الحدي نحصل على $MR = p\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$

ويمكن استنتاج اذا كانت $\eta > 1$.. فأن $MR > 0$

إما إذا كانت $\eta < 1$ فأن $MR < 0$

بينما نجد إذا كانت $\eta = 1$ فأن $MR = 0$

أي إن الإيراد الكلي يصل إلى نهايتها العظمى عندما تكون المرونة مساوية 1 ويلاحظ انه في حالة المنافسة الكاملة تكون

$$\eta = \infty$$

فأن

$$MR = p\left(1 - \frac{1}{\infty}\right) = p$$

أي إن السعر في حالة المنافسة الكاملة يساوي الإيراد الحدي .

6-1 التغير الحدي والسلع المرتبطة

إذا أدى تغير سعر سلعة ما إلى تغير في الكمية المطلوبة من سلعة اخرى فان السلعتين تكونان مرتبطتين .

أي أن الكمية المطلوبة من أي سلعة تكون دالة ليس فقط لسعر السلعة محل الدراسة ، بل وأيضا لسعر السلعة الأخرى كما الحالة الآتية ..

$$X = \int\left(P_x \quad , \quad P_y\right)$$

او

$$Y = \int\left(P_x \quad , \quad P_y\right)$$

يلاحظ هنا أن الكمية المطلوبة من السلعة x تكون دالة لسعر هذه السلعة (P_x) وسعر السلعة y أي (P_Y) . ونفس الشيء يقال عن الكمية المطلوبة من السلعة y ومن المعروف انه لو كانت السلعتان x , y سلعا عادية فاننا نتوقع التغيرات الحدية التالية ..

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} < 0 \rightarrow \frac{\partial y}{\partial p_y} < 0$$

أي أن طلب كل من السلعتين ينحدر من أسفل نحو اليمين (أي أن المنحنى يكون سالب الميل)ومن المعروف أيضا انه لو كانت السلعتان بديلتين (اللحم والسمك) فان ارتفاع سعر احدهما يؤدي إلى زيادة الطلب على الأخرى . أي أن العلاقة بين الطلب على سلعة معينة وبين سعر السلعة البديلة علاقة طردية .

فلو كانت السلعتان x,y سلعا بديلة لحصلنا على :

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} > 0 \rightarrow \frac{\partial x}{\partial p_y} > 0$$

اما لو كانت السلعتان متكاملتين (الشاي والسكر) فان ارتفاع سعر احدهما سوف يؤدي إلى نقص الطلب على الأخرى . أي أن العلاقة بين الطلب على السلعة المعينة وبين سعر السلعة المتكاملة علاقة عكسية فلو كانت السلعتان x,y متكاملة لحصلنا على

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} < 0 \rightarrow \frac{\partial x}{\partial p_y} < 0$$

يتضح مما تقدم انه لو كانت اشارة المتغيرات الحدية $\frac{\partial y}{\partial p_x}, \frac{\partial x}{\partial p_y}$ موجبة فان السلعتين بديلتين أو متنافستين إما لو كانت إشارة المتغيرات الحدية $\frac{\partial y}{\partial p_x}, \frac{\partial x}{\partial p_y}$ سالبة فان السلعتين تكونا متكاملتين إما إذا كانت إشارة المتغيرات الحدية $\frac{\partial y}{\partial p_x}, \frac{\partial x}{\partial p_y}$ عكسية أي احدهما سالبة والأخرى موجبة فان السلعتين تكونا بديلتين أو متكاملتين .

مثـــــــــال ...

نفترض أن دالة الطلب على سلعتين x , y هما

$$X = \frac{P_y}{p_x} \qquad\qquad Y = \frac{P_x^{\ 2}}{p_y}$$

حيث

P_x يمثل سعر السلعة x بينما

P_y يمثل سعر السلعة y

المطلوب ....تحديد ما إذا كانت السلعتان سعا عادية ثم تحديد طبيعة العلاقة بينهما ...تعطى المتغيرات الحدية بالنسبة لسعر السلعة نفسها

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = -\frac{p_y}{(P_x)^2} < 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} = -\frac{P_x^{\ 2}}{(P_y)^2} < 0$$

وواضح أن التغيرات الحدية لكل سلعة بالنسبة لسعر السلعة نفسها سالبة أي أن العلاقة بين الطلب على كل سلعة وسعر هذه السلعة علقة عكسية ، مما يدل على أن السلعتين تمثل سلعا عادية . وتعطى المتغيرات الحدية بالنسبة لسعر السلعة الأخرى .

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = \frac{1}{(P_x)} > 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = \frac{2P_x}{(P_y)} > 0$$

ولما كانت هذه المتغيرات تحمل نفس الإشارة وهي موجبة فن السلعتين تمثل سلعا بديلة .

مثـــــــــــال –2

إذا كانت دوال الطلب على سلعتين x,y كالأتي (حيث p_x تمثل سعر السلعة x و p_y تمثل سعر السلعة y) كالآتي

$$X = ae^{-px\,py}$$

$$Y = be^{px\,py}$$

بافتراض أن a> 0 , b> 0

المطلوب ....

تحديد ما إذا كانت السلعتان تمثل سلعا عادية وما إذا كانت بديلة أو مكملة

يعطى التغير الحدي للطلب بالنسبة لسعر السلعة نفسها كالأتي

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = -a\ p_y\ e^{-pxpy} < 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} = -b\quad e^{px-py} < 0$$

واضح من الإشارات أعلاه أن السلعتين تمثلان سلعا عادية .

ثم تعطى التغير الحدي للطلب بالنسبة لسعر السلعة الأخرى كالآتي ..

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = -a\ p_y\ \ e^{-pxpy} < 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial px} = be^{px-py} > 0$$

واضح من هذه الإشارات أن السلعتين ليستا بديلتين أو متكاملتين .

وتجدر الإشارة هنا إلى أن قيمة e مرفوعة إلى أي أس تكون دائما موجبة ، وذلك لان e مقدار موجب . كما أن أي **مقدار** موجب مرفوع لأي أس يكون دائما موجبا فمثلا

$$a > 0 \quad if \quad e^{-2} > 0 \quad a^{-x} > 0$$

7-1 مرونات الطلب الجزئية والسلع المرتبطة

إذا كان لدينا سلعتان x , y وكانت دالة طلب كل منهما تتأثر بسعر السلعة الأخرى ، فانه يمكن حساب مرونة الطلب الجزئية لكل منهما بالنسبة لسعر السلعة نفسها ، وبالنسبة لسعر السلعة الأخرى .فلو افترضنا أن دالة الطلب

$$Y = g\left(p_x \quad , \quad p_y\right) \qquad X = \int\left(p_x \quad , \quad p_y\right)$$

فان مرونة الطلب الجزئية للسلعة x بالنسبة لسعرها px تساوي .

$$\eta_{xp_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{X} = \frac{\partial \ell nX}{\partial \ell nPx}$$

وتكون مرونة الطلب الجزئية للسلعة y بالنسبة لسعرها py تساوي .. $\eta_{yp_y} = \frac{\partial y}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{y} = \frac{\partial \ell nY}{\partial \ell nPy}$

وتكون مرونة الطلب الجزئية للسلعة x بالنسبة لسعر السلعةy (py) تساوي .. $\eta_{xp_y} = \frac{\partial x}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{X} = \frac{\partial \ell nX}{\partial \ell nPy}$

وتكون مرونة الطلب الجزئية للسلعةy بالنسبة لسعر السلعةx (px) تساوي .. $\eta_{Yp_x} = \frac{\partial y}{\partial px} \cdot \frac{p_x}{Y} = \frac{\partial \ell nY}{\partial \ell nPx}$

مثـــــــال -1-

نفرض أن دالة الطلب لسلعتين x,y هما ..

$$X = \frac{a}{p_x{}^2 p_y} \rightarrow Y = \frac{a}{p_x p_y}.$$

حيث

p_x تمثل سعر السلعة x

p_y تمثل سعر السلعة y

وحيث a ,b مقدار ثابت موجب فانه يمكن حساب مرونات الطلب الجزئية كالتالي

$\eta_{xpx} = -2$ $\eta_{ypy} = -1$ $\eta_{xpy} = -1$ $\eta_{ypx} = -1$

<u>مثـــــــــــــال –2-</u>

نفرض أن دالتي الطلب لسلعتي x , y هما

$$X = a\, e^{-PxPy} \qquad\qquad Y = b\, e^{Py-Px}$$

حيث

Px سعر السلعة x

Py سعرالسلعة y

a > 0 , b > 0 مرونات الطلب الجزئية كالأتي

$$\eta_{X\ Px} = -PxPy$$
$$\eta_{Y\ Py} = -Py$$
$$\eta_{X\ Py} = -PxPy$$
$$\eta_{Y\ Px} = -Px$$