الفصل الأول
القانون الرئيسى للفائدة المركبة
Compound Interest Equation

أولا : المفاهيم الأساسية للفائدة المركبة

١ – مقدمة :

سلف أن عرفنا فى الجزء الأول من هذا الكتاب والخاص بالفائدة البسيطة بأن "الفائدة" هى العائد الذى يدفع مقابل حق إستخدام رأس المال المقترض أو المستثمر خلال فترة زمنية معينة ، فضلا عن ذلك ذكرنا أن هناك فرق بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة حيث يظل رأس المال الأصلى المقترض أو المستثمر ثابتاً طوال مدة الاقتراض أو الاستثمار الأمر الذى يترتب عليه تساوى قيمة الفائدة البسيطة فى نهاية كل فترة زمنية خلال مدة الاقتراض أو الاستثمار أما فى حالة الفائدة المركبة فإن رأس المال الاصلى يتزايد بصفة مضنية بمقدار الفائدة المستحقة فى نهاية كل فترة زمنية وهذا يعنى أن فى الفائدة المركبة تضاف الفوائد إلى رأس المال الاصلى فى نهاية كل فترة زمنية مكونة أصلا جديداً أول الفترة الزمنية التالية يكون دائما أكبر من الأصل السالف (فى الفترة الزمنية السابقة) والذى يستثمر أو يستغل خلال هذه الفترة الزمنية .... وهكذا .

وحتى يتجلى لنا معنى الفائدة المركبة نتصور معا كيفية حساب جملة مبلغ قدره ١٠٠٠ جنيه تم إيداعه فى بنك مصر – فرع طنطا لمدة ثلاث سنوات بمعدل فائدة مركبة ٥% سنويا وذلك من خلال حركة الحسابات التالية :

– **الفترة الزمنية الأول** (السنة الأولى)

أصل المبلغ المستثمر = ١٠٠٠ جنيه

الفائدة المستحقة فى نهاية السنة الأولى = ٥٠ جنيه

الجملة فى نهاية السنة الأولى = ١٠٥٠

– **الفترة الزمنية الثانية** (السنة الثانية)

أصل المبلغ المستثمر فى أول السنة الثانية = ١٠٥٠ جنيه

الفائدة المستحقة فى نهاية السنة الثانية = ٢٥,٥

الجملة فى نهاية السنة الثانية = ١١٠٢,٥ جنيه

– **الفترة الزمنية الثالثة** (السنة الثالثة)

أصل المبلغ المستثمر فى أول السنة الثالثة = ١١٠٢,٥ جنيه

الفائدة المستحقة فى نهاية السنة الثالثة = ٥٥,١٢٥ جنيه

الجملة فى نهاية السنة الثالثة = ١١٥٧,٦٢٥ جنيه

من حركة الحسابات السالفة للمبلغ المستثمر خلال ٣ سنوات يتبين لنا أن الفائدة المركبة تحسب على رأس المال الجديد فى كل فترة (رأس المال فى الفترة السابقة + الفائدة المستحقة فى الفترة السابقة) والذى يعتبر بمثابة جملة رأس المال فى الفترة السابقة .

ومن ثم يمكن القول بأن الفائدة المركبة ماهى إلا تطبيق متكرر للفائدة البسيطة حيث تتزايد بصفة دائبة لاسيما إذا زادت فترة الاقتراض أو الاستثمار لذا فقد قال عنها بارون روتشايلد Baron Rothschild (أحد رجال المال الأغنياء فى العالم أنها الاعجوبة الثامنة Eighth Wonder (علاوة على عجائب الدنيا السبع) وقد يعزى قوله لما لاحظه من زيادة مبلغ رأس المال الاصلى إلى زيادة كبيرة جداً بعد فترة زمنية معينة عندما يتم ايداعه بفائدة مركبة .

فعلى سبيل المثال مبلغ ١٠٠٠ جنيه بمعدل فائدة مركبة ١٠% سنويا تصبح قيمته بعد ١٠٠ عم مبلغ قدره ١٣٧٨٠٦١,٢ جنيه أى مليون وثلاث مائة ثمانية وسبعون وواحد وستون جنيها وعشرون قرشاً .

وعلى ذلك يمكن من مفهومنا السابق لكل من الفائدة البسيطة والفائدة المركبة أن نحصر أوجه الشبه والاختلاف بينهما فيمايلى :

١ – أن كليهما يعتبر بمثابة عائد على رأس المال المقترض أو المستثمر .

٢ – أنهما متساويان فى نهاية الفترة الزمنية الأولى .

٣ – أنهما مختلفان ابتداء من نهاية الفترة الزمنية الثانية حيث أن قيمة الفائدة البسيطة تظل ثابتة من فترة زمنية إلى أخرى خلال مدة الاقتراض أو الاستثمار فى حين فيمة الفائدة المركبة تتزايد من فترو زمنية لأخرى وهذا يعزى إلى تزايد رأس المال الأصلى بمقدار الفوائد المضافة إليه فى نهاية كل فترة زمنية .

والجدير بالذكر أن العناصر الرئيسية الثلاث التى حددت بها قيمة الفائدة البسيطة فى الجزء الأول من هذا الكتاب وهى رأس المال الاصلى المستثمر أو المقترض والذى يرمز له بالرمز "أ" ومدة الاستثمار أو الاقتراض والتى يرمز لها بالرمز "ن" ومعدل الفائدة والذى يرمزه له بالرمز "ع" هى نفس العناصر التى تحدد بها قيمة الفائدة المركبة غير ان الفائدة المركبة – بخلاف الفائدة البسيطة – تتأثر بتزايد رأس المال الاصلى فترة بعد أخرى خلال مدة الاقتراض أو الاستثمار .

وعلى ذلك فإن رأس المال لا يعتبر – فى الفائدة المركبة – عنصر ثابت بل عنصر متغير فى حد ذاته وبتغير بتغير الفائدة المركبة ذاتها .

٢ – القانون الرئيسى لحساب الفائدة المركبة

Compound Interest Equation

حيث أن الفائدة المركبة تتحدد بنفس عناصر الفائدة البسيطة وهى رأس المال الأصلى (أ) ، ومدة الاستثمار أو الاقتراض (ن) ، ومعدل الفائدة (ع) لذا

يمكن إستخدام نفس هذه الرموز للوصول إلى القانون الرئيسى لحساب الفائدة المركبة (ف) وذلك كمايلى :

بفرض أن رأس المال الأصلى "أ" استثمر أو أقتراض لمدة زمنية معينة ولتكن "ن" بمعدل فائدة مركبة "ع" عن الفترو الزمنية فإن القانون الرئيسى لحساب الفائدة المركبة يمكن الوصول إليه فى نهاية ن من الفترات الزمنية بنفس الطريقة التى بيناها سالفا فى حالة الفائدة البسيطة عن طريق حساب فائدة كل فترة زمنية على حده ثم إضافة كل الفوائد لبعضها فتنتج الفائدة المركبة والتى يرمز لها بالرمز (ف) كما هو مبين فيمايلى :

الفترة الزمنية الأولى :

أصل المبلغ المقترض أو المستثمر = أ

∴ فائدة الفترة الزمنية الأولى = ف$_{١}$ = أ × ع × ع = أ ع

، الأصل فى نهاية الفترة الزمنية الأولى = أ$_{١}$ = أ + ف$_{١}$ = أ + أ ع

= أ (١+ع)

الفترة الزمنية الثانية

أصل المبلغ المقترض أو المستثمر = أ (١+ع)

∴ فائدة الفترة الزمنية الثانية = ف$_{٢}$ = أ (١+ع) ×١ × ع

= أع(١+ع)

، الأصل فى نهاية الفترة الزمنية الأولى = أ$_{٢}$ = أ$_{١}$ + ف$_{٢}$

= أ(١+ع) + أع (١+ع) = أ (١+ع) (١+ع) = أ (١+ع)^{٢}

الفترة الزمنية الثالثة

أصل المبلغ المقترض أو المستثمر = أ (١+ع)^{٢}

∴ فائدة الفترة الزمنية الثالثة = ف$_{٣}$ = أ (١+ع)^{٢} ×١ × ع

= أع(١+ع)^{٢}

، الأصل فى نهاية الفترة الزمنية الثالثة = أ$_{٣}$ = أ$_{٢}$ + ف$_{٣}$

= أ(١+ع)^{٢} + أع (١+ع)^{٢} = أ (١+ع)^{٢} (١+ع) = أ (١+ع)^{٣}

وهكذا حتى :

الفترة الزمنية الأخيرة نجد أن :

الأصل أول الفترة الزمنية الأخيرة = أ (١+ع)$^{ن-١}$

∴ فائدة الفترة الزمنية الأخيرة = ف ن = أ (١+ع)$^{ن-١}$ × ١ × ع = أع (١+ع)$^{ن-١}$ وعلى ذلك تكون قيمة الفائدة المركبة (ف) هى :

ف = $\sum_{ر=١}^{ن}$ ف ر = ف$_{١}$ + ف$_{٢}$ + ف$_{٣}$ + ... + ف$_{ن}$

= أع + أع (١+ع) + أ (١+ع)٢ + ...+ أع (١+ع)ن−١

= أع [١+ (١+ع) + (١+ع)٢ + ... + (١+ع)ن−١]

= أع [مجموع متوالية هندسية حدها الأول واحد وأساسها (١+ع) وعدد حدودها ن]

$$= \text{أ ع [الحد الأول} \times \frac{(\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}} - ١}{(\text{الأساس}) - ١}]$$

$$= \frac{\text{أع} [(١+\text{ع})^{\text{ن}} - ١]}{(١+\text{ع}) - ١}$$

$$= \frac{\text{أع} [(١+\text{ع})^{\text{ن}} - ١]}{\text{ع}}$$ بقسمة البسط والمقام على ع ينتج أن :

$$\boxed{\text{ف} = \text{أ} (١+\text{ع})^{\text{ن}} - ١} \qquad (١)$$

والمعادلـة (١) تمثـل القـانون الرئيسـى لحسـاب الفائـدة المركبـة حيـث بمقتضـاها يمكن تحديد جملـة الجنيه الواحد بفائدة مركبة بمعدل فائدة ع فـى نهاية ن من الفترات الزمنية وهو $(١+ع)^{ن}$.

ويطـرح قيمـة الأصـل والـذى يعـادل واحـد جنيـه مـن جملـة الواحـد بفائـدة مركبة تنتج قيمة الفائدة المركبة للجنيه الواحد $[(١+ع)^{ن} - ١]$.

وبضرب قيمة الفائدة المركبة للجنيه الواحد $[(١+ع)^{ن} - ١]$ × قيمة أصل المبلـغ المقتـرض أو المستثـمر ينـتج قيمـة الفائـدة المركبـة لهـذا الأصـل [أ $(١+ع)^{ن}-١$] .

٣ – القانون الرئيسى لحساب الجملة بالفائدة المركبة

هناك طريقتان للوصول إلى القانون الرئيسى للجملة بفائدة مركبة وهما :

الطريقة المباشرة :

وهذه الطرقة تعتمد على المعادلة (١) للفائدة المركبة السالف الحصول عليها وذلك بإشتقاق القانون الرئيسى للجملة منها كالآتى :

حـ = أ + ف

الجملة بالفائدة المركبة (جـ) = أ + أ $[(١+ع)^{ن} - ١]$

= أ $[(١+ع)^{ن} - ١]$

= أ $(١+ع)^{ن}$

∴ القانون الرئيسى للجملة بالفائدة المركبة هو :

$$\boxed{\text{حـ} = \text{أ}\ (١+ع)^{ن}} \qquad (٢)$$

أى أن : الجملة بالفائدة المركبة = أصل المبلغ المقترض أو المستثمر × جملة الجنيه الواحد بفائدة مركبة .

ومن ثم **نستخلص أن** : معادلتى الفائدة المركبة والجملة المركبة من جنس واحد حيث يمكن الوصول إلى إحداهما بمعلومية الأخرى فضلاً عن ذلك فهما يحتويان على ٤ عناصر إذا عرفنا ثلاثة منها مكن بمقتضى مبادئ الجبر البسيطة الوصول إلى قيمة العنصر الرابع المجهول .

لهذا **ينوه المؤلف** بأنه من الأيسر استخدام معادلة الجملة فى حل غالبية التمرينات لأنها تحتوى على عدد حدود أقل بالمقارنة بمعادلة الفائدة .

٤ – المعادلات المشتقة من معادلتى الفائدة المركبة والجملة المركبة

إذا أمعنا النظر فى معادلة الفائدة المركبة (١) ومعادلة الجملة المركبة (٢) لوجدناهما يحتويا على أربعة عناصر إذا علم ثلاثة منها يمكن معرفة العنصر الرابع المجهول لذا يمكن اشتقاق كل عنصر من عناصر أى المعادلتين بمعلومية بقية العناصر الآخرى .

فعلى سبيل المثال معادلة الجملة $\text{حـ} = \text{أ}(١+\text{ع})^{\text{ن}}$ يمكن إشتقاق منها عدة معادلات لحساب العناصر المكونة لها كما هو مبين فيمايلى :

(أ) عند اشتقاق الاصل تصبح معادلة الجملة فى الصورة الآتية :

$$\text{حـ}\ \text{أ}\ (١+\text{ع})^{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{\text{حـ}}{(١+\text{ع})^{\text{ن}}} \qquad (٣)$$

(ب) عند اشتقاق المدة تصبح معادلة الجملة فى الصورة الآتية :

$$(١+\text{ع})^{\text{ن}} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن :

$$\text{ن لو } (١+\text{ع}) = \text{لو حـ} = \text{لو أ}$$

$$\text{لو حـ} - \text{لو أ}$$

ن = $\frac{\quad}{\text{لو } (١+ع)}$ (٤)

(جـ) عند اشتقاق المعدل تصبح معادلة الجملة فى الصورة الآتية :

حـ = أ (١+ع)ن

∴ (١+ع) ن = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن :

ن لو (١+ع) = لو حـ = لو أ

∴ لو (١+ع) = $\frac{\text{لو حـ} - \text{لو أ}}{\text{ن}}$

∴ (١+ع) = العدد المقابل لناتج الطرف الايسر

ع = العدد المقابل – ١ (٥)

ملحوظة هامة :

ينوه المؤلف بأن على القارئ أو الطالب الإلمام التام فقط بالمعادلتين (١) ، (٢) وكيفية التعويض فيهما للوصول إلى أى عنصر مجهول إذا علم العناصر الأخرى .

٥ – طرق حساب الجملة والفائدة المركبة بأى مبلغ

عند حساب الجملة والفائدة المركبة لأى مبلغ نجد أننا بصدد حساب جملة الجنيه (١+ع)ن فذا فهناك عدة طرق مختلفة لحساب جملة الجنيه بفائدة مركبة (١+ع)ن تنحصر فيمايلى :

١ – طريقة الضرب العادى (الضرب المباشر) .

٢ – طريقة استخدام مفكوك نظرية ذات الحدين .

٣ – طريقة استخدام اللوغاريتمات المعتادة .

٤ – طريقة استخدام الآلة الحاسبة .

٥ – طريقة استخدام الجداول المالية (جداول الفائدة المركبة) .

ويمكن إلقاء الضوء على كل طريقة من الطرق السالفة بالتطبيق على المثال التالى :

مثال (١) :

أوجد فائدة وجملة مبلغ قدره ١٠٠٠ جنيه استثمره شخص فى بنك مصر – فرع طنطا بمعدل فائدة مركبة ٤% سنويا لمدة ٣ سنوات بالطرق المختلفة السابقة .

الحلول

١ – الحل بإستخدام طريقة الضرب العادى (الضرب المباشر)

وهذه الطريقة تقتضى وقتاً وجهداً كبيرين لاسيما إذا زادت قيمة ن حيث تتعقد العمليات الحسابية لهذا فإنها لا تستخدم فى الحياة العملية .

وحل المثال السابق بهذه الطريقة يتبلور فيمايلى :

حـ ن = (١+ع)ن

= ١٠٠٠ (١+٠٤ر)٣ = ١٠٠٠ × (١,٠٤ × ١,٠٤ × ١,٠٤)

= ١٠٠٠ × ١,١٢٤٨٦٤ = ١١٢٤,٨٦٤ = ١١٢٥ جنيه تقريباً

، الفائدة المركبة = حـ – أ

∴ الفائدة المركبة = ١١٢٤,٨٦٤ – ١٠٠٠ = ١٢٤,٨٦٤ جنيه

أو يمكن حساب الفائدة المركبة بمقتضى المعادلة : ف=أ [(١+ع)ن– ١

والجدير بالذكر أن قيمة ن صغيرة حيث ن = ٣ لذا أمكن الحل بطريقة الضرب العادى أما إذا كانت ن كبيرة على سبيل المثال ن = ٣– فإنه من الصعوبة إستخدام هذه الطريقة .

(٢) الحل بإستخدام مفكوك نظرية ذات الحدين

وهذه الطريقة هى الأخرى تتطلب وقتاً وجهداً فضلا عن الإلمام التام بنظرية ذات الحدين لذا فمن النادر استخدامها فى الحياة العملية .

ويتبلور حل المثال السابق بهذه الطريقة فيمايلى :

حـ = أ (١+٤٠ر)٣

= ١٠٠٠ [١ + ٣ ق١ × (٤٠ر) + ٣ق٢ × $(٤٠ر)^{٢}$ + ٣ق٣ × $(٤٠ر)^{٣}$]

= ١٠٠٠ [١+ ١٢ر+ ٠٠٤٨ر+ ٠٠٠٠٦٤ر] = ١٠٠٠× ١,١٢٤٨٦٤

= ١١٢٤,٨٦٤ = ١١٢٥ جنيه تقريباً

وتحسب الفائدة بنفس الطريقة فى الحل السابق .

وطريقة ذات الحدين كما يتضح من حل المثال تتطلب عمليات حسابية كثيرة ومعقدة حيث يتم فك المقدار $(١+ع)^{ن}$ إلى عدد من الحدود = ن+١ لذا إذا كانت ن = ٣٠ فإن حدود المفكوك = ٣١ حداً لهذا تتسم بالصعوبة .

(٣) الحل بإستخدام طريقة اللوغاريتمات المعتادة

وهذه الطريقة تتطلب نوعين من الجداول الأول جداول اللوغاريتمات والنوع الآخر جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات كما أن إستخدامها ينجم عنه نتائج تقريبية فقط لهذا من النادر إستخدام جداول اللوغاريتمات فى الحياة العملية لاسيما بعد ظهور الآلة الحاسبة التى تحوى لوغاريتمات الأعداد ، الأعداد المقابلة لها .

ويتبلور حل المثال (١) بطريقة اللوغاريتمات المعتادة كما هو مبين فيمايلى :

حـ = ١٠٠٠ $(١,٠٤)^{٣}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن :

لو حـ = لو ١٠٠٠ + ٣ لو ١,٠٤

= ٣,٠٠ + ٣ × ٠١٧٠ر (بإستخدام جداول اللوغاريتمات)

لو حـ = ٣,٠٥١

وبإستخدام جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن :

حـ = ١١٢٥ جنيه

وتحسب الفائدة بمقتضى المعادلة ف = حـ – أ

(٤) الحل بإستخدام الآلة الحاسبة

بعد أن أتسم العصر الذى نعيش فيه بتقدم هائل فى مجال الالكترونيات باتت الآلة الحاسبة تحوى الكثير من العمليات الرياضية لدرجة تمكنها من إجراء كافة العمليات الرياضية والإحصائية المعقدة بسهولة ويسر ، لهذا أصبحت الطرق السابقة (١ ، ٢ ، ٣) ضئيلة الاستخدام فى ظل وجود آلة حاسبة متطورة حيث لايمكن للفرد سواء العادى أو المتخصص إجراء عمليات حسابية بها (الطرق ١ ، ٢ ، ٣) وهو معه آلة حاسبة .

من هنا ينبغى على الطالب أو القارئ أن يعرف استخدام الآلة الحاسبة بالإطلاع على الكتيب Manual الملحق بها عند شرائها حيث تحوى هذه الكتيبات على أمثلة توضيحية يتم الاسترشاد بها عند استخدام الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية .

ويمكن إيجاز خطوات استخدام الآلة الحاسبة العادية فى إيجاد جملة الجنيه الواحد بفائدة مركبة $(١+ع)^{ن}$ لتكون مرشداً للطالب فيمايلى :

خطوة (١) كتابة الأرقام التى تمثل (١+ع) على الشاشة فمثلا إذا كان معدل الفائدة المركبة ٤% فيكتب ١,٠٤ .

خطوة (٢) يضغط على الزر INV .

خطوة (٣) يضغط على الزر الذى عليه Xy .

خطوة (٤) يكتب الرقم الذى يمثل ن فإذا كانت ن = ٣ فيكتب الرقم ٣ .

<u>خطوة (٥)</u> يضغط على الزر = فيظهر الناتج النهائى على شاشة الآلة الحاسبة .

ويمكن تجريب هذه الخطوات لحل المثال السابق كما هو موضح فيمايلى :

$$ح = ١٠٠٠ (١+٠٤ر)^{٣} = ١٠٠٠ (١,٠٤)^{٣}$$

= ١٠٠٠ × ١,١٢٤٨٦٤ = ١١٢٤,٨٦٤ جنيه

أما ف = ١١٢٤,٨٦ – ١٠٠٠ = ١٢٤,٨٦٤ جنيه

(٥) الحل بإستخدام الجداول المالية (جداول الفائدة المركبة)

بإلقاء الضوء على الطرق السالفة نجد أن البعض منها صعب ويستدعى عمليات حسابية طويلة فضلا عن أنها تحتاج إلى وقت وجهد كبيرين لاسيما إذا كانت "ن" كبيرة كما أن البعض من هذه الطرق وعلى وجه الخصوص طريقة اللوغاريتمات تعطى نتائج تقريبية فقط نتيجة لأن الجداول الشائعة بين أيدى لا تحتوى إلا على أربعة أو خمسة أرقام معنوية فى حين أن العمليات الحسابية فى الفائدة المركبة غالبا تتعلق بمبالغ كبيرة ومدد طويلة .

من ثم وتسهيلاً لإيجاد جملة الجنيه بفائدة مركبة أى $(١+ع)^{ن}$ فقد تم حساب ذلك فى جداول يطلق عليها "جداول الفائدة المركبة" وقد قام المؤلف أثناء دراسته بلندن بإعداد برنامج كمبيوتر لتكوين جداول للفائدة المركبة بمعدلات تتراوح بين % و ٣٠% حيث تتلاءم هذه المعدلات مع واقع الحياة العملية . لاسيما بعد ارتفاع الأسعار وتأثيرها على سوف المال والتجارة إلا أنه نظراً لضيق المكان فإننا نضمن الجداول الملحقة بهذا الكتاب بعض هذه المعدلات عن وحدات زمن تتراوح من ١ إلى ٦٠ وحدة زمنية – وهذه الجداول مجمعة فى جداول واحد تحت المعدلات المختلفة بمعنى أن الجداول حسبت

على أساس كل معدل على حدة ووضعت فى صفحة مستقلة (أنظر ملحق الكتاب) .

العمود الأول من هذه الجداول مخصص للمدة والتى تمثل عدد السنوات أو عدد وحدات الزمن المتفق على إضافة الفائدة إلى الأصل فى نهايتها .

العمود الثانى (الجداول الأول) مخصص لجملة الجنيه الواحد أى $(١+ع)^{ن}$ عن مدة قدرها "ن" ومعدل فائدة مركبة قدره "ع" ومن الجدير بالذكر أنه يوجد جدول ملحق بآخر الجداول المالية لحساب جملة الجنيه بالمعدلات المختلفة عن شهور السنة (من شهر حتى ١١ شهر) وأيضاً جملة الجنيه عن يوم واحد وسوف نشير إلى بقية الأعمدة الأخرى (الجداول الأخرى) فى حينها عند شرحنا لبقية موضوعات الفائدة المركبة .

لهذا يمكن حل المثال السابق بإستخدام جداول الفائدة المركبة كالآتى :

حـ = $١٠٠٠ (١,٠٤)^{٣}$

= ١,١٢٤٨٦×١٠٠٠ – من جدول جملة الجنيه تحت ع = ٤% وأمام ن=٣

= ١١٢٤,٨٦ جنيهاً

وتحسب الفائدة بنفس الطريقة السابقة بمقتضى المعادلة ف = حـ – ونستخلص مما سلف الملاحظات التالية :

١ – أن بعض طرق حساب جملة الجنيه الواحد بفائدة مركبة $(١+ع)^{ن}$ صعبة على وجه الخصوص طريقة اللوغاريتمات وطريقة ذات الحدين وطريقة الضرب المباشر لاسيما إذا كانت ن كبيرة لذا فيمكن للطالب الاستغناء عنها عند حل التمارين .

٢ – أن الطريقتان الاخريتان هما "طريقة استخدام الآلة الحاسبة"، "وطريقة الجداول المالية" سهلة الاستخدام غير أن الطريقة الأولى (بإستخدام الآلة الحاسبة) تستدعى معرفة الاستخدام الحسن للآلة الحاسبة بعد قراءة جيدة

للأمثلة التوضيحية الكائنة بالكتيب Manual المرفق بها وفى هذه الحالة يمكن للطالب استخدام الآلة الحاسبة فى حل أى تمارين اللهم إذا ذكر استخدام الجداول المالية .

أما الطريقة الأخرى وهى "إستخدام الجداول المالية" فهى تيسر العمليات الحسابية فضلا عن توفير الوقت والجهد خاصة عند عدم توافر الآلة الحاسبة حيث تتسم هذه الجداول بسهولة استخدامها إلا إنه على الرغم من ذلك فإنه قد يصعب أحياناً إستخدامها لاسيما إذا كانت معدلات الفائدة أو الفترات الزمنية الواردة فى التمارين غير مدرجة بالجداول المالية مما يقتضى على الطالب دراسة طرق أخرى (سوف يتم دراستها بعد ذلك) تمكن من استخدام الجداول المالية فى مثل هذه الحالات .

والجدير بالذكر إن إستخدام الجداول المالية يقتضى أن يكون معدل الفائدة والمدة من جنس واحد بمعنى أنه إذا كان المعدل سنوى فلابد تكون المدة بالسنوات أما إذا كانت المدة ليست بالسنوات فلابد من إجراء بعض العمليات الحسابية قبل استخدام هذه الجداول . حيث يفترض أن الجداول المالية يتم إعدادها على اعتبار أن الفترات الزمنية "ن" تتفق فى طبيعتها مع فترات إضافة الفائدة إلى الأصل أى مع معدلات الفائدة (وهذا سوف يتم إيضاحه بالتفصيل بعد ذلك) .

هذا وسوف نستخدم الجداول المالية فى حل الأمثلة التوضيحية وتمارين هذا الجزء من الكتاب مع إستخدام طريقة الآلة الحاسبة فى الحالات التى يتعذر استخدام الجداول المالية .

٦ – حساب الجملة والفائدة المركبة فى حالة إضافة الفائدة فى نهاية وحدات زمنية غير سنوية .

من الشائع أن تضاف الفائدة إلى الأصل فى نهاية كل سنة إلا إنه قد يحدث أحيانا أن تضاف الفائدة المركبة فى نهاية وحدات زمنية أكبر أو أقل من السنة بمعنى آخر أن الفائدة قد تعلى إلى الأصل فى نهاية وحدات ومنية أقل من السنة أو أكثر منها وهذا يترتب عليه أنه لابد من توائم معدل الفائدة مع وحدات الزمن لذا :

١ – إذا ذكر أن معدل الفائدة المركبة عن وحدات زمنية أكثر أو أقل من سنة فيجب تحويل مردة الاستثمار أو الاقتراض من سنوات إلى وحدات زمنية تكون من نفس وحدة زمن المعدل فمثلاً إذا كان معدل الفائدة ٢% عن كل ٣ شهور وكانت مدة الإقتراض ٥ سنوات فإنه يجب تعديل المدة لكى تتلائم مع المعدل .

أى المدة هنا = ٥× ٤ = ٢٠ وحدة زمنية ربع سنوية .

٢ – إذا ذكر أن معدل الفائدة سنوى أى عن سنة والفائدة تعلى أكثر من مرة فى العام فهذا يترتب عليه أنه لابد من :

(أ) تحويل المعدل السنوى المعطى لنا والذى يطلق عليه المعدل الإسمى Nominal Rate إلى معدل آخر يتمشى مع وحدة الزمن التى تضاف الفائدة إلى الأصل فى نهايتها ويطلق على هذا المعدل بالمعدل الحقيقى Effective Rate ويتم هذا بقسمة المعدل السنوى الإسمى على عدد مرات تعلية الفائدة فمثلا إذا ذكر أن المعدل السنوى الإسمى هو ٨% والفائدة تضاف كل ٦ شهور فإن المعدل النصف سنوى (المعدل الحقيقى) = $\frac{\%٨}{٢}$ = ٤% كذلك إذا كانت الفائدة تضاف كل ٣ شهور فإن المعدل الربع سنوى = $\frac{\%٨}{٤}$ = ٢% وإذا كانت الفائدة تضاف كل شهر فإن المعدل الشهرى = $\frac{\%٨}{١٢}$ = $\frac{\%٢}{٣}$

(ب) تحويل مدة الإقتراض أو الإستثمار إلى وحدات زمنية تتمشى مع وحدات الزمن التى تضاف الفائدة إلى الأصل فى نهايتها ويتم هذا بضرب المدة بالسنوات × عدد مرات الإضافة فى السنة فعلى سبيل المثال إذا كانت المدة ٨ سنوات والفائدة تضاف كل ٣ شهور فإن عدد وحدات الزمن = ٨ × ٤ = ٣٢ وحدة زمنية وإذا كانت الفائدة تضاف كل شهر فإن عدد وحدات الزمن = ٨ × ١٢ = ٩٦ وحدة زمنية .

ويمكن توضيح ما سبق من خلال الأمثلة الآتية :

مثال (٢)

إستثمر شخص فى أحد البنوك مبلغ قدره ١٥٠٠٠ جنيه المدة ٨ سنوات والمطلوب حساب كل من الجملة المركبة والفائدة المركبة إذا علمت أن :

أ – معدل الفائدة المركبة ١٠% عن كل سنتين .

ب – معدل الفائدة المركبة ٧% عن كل نصف سنة .

الحل

(أ) حساب الجملة والفائدة المركبة بإستخدام معدل الفائدة ١٠% عن كل سنتين :

المعدل ١٠% عن كل سنتين يعنى أن الفائدة تضاف إلى الأصل مرة كل سنتين – لذا فيجب أن يتم تعديل مدة القرض إلى وحدات زمنية تتمشى مع المعدل وهذا يتم بقسمة مدة القرض على الفترة التى تضاف الفائدة إلى الأصل فى نهايتها (سنتين) وذلك كالآتى :

$$\text{مدة القرض} = \frac{\text{٨ سنوات}}{\text{٢}} = \text{٤ وحدات زمن كل منها سنتين}$$

$\text{حـ} = \text{أ}\ (\text{١}+\text{ع})^{\text{ن}}$

∴ الجملة المركبة = ١٥٠٠٠ (١,١٠)^{٤} (بالكشف فى جداول الفائدة المركبة)

= ١٥٠٠٠ × ١,٤٦٤١٠ = ٢١٩٦١,٥ جنيهاً

من جداول الفائدة المركبة تحت ع = ١٠% وأمام ن = ٤

وبالتالى فإن :

الفائدة المركبة = الجملة–الأصل = ٢١٩٦١,٥ – ١٥٠٠٠ = ٦٩٦١,٥ جنيهاً

(ب) حساب الجملة والفائدة المركبة بإستخدام معدل الفائدة ٧% عن كل نصف سنة :

وفى هذه الحالة أيضا ينبغى تحويل مدة القرض إلى وحدات زمنية تلائم معدل الفائدة والذى يضاف كل نصف سنة .

لذا فإن مدة القرض = ٨ × ٢ = ١٦ وحدة زمنية كل منها نصف سنة.

∴ الجملة المركبة = ١٥٠٠٠ (١,٠٧)^{١٦}

= ١٥٠٠٠ × ٢,٩٥٢١٦ = ٤٤٢٨٢,٤ جنيهاً

من جداول الفائدة المركبة تحت ع ٧% وأمام ن = ١٦

∴ الفائدة المركبة = ٤٤٢٨٢,٤ – ١٥٠٠٠ = ٢٩٢٨٢,٤ جنيه

مثال (٣)

أودع محمد عثمان مبلغ قدره ٦٠٠٠ جنيها فى أحد البنوك بمعدل ١٥% سنويا فإذا علمت أن الفائدة تضاف كل ٤ شهور فإحسب جملة ماله فى نهاية مدة ٥ سنوات .

الحل

عدد مرات إضافة الفائدة إلى الأصل ٣ مرات فى السنة .

المعدل الحقيقى = $\frac{١٥\%}{٣}$ = ٥% عن ٤ شهور

المدة = ٥× ٣ = ١٥ وحدة زمنية كل منها ٤ شهور

حـ = أ (١+ع)^ن

جملة ما لدى محمد عثمان فى نهاية ٥ سنوات = ٦٠٠٠ × (١,٠٥)^١٥

= ٦٠٠٠ × ٢,٠٧٨٩٣ = ١٢٤٧٣,٥٨ جنيهاً .

وخلاصة القول

ينبغى على الطالب قبل حل أى تمرين من تمارين الفائدة المركبة أن ينظر إلى مدى التوافق بين وحدات زمن المدة والمعدل وإضافة الفائدة والتى قد تنحصر فى ثلاث حالات هى :

الحالة الأولى : توافق كل من وحدة زمن المدة مع وحدة زمن المعدل ووحدة زمن إضافة الفائدة .

فى هذه الحالة لا يبدوا أية مشكلة حيث يتم تطبيق قانون الجملة المركبة مباشرة دون أى تعديل .

على سبيل المثال : عند حساب جملة مبلغ ١٠٠٠ جنيه استثمرها شخص فى بنك مصر لمدة ٥ سنوات بمعدل فائدة مركبة ١٠% سنويا فإن الجملة تحسب مباشرة بتطبيق القانون : أى حـ = ١٠٠٠ (١,١٠)^٥ لأن المدة بالسنوات والمعدل سنوى والفائدة تضاف سنوياً .

الحالة الثانية : تفاوت وحدة زمن المدة عن وحدة زمن المعدل ووحدة زمن إضافة الفائدة وفى هذه الحالة ينبغى أولا تحويل المدة إلى وحدات زمن تتفق وع وحدات زمن المعدل ووحدة زمن إضافة الفائدة .

على سبيل المثال : عند حساب جملة مبلغ ١٠٠٠ جنيه استثمرها شخص فى بنك مصر لمدو ٨ سنوات بمعدل فائدة مركبة ٥% عن كل نصف

سنة فإن الجملة المستحقة تحسب لعد تحويل المدة إلى وحدات زمن تتوائم مع وحدة زمن المعدل ووحدة زمن إضافة الفائدة (كل نصف سنة) كمايلى :

المدة = ٨ × ٢ = ١٦ وحدة زمن كل منها نصف سنة .

وبالتالى فالجملة تحسب بتطبيق القانون أى : حـ = ١٠٠٠ $(١,٠٥)^{١٦}$

أما إذا كان المعدل ٥% كل سنتين فإن الجملة تحسب بعد حساب المدة = $\frac{٨}{٢}$ = ٤

وحدات زمن كل منها سنتان أى : حـ = ١٠٠٠ $(١,٠٥)^{٤}$

<u>**الحالة الثالثة :**</u> تفاوت وحدة زمن المعدل مع وحدة زمن إضافة الفائدة :

وفى هذه الحالة يجب على الطالب التفرقة عما إذا كانت وحدة زمن إضافة الفائدة أكبر أو أصغر من وحدة زمن المعدل كمايلى :

أ – إذا كانت وحدة زمن إضافة الفائدة أكبر من وحدة زمن المعدل

فى هذه الحالة لابد من تحويل المعدل المعطى لنا وهو المعدل الاسمى السنوى إلى معدل حقيقى ثم بعد ذلك تحويل المدة إلى وحدات تتمشى مع وحدة زمن المعدل الحقيقى .

<u>على سبيل المثال :</u> عند حساب جملة ١٠٠٠ جنيه استثمرها شخص فى بنك مصر لمدة ٨ سنوات بمعدل الفائدة مركبة ٥% سنويا وتضاف الفائدة كل سنتين . فإن الجملة المستحقة تحسب بعد :

أ – تحويل المعدل الاسمى ٥% إلى معدل حقيقى وذلك بضربه × ٢ .

أى المعدل الحقيقى ٥ × ٢ = ١٠% عن كل سنتين .

ب – تحويل المدة ٨ سنوات بقسمتها على ٢ .

أى المدة = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ وحدات كل منها سنتان .

لذا فالجملة المستحقة = ١٠٠٠ $(١,١٠)^{٤}$

ب – إذا كانت وحدة زمن إضافة الفائدة أصغر من وحدة زمن المعدل

فى هذه الحالة لابد من تحويل المدة إلى وحدات زمن من نفس جنس وحدة زمن إضافة الفائدة ثم بعد ذلك تحويل المعدل الاسمى إلى معدل يتمشى مع وحدة زمن إضافة الفائدة إلى الاصل .

على سبيل المثال : عند حساب جملة ١٠٠٠ جنيه استثمرها شخص فى بنك مصر لمدة ٨ سنوات بمعدل فائدة مركبة ٦% سنويا مع إضافة الفائدة إلى الأصل آخر كل شهرين . فإن الجملة المستحقة تحسب بعد :

أ – تحويل المدة ٨ سنوات وذلك بضربها × ٤

أى المدة = ٨ × ٦ = ٣٢ وحدة زمن كل منها شهرين .

ب – تحويل المعدل الاسمى ٥% إلى معدل يتمشى مع وحدة زمن إضافة الفائدة إلى الأصل وذلك بقسمته على عدد مرات الإضافة .

أى المعدل الحقيقى = $\frac{٦\%}{٦}$ = ١% كل شهرين

لذا فإن : الجملة المستحقة = ١٠٠٠ $(١,٠١)^{٣٢}$

٧ – المعدل الإسمى والمعدل الحقيقى

Nominal Rate & Effective Rate

من شرحنا السالف للبند "٦" يتبين لنا أن معدل الفائدة المركبة الذى يتغير قيمته بتغير عدد مرات إضافة أو تعلية الفائدة إلى الأصل يطلق عليه المعدل الاسمى أما إذا تم تحويل المعدل الأخير إلى معدل جديد يتمشى أو يتوافق مع وحدات الزمن (الفترات الزمنية) التى تضاف الفائدة الى الأصل فى نهايتها فإن هذا المعدل يطلق عليه المعدل الحقيقى .

ويعرف المعدل الحقيقى بأنه "الزيادة الفعلية لكل وحدة من وحدات النقود المقترضة أو المستثمرة عن سنة كاملة" .

والجدير بالذكر أن المعدل الحقيقى بزيد عن المعدل الاسمى وفقا لعدد مرات إضافة أو تعلية الفائدة على الأصل فى السنة .

من ثم يمكن للقارئ معرفة الفرق بين المعدل الاسمى والحقيقة من خلال المثالين التوضيحيين الآتيين :

المثال التوضيحى الأول :

بفرض أن معدل الفائدة المركبة ٨% سنويا والفائدة تضاف إلى الأصل مرتين فى السنة فهذا المعدل هو المعدل الاسمى أما معدل الفائدة الحقيقة المقابل له هو ٤% عن نصف سنة وهذا بلا ريب أكبر من ٨% سنوياً .

المثال التوضيحى الثانى :

بفرض أن معدل الفائدة السنوى ٦% والفائدة تضاف إلى الأصل ٤ مرات فى السنة فإن جملة الفائدة المركبة لـ ١٠٠ جنيه فى نهاية السنة تحسب كمايلى :

جملة ١٠٠ جنيه فى نهاية السنة = ١٠٠ $(١ + \frac{٦\%}{٤})^{٤}$

= ١٠٠ $(١,٠١٥)^{٤}$ = ١٠٦,١٣٦٤ جنيه

، قيمة الفائدة فى نهاية السنة = ١٠٦,١٣٦٤ – ١٠٠ = ٦,١٣٦٤ جنيه

وبالتالى فإن :

معدل الفائدة الحقيقى = ٦,١٣٦٤% بينما المعدل الاسمى = ٦% كما تبين لنا سالفاً

وخلاصة القول أنه ينبغى بعد بيان الفرق بين المعدل الحقيقى السنوى والمعدل الاسمى إيضاح العلاقة بينهما وكيفية حساب احدهما بمعلومية الآخر . حيث لهذه العلاقة أهمية خاصة لاسيما فى الايام المعاصرة (عهد الخصخصة) والتى تحاول فيها البنوك حذب العملاء لاستثمار أموالهم فيها

وذلك بعرض معدلات فائدة واحدة إلا أن عائدها مختلف نتيجة تفاوت عدد مرات إضافة الفائدة إلى الأصل فى السنة حيث كلما زادت عدد مرات الإضافة فى السنة زاد بالتالى معدل الفائدة الحقيقى .

ثانياً : التمارين التدريبية على الفصل الأول

(١) إحسب الفائدة المركبة والجملة لمبلغ قدره ٤٠٠٠ جنيه بمعدل فائدة مركبة ١٠% سنويا فى كل من الحالات الآتية :

أ – إذا كانت المدة ٤ سنوات والفائدة تضاف كل ٣ شهور .

ب – إذا كانت المدة ٥ سنوات و٣ شهور .

جـ – إذا كانت المدة ٤ سنوات والفائدة تضاف كل ٤٥ يوماً .

(٢) إقترض شخص مبلغ ٢٠٠٠ جنيه من بنك مصر فرع طنطا لمدة ٩ سنوات . والمطلوب : حساب كل من الجملة والفائدة المركبة فى الحالتين التاليتين :

أ – إذا كان معدل الفائدة ١٢% عن كل ٣ سنوات .

ب – إذا كان معدل الفائدة ١٢% والفائدة تضاف كل ٤ شهور .

(٣) إحسب الجملة المركبة عند استثمار عشرين الفا من الجنيهات بمعدل فائدة ١٢% ولمدة ٨ سنوات إذا علمت أن الفائدة تضاف إلى الاصل .

أ – كل سنة ب – كل ستة شهور جـ – كل أربعة شهور

(٤) إستثمر أسامة محمد مبلغاً ما فى بنك الاسكندرية – فرع كفر الشيخ بفائدة بسيطة بمعدل قدره ٥% سنويا المدة ٣ سنوات – فإذا علمت أنه لو

استثمر نفس المبلغ وبنفس المعدل ولنفس المدة بفائدة مركبة ستزيد الفائدة المركبة على الفائدة البسيطة فى نهاية المدة بمبلغ قدره ١٥,٢٥ جنيه – فما هو قيمة المبلغ الذى استثمره أسامة محمد ؟ .

(٥) استثمر شخص مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى البنك الاهلى – فرع كفر الشيخ لمدة ١٠ سنوات بمعدلات فائدة مركبة سنوية ٥% خلال الثلاث سنوات الأولى ، ٨% خلال السنتين الرابعة والخامس ، ١٠% خلال الخمس سنوات الخيرة . المطلوب : حساب رصيد هذا الشخص فى نهاية المدة المذكورة .

(٦) إقترض همام محمد همام مبلغ ما من بنك النيل لمدة ٥ سنوات فإذا علمت أن جملة هذا المبلغ قدرت بـ ٣٤٤٠,٠١٣ جنيه وذلك على أساس معدل فائدة مركبة ٤,٢% سنوياً . المطلوب : حساب أصل المبلغ المقترض .