الفهرس

لفصل الثاني   توازن المستهلك :

2-1 المدخل التقليدي

أو المدخل القياسي والذي يرجع إلى الاقتصادي مارشال فان لكل مستهلك دالة المنفعة حيث يستمد المستهلك منفعته من عدد الوحدات التي يحصل عليها من السلع المختلفة كأي إن دالة المنفعة يمكن التعبير عنها رياضيا كالأتي : $U = \phi(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, Xn)$

حيث U تمثل المنفعة الكلية $X_1, X_2, \ldots. X_n$ الوحدات التي يحصل عليها المستهلك من السلع المختلفة . وافترض مارشال إن المنفعة الحدية موجبة (حيث لا يفكر الفرد في شراء ما يسبب له ألما) ولكن تتناقص بمعنى ان استمرار المستهلك في شراء سلعة ما سوف يؤدي إلى تناقص المنفعة الحدية

$$MU_{xi} = \frac{\partial U}{\partial xi} > 0 \quad \to Ui \qquad i = 1,2,\ldots\ldots.n$$

وان .. 2

$$\frac{\partial(MU_{xi})}{\partial Xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial xii} < 0 \quad \to Uii \qquad i = 1,2,\ldots\ldots.n$$

كما افترض ان المنفعة ممكن قياسها رقميا وان منفعة السلع المختلفة مستقلة عن بعضها البعض . فلو كان دخل المستهلك I وأسعار السلع المختلفة $(P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n)$حيث P_iسعر السلعة Xi فان قيد الدخل the income (budged)constraint يمكن التعبير عنه كالأتي $I = \sum_{i=1}^{n} PiXi \quad \to I = P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots + PnXn$ وبافتراض إن السلع يمكن شراؤها بأي كمية كانت مهما كانت هذه الكمية صغيرة فان مشكلة المستهلك تصبح محاولة تحقيق أقصى منفعة في حدود دخلة . إي إن مشكلة المستهلك تعظيم دالة المنفعة $U = \phi(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, Xn))$طبعا للقيد

$\Psi = I - \sum_{i=1}^{n} PiXi \quad \to I - P_1X_1 - P_2X_2 - \ldots - PnXn$ ويمكن حل المشكلة باستخدام دالة لاجرانج فيصح لدينا : $L = \phi(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, Xn)) + \lambda\left(I - \sum_{i=1}^{n} PiXi\right)$

حيث L تمثل دالة لاجرانج .اي ان الدالة ليمكن كتابتها كالتالي $L = \phi(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, Xn)) + \lambda(I - P_1X_1 - P_2X_2 - \ldots - PnXn)$

ويتطلب الشروط الضرورية لتحقيق النهاية العظمى ما يلي :

$$L_1 = \frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{\partial \phi}{\partial X_1} - \lambda P_1 \quad = 0$$

$$L_2 = \frac{\partial L}{\partial X_2} = \frac{\partial \phi}{\partial X_2} - \lambda P_2 \quad = 0$$

.

.

$$L_n = \frac{\partial L}{\partial X_n} = \frac{\partial \phi}{\partial X_n} - \lambda P_n \quad = 0$$

$$\Psi = L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - \sum_{i=1}^{n} PiXi \quad = 0$$

حيث λ تمثل مضاعف لاجرانج

وواضح إن الشرط الضروري تعطي عدد n + 1 من المعادلات في n + 1 من المجاهيل بأحد الطرق المعروفة لحل المعادلات الآتية للحصول على قيم $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, Xn \quad, \lambda$ عند التوازن . إما الشرط الكافي فانه يتطلب إن تحمل محددات هيشيان المطوقة $\overline{H}_2 > 0, \overline{H}_3 < 0, .\overline{H}_4 > 0$

$$\overline{H}n = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} & \Psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L2n & \Psi 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} & \Psi_n \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_n & 0 \end{vmatrix}$$

إذا كانت n عدد زوجي فان قيمة المحددة موجب إما كانت n عدد فردي فان قيمة المحددة سالب حيث

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial X_1^{\;2}} \ldots. L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} \cdots L_{1n} = \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_n} \quad \ldots \Psi_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial X_1} .. \Psi_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} .. \Psi_n = \frac{\partial \Psi}{\partial X_n}$$

حيثψ تمثل القيد ويمكن إثبات إن المستهلك يحقق التوازن (إي يحقق أقصى منفعة ممكنة) عندما $\frac{MU_1}{P_1} = \frac{MU_2}{P_2} = \frac{MU_n}{P_n} = MUmony = \lambda$

إي يتحقق التوازن طبقا للمدخل التقليدي عندما تتساوى المنفعة الحدية الى السعر بالنسبة الى كل السلع مع المنفعة الحدية للنقود او بصورة اخرى حاصل قسمة المنفعة الحدية على السعر متساوية لكل السلع ويمكن إثبات ذلك بالسهولة بالرجوع إلى الشرط الضروري للتوازن حيث .....

$$L_1 = \frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{\partial \phi}{\partial X_1} - \lambda P_1 \quad = 0 \to \frac{\partial \phi}{\partial X_1} = \lambda P_1 \quad \to \quad \frac{\partial \phi}{\partial X_1} = \phi_1 \to \frac{\phi_1}{P_1} = \lambda$$

$$L_2 = \frac{\partial L}{\partial X_2} = \frac{\partial \phi}{\partial X_2} - \lambda P_2 \quad = 0 \to \frac{\partial \phi}{\partial X_2} = \lambda P_2 \quad \to \quad \frac{\partial \phi}{\partial X_2} = \phi_2 \to \frac{\phi_2}{P_2} = \lambda$$

.

$$L_n = \frac{\partial L}{\partial X_n} = \frac{\partial \phi}{\partial X_n} - \lambda P_n \quad = 0 \to \frac{\partial \phi}{\partial X_n} = \lambda P_n \quad \to \quad \frac{\partial \phi}{\partial X_n} = \phi_n \to \frac{\phi_n}{P_n} = \lambda$$

$$\frac{\phi_1}{P_1} = \frac{\phi_2}{P_2} = \ldots\ldots.. = \frac{\phi_n}{P_n} = \lambda$$

حيث λ تمثل المنفعة الحدية للنقود واثبات ذلك:

نفترض إن دالة المنفعة هي :$U = \phi(X_1, X_2))$ ونفترض ان قيد الدخل $I = P_1 X_1 + P_2 X_2$ من دالة المنفعة نحصل على التفاضل الكلي

$$dU = \phi_1 \; dX_1 + \phi_2 dX_2 \to \phi_1 = \lambda P_1 \to \phi_2 = \lambda P_2 \Rightarrow dU = \lambda P_1 \; dX_1 + \lambda P_2 dX_2 \to dU = \lambda (P_1 \; dX_1 + P_2 dX_2)$$

$$dI = P_1 \; dX_1 + dP_1 \; X_1 + p_2 dX_2 + dp_2 X_2 \to dP_1 = dP_2 = 0 \quad \Rightarrow dI = P_1 \; dX_1 \; + p_2 dX_2 \quad \to \frac{dU}{dI} = \frac{\lambda (P_1 \; dX_1 + P_2 dX_2)}{P_1 \; dX_1 \; + p_2 dX_2} = \lambda$$

<u>مثال :</u>

نفترض إن دالة المنفعة التالية **...** $U = -2x_1 x_2 - 2.5 x_1^{\;2} + 0.5 x_2^{\;2} - 4 x_3^{\;2} + 29.5 x_3 \; + 25 x_1$

وقيد الدخل هو :- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 25$

<u>فالمطلوب</u> : تحديد الكميات التوازنية التي تحقق للمستهلك التوازن

$$L = -2x_1 x_2 - 2.5 x_1^{\;2} + 0.5 x_2^{\;2} - 4 x_3^{\;2} + 29.5 x_3 \; + 25 x_1 + \lambda (25 - X_1 - 2X_2 - 3X_3)$$

$L_1 = -2X_2 - 5X_1 + 25 - \lambda = 0$ ➔ $L_{11} = -5 \; L_{12} = -2 \; L_{13} = 0$

$L_2 = -2X_1 + X_2 - 2\lambda = 0$ ➔ $L_{21} = -2 \; L_{22} = 1 \; L_{23} = -2$ $L_3 = -8X_3 + 29.5 - 3\lambda = 0$ ➔ $L_{31} = 0 \; L_{32} = 0$ $L_{33} = -8$

$L\lambda = 25 - X_1 - 2X_2 - 3X_3 = 0$ ➔ $\Psi_1 = -5 \; \Psi_2 = -10 \; \Psi_3 = -4$

$$\overline{H}_3=\begin{vmatrix}-5 & -2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -8 & -3\\ -1 & -2 & -3 & 0\end{vmatrix}=-7\rightarrow \overline{H}x_1=\begin{vmatrix}-25 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ -29.5 & 0 & -8 & -3\\ -25 & -2 & -3 & 0\end{vmatrix}=-17.5\rightarrow X_1=\frac{-17.5}{-7}=2.5$$

وتكون $$\overline{H}x_2=\begin{vmatrix}-5 & -25 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -29.5 & -8 & -3\\ -1 & -25 & -3 & 0\end{vmatrix}=-42\rightarrow X_1=\frac{-42}{-7}=6 \quad \overline{H}x_3=\begin{vmatrix}-5 & -2 & -25 & -1\\ -2 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -29.5 & -3\\ -1 & -2 & -25 & 0\end{vmatrix}=-24=\frac{-24}{-7}=3.5$$

$$L_1=-2(6)-5(2.5)+25=\lambda\rightarrow \quad \lambda=0.5 \qquad \overline{H}_2=\begin{vmatrix}-5 & -2 & -1\\ -2 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 0\end{vmatrix}=11$$

المنفعة الكلية عند نهايتها القصوى مساوية .. U = 89.125

ويمكن إثبات أن التوازن يتحقق عندما ..

المنفعة الحدية للنقود = المنفعة الحدية x1 = المنفعة الحدية x2 = المنفعة الحدية x3

PX_3 $\quad$ PX_2 $\quad$ PX_1

ويجب ملاحظة انه إذا كانت دالة الهدف دالة في عدد N من المتغيرات وتخضع لعدد M من القيود بحيث N>M فن الشرط الكافي لتحقيقي النهاية العظمى يتطلب أن تحمل محددة هيشيان المطوقة (بأكثر من قيد) H^N الإشارة $(-1)^n$ وتحمل المحددة H^N-1 إشارة مخالفة لإشارة H^N بينما تحمل المحددة H^N-2 إشارة مخالفة لإشارة المحددة H^N-1 وهكذا ...

2-2 مدخل منحنيات السواء

طبقا لهذا المدخل ، لا يستطيع المستهلك أن يقيس المنفعة التي يحصل عليها من استهلاك أو امتلاك السلع بصورة رقمية ولكن في استطاعته أن يقرر أي مجموعة من السلع يفضل . فالمنفعة طبقا لهذا المدخل يمكن قياسها ترتيبيا وليس رقميا .فيمكن رسم خريطة لكل مستهلك تعرف بخريطة ..حيث يمثل كل منحنى من هذه الخريطة مقدارا ثابتا من الإشباع أو المنفعة ، وعليه يعرف بمنحنى سواء إذ أن كل نقطه على هذا المنحنى تمثل نفس درجة الإشباع وعليه فان المستهلك يكون على السواء بالنسبة لدرجة الإشباع عند النقاط المختلفة على نفس المنحنى وان اختيار نقطة بالذات إنما يدل على تفضيل المستهلك لخليط السلع التي تمثلها هذه النقطة .وعليه فإنه يمكننا أن نفترض أن لكل فرد تفضيلا محددا للسلع التي ينفق عليها دخله فلو كان هناك سلعتان X1 , X2 لأمكن التعبير عن المنفعة على منحنى سواء معين كالأتي .. $U = U^-$ ثابت أو $U = U(X_1 , X_2) = $ CONSTANT أي أن المنفعة على أي منحنى سواء تكون ثابتة CONSTANT ، ويحصل المستهلك على منفعة اكبر فقط إذا انتقل إلى منحنى سواء أعلى .* وعليه فانه يمكن التعبير عن ثبات درجة الإشباع أو المنفعة على منحنى السواء الواحد كالأتي : $DU = 0$ $DU = \partial U/\partial X1\ DX1 + \partial U/\partial X2\ DX2 = 0$ ويمكن استخدام هذه المعادلة في استنتاج معدل الإحلال الحدي بين السلعتين والذي يقيس الكمية المطلوبة من السلعة , x2 لتعويض النقص الحدي من السلعة x1 حتى يبقى على نفس مستوى الإشباع . وعليه فإن معدل الإحلال الحدي يقيس ميل منحنى السواء ويعبر عنه رياضيا كالأتي

$r = MRS = Dx_2/Dx_1$ وبالتعويض في المعادلة DU نحصل على $R = -\partial U/\partial x1 \div \partial U/\partial x2$ أي أن معدل الإحلال الحدي بين السلعتين X1 X2 يساوي سالب نسبة المنفعة الحدية للسلعة X1 إلى المنفعة الحدية للسلعة X2 ولما كانت المنفعة الحدية لأي سلعة موجبة فإن معدل الإحلال الحدي يكون سالبا أو بمعنى أخر يكون ميل منحنى السواء سالب ، أي أن منحنيات السواء تنحدر من أعلى إلى أسفل نحو اليمين .

3-2 تناقص المنفعة ومعدل الإحلال الحدي

سوف نثبت علاقة هامة وهي أن تناقص المنفعة لا يعني منحنيات السواء تكون مقعرة من اسفل كما أن تقعير منحنى السواء هذا لا يعني تناقص المنفعة الحدية لنفترض دالة المنفعة الآتية..$U = \varnothing(X_1 , X_2)$ فيمكن اشتقاق $\partial U/\partial x_1 = \varnothing_1 \Rightarrow \partial U/\partial x_2 = \varnothing_2 \Rightarrow \partial^2 U/\partial x^2 1 = \varnothing_{11} \Rightarrow \partial^2 U/\partial x^2 2 = \varnothing_{22} \Rightarrow \partial^2 U/\partial x1 \partial x2 = \varnothing_{12} = \varnothing_{21}$ ونفترض أن المنفعة الحدية موجبة أو : $\varnothing 2 > 0$ $\varnothing 1 > 0$ تناقص المنفعة

معناه $\varnothing_{22} < 0$ $\varnothing_{11} < 0$ تقعر منحنى السواء(من أسفل) معناه : $DR/DX1 > 0$ وهذا سبق إن أثبتنا إن: $R = DX2/DX_1 = -MU_1/MU_2 = \varnothing_1/\varnothing_2$ وعليه

$$\frac{dr}{dX_1}=\frac{d\left(-\dfrac{\phi^1}{\phi_2}\right)}{dX_1}>0$$

فان تقعر منحنى السواء معناه :

أي إن :

$$\frac{dr}{dX_1} = -\frac{\phi_2\left[\phi_{11}\frac{dX_1}{dX_1} + \phi_{12}\frac{dX_2}{dX_1}\right] + \phi_1\left[\phi_{21}\frac{dX_1}{dX_1} + \phi_{22}\frac{dX_2}{dX_1}\right]}{\phi_2^{\ 2}} > 0 \rightarrow\rightarrow \frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{\phi_1}{\phi_2}$$

$$\frac{dr}{dX_1} = -\frac{\phi_2\left[\phi_{11} + \phi_{12}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)\right] + \phi_1\left[\phi_{21} + \phi_{22}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)\right]}{\phi_2^{\ 2}} > 0 \rightarrow = -\frac{\phi_2\phi_{11} - \phi_1\phi_{12} + \phi_1\phi_{21} \ - \frac{\phi_1^{\ 2}\phi_{22}}{\phi_2}}{\phi_2^{\ 2}} > 0$$

$$\frac{dr}{dX_1} = -\frac{\phi_2^{\ 2}\phi_{11} - \phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_1\phi_{21} \ - \phi_1^{\ 2}\phi_{22}}{\phi_2^{\ 3}} > 0 \rightarrow \frac{dr}{dX_1} = -\frac{+2\phi_1\phi_2\phi_{12} - \phi_2^{\ 2}\phi_{11} - \phi_1^{\ 2}\phi_{22}}{\phi_2^{\ 3}} > 0$$

وواضح من هذه المعادلة الاخيره أن تناقص المنفعة ($Ø_{22} < 0$, $Ø_{11} < 0$) لا يحقق بالضرورة تقعر منحنى السواء حيث أن $Ø_{12}$ قد تكون سالبة . كما يتضح من المعادلة الاخيره إن تقعر منحنى السواء ليس بالضرورة معناه تناقص المنفعة الحدية لان dr / Dx_1 قد تكون موجبة رغم إن $Ø_{11}$ أو $Ø_{22}$ أو كل منهما تكون موجبا أيضا وذلك إذا كانت $Ø_{1\,2}$ موجبة وكانت $2\,Ø_1Ø_2\,Ø_{12}$ $(Ø_1^2\,Ø_{22} - Ø_2^2\,Ø_{11}) > 0$ -

2-4 مرونة منحنى السواء

تعرف مرونة منحنى السواء بأنها معدل التغير النسبي في السلعتين . $\eta = [-\partial u / \partial x_1 / \partial u / \partial x_2] \cdot x_1/x_2$

أي إن : مرونة منحنى السواء = المنفعة الحدية للسلعة (1) = كمية السلعة (1)

المنفعة الحدية للسلعة (2) كمية السلعة (2)

فلو افترضنا دالة المنفعة : $u = 2 \ X_1^{1\backslash 4} X_2^{\ 3\backslash 4}$

لحصلنا على مرونة السواء كالآتي : $\eta = -x_2 / 3x1 \ . \ x1 / x2 = -1/3$

2-5 توازن المستهلك طبقا لمدخل منحنيات السواء ومدلولاته

طبقا لهذا المدخل يحاول المستهلك ذو الدخل المحدد إن يصل إلى أعلى منحنى سواء على خريطة السواء وذلك في حدود إمكانياته المالية ويتحقق التوازن عند النقطة التي يصبح فيها ميل خط الدخل مساويا لسالب ميل منحنى السواء إلا ان ميل خط الدخل تمثله النسبة بين سعري السلعتين أو.p_1/p_2وميل منحنى السواء (كما سبق ان رأينا) يمثله معدل الإحلال الحدي (r) . وعلية يتحقق التوازن عندما $r = p_1/p_2$

كما إن ميل منحنى السواء يمكن التعبير عنه كالآتي $r = -Mu_1 \backslash Mu_2$

أي ان التوازن طبقا لمدخل منحنيات السواء يتحقق عندما تكون

المنفعة الحدية للسلعة (أ)= سعر السلعة (أ)

المنفعة الحدية للسلعة (ب) سعر السلعة (ب)

وهو نفس الشرط التي توصلنا إليه بإتباع المدخل التقليدي لتوازن المستهلك . إلا إن هناك فورقات شاسعة بين مدلولات التوازن طبقا لكل من المدخلين . وسوف نعالج بشيء من التفصيل مدلولات التوازن بالنسبة لمدخل منحنيات السواء .

أ) المدلول الأول

يتزايد معدل الإحلال الحدي بين السلعتين بالقرب من نقطة التوازن كلما حلت سلعة محل سلعة اخرى . لإثبات هذه الخاصية من خصائص توازن المستهلك طبقا لمدخل منحنيات السواء نفترض ان دالة المنفعة هي $U = ø\,(X1, X2)$ وان قيد الدخل هو : $I = P_1X_1 + P_2X_2$ حيث P_1, P_2 يمثلان سعري السلعتين X_1, X_2 على الترتيب .

باستخدام دالة لاجرانج ...$L = ø\,(x_1, x_2) + \lambda\,(I - P_1X_1 - P_2X_2)$

$$\partial L / \partial x_1 = ø1 - \lambda\, P_1 = 0$$

$$\partial L / \partial x_2 = ø_2 - \lambda\, P_2 = 0$$

$\partial L / \partial \lambda = (I - P_1X_1 - P_2 X_2$

ومن هذه الشروط نحصل على : $\emptyset_1 / P_1 = \emptyset_2 / P_2 = \lambda \rightarrow \emptyset_1 / \emptyset_2 = P_1 / P_2$ حيث $\emptyset i$ تمثل المنفعة الحدية للسلعة i أي

وحيث λ تمثل المنفعة الحدية للنقود $\lambda = du / dI$ وواضح ان الشروط أعلاه هي نفس الشروط التي حصلنا عليها من المدخل التقليدي

إما الشرط الكافي لتحقيق توازن المستهلك فيتطلب ان تكون محددة هيشيان المطوقة موجبة او ..

$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \Psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \Psi_2 \\ \Psi_1 & \Psi_1 & 0 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \overline{H}_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & P_1 \\ L_{21} & L_{22} & P_2 \\ P_1 & P_1 & 0 \end{vmatrix} > 0 = \overline{H}n = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & & L_{1n} & \Psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L2n & \Psi 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} & \Psi_n \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_n & 0 \end{vmatrix}$$

$L_{12} = \emptyset_{12} L_{21} = \emptyset_{21}$ $L_{22} = \emptyset_{22}$ $\psi_1 = -p_1\psi_1 = -p_2 L_{11} = \emptyset_{11}$ بحل هذه المحددة نحصل على $0 >$ $(P_1^2 \emptyset_{22} - 2P_1^2 + P_2^2 \emptyset_{11})$

و لكن سبق إن رأينا إن التغير في معدل الإحلال الحدي R بالنسبة للسلعة X1 يساوي

$$\frac{dr}{dX_1} = \frac{d\left(-\frac{\phi^1}{\phi_2}\right)}{dX_1} > 0$$

$$\frac{dr}{dX_1} = -\frac{\phi_2\left[\phi_{11}\frac{dX_1}{dX_1} + \phi_{12}\frac{dX_2}{dX_1}\right] + \phi_1\left[\phi_{21}\frac{dX_1}{dX_1} + \phi_{22}\frac{dX_2}{dX_1}\right]}{\phi_2^{\ 2}} > 0 \rightarrow\rightarrow \frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{\phi_1}{\phi_2}$$

$$\frac{dr}{dX_1} = -\frac{\phi_2\left[\phi_{11} + \phi_{12}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)\right] + \phi_1\left[\phi_{21} + \phi_{22}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)\right]}{\phi_2^{\ 2}} > 0 \rightarrow = -\frac{\phi_2\phi_{11} - \phi_1\phi_{12} + \phi_1\phi_{21} - \frac{\phi_1^{\ 2}\phi_{22}}{\phi_2}}{\phi_2^{\ 2}} > 0$$

$$\frac{dr}{dX_1} = -\frac{\phi_2^{\ 2}\phi_{11} - \phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_1\phi_{21} - \phi_1^{\ 2}\phi_{22}}{\phi_2^{\ 3}} > 0 \rightarrow \frac{dr}{dX_1} = -\frac{+2\phi_1\phi_2\phi_{12} - \phi_2^{\ 2}\phi_{11} - \phi_1^{\ 2}\phi_{22}}{\phi_2^{\ 3}} > 0$$

وبتعويض قيمة $\emptyset 1$ و $\emptyset 2$ عند التوازن أي بتعويض : $\lambda\, p1 =$ $\emptyset 1$ و $\lambda\, p2 =$ $\emptyset 2$

$$\frac{dr}{dX_1} = -\frac{+2\phi_1\phi_2\phi_{12} - \phi_2^{\ 2}\phi_{11} - \phi_1^{\ 2}\phi_{22}}{\phi_2^{\ 3}} > 0 \rightarrow\rightarrow \frac{dr}{dX_1} = -\lambda\frac{+2P_1P_2\phi_{12} - P_2^{\ 2}\phi_{11} - P_1^{\ 2}\phi_{22}}{P_2^{\ 3}} > 0 \rightarrow\rightarrow$$

ولما كانت ... $\emptyset 2 > 0$ $\lambda^2 > 0$ فإن dr/dx1 يكون موجبا إذا كانت p_1^2 $(\emptyset_{22} - 2p_1 p_2 \emptyset_{12} + p_2^2 \emptyset_{11}) < 0$ وقد أثبتنا أن محددة هيشيان تحقق ذلك وعندما يتحقق الشرط الكافي للتوازن . وعلية لابد وان يكون **dr/dx1** أي أن معدل الإحلال الحدي يتزايد كلما عوضنا من سلعة محل الأخرى . أو بمعنى أخر يكون منحنى السواء مقعرا (من أسفل)بالقرب من نقطة التوازن

المدلول الثاني

لا يؤثر تغير مقياس المنفعة في شرط التوازن طالما أن المقياس الجديد تحويله تزايدية مستمرة للمقياس الأصلي .يكون مقياس المنفعة F تحويله متزايدة مستمرة لمقياس المنفعة Ø أي أن : (F = G (Ø إذا كانت $G` > 0$ لإثبات هذا المدلول نفترض دالة المنفعة الآتية : U = G [Ø ( X 1 , X 2 ) ] حيث G تمثل تحويله متزايدة مستمرة للدالة Ø وحيث معامل التفاضل الأول `G ومعامل التفاضل الثاني ``G يمكن اشتقاقهما . والمطلوب تعظيم دالة المنفعة U بالنسبة للسلعتين X_1 , X_2 و بأخذ شرط القيد : $I = P_1 X_1 + P_2 X_2$ في الاعتبار (حيث p_1 يمثل سعر x_1 و p_2 يمثل سعر السلعة x2) وباستخدام دالة لاجرانج نحصل على .. $L = G [Ø (X_1 , X_2)] + \lambda^{*} (I – P_1 X_1 - P_2 X_2)$ وتعطي الشروط الضرورية للتعظيم ..

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{\partial G}{\partial \phi} \quad \frac{\partial \phi}{\partial X_1} - \lambda * P_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = \frac{\partial G}{\partial \phi} \quad \frac{\partial \phi}{\partial X_2} - \lambda * P_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda *} = I - P_1 X_1 - P_2 X_2$$

وطبقا لهذه الشروط : $\frac{\left(\frac{dG}{d\phi}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial Xi}\right)}{pi} = \lambda^{**} \quad \rightarrow I = \sum_{i=1}^{n} PiXi \rightarrow \frac{G'\phi i}{Pi} = \lambda^{**}$

وشروط التوازن هذي هي نفس الشروط التي حصلنا عليها سابقا إذا ما كانت ... $\lambda^{**} = \lambda \frac{dG}{d\phi} = \lambda G'$ ويمكن إثبات صحة هذه المعادلة فيما يلي : من شرط التوازن أعلاه حصلنا على : G` øi = λ˝ pi أو G ø2 = λ˝ p2 / G` / øi = λ˝ pi ومن شرط التوازن في الحالة العادية حصلنا على : øi = λ pi وعلية ... G` λ pi = λ˝ pi إذا ... G`λ =λ˝ وهو المطلوب إثباته ،..وتوضح المعادلة الاخيره أن المنفعة الحدية للنقود تتغير مع التغير في مقياس المنفعة ولكن إذا كانت المنفعة تقاس فقط ترتيبيا فان تغير مقياس المنفعة (ومن ثم المنفعة الحدية للنقود) لن يؤثر في الشروط الضرورية لتوازن المستهلك . ويمكن إثبات أن الشرط الكافي لن يتأثر أيضا نتيجة تغير مقياس المنفعة وبشرط أن يكون المقياس الجديد تزايدية مستمرة للمقياس الأصلي نبدأ أولا في حساب عناصر محددة هيشيان المطوقة كالأتي :

$L_{11} = G``Ø_1^2 + G`Ø_{11} \rightarrow L_{12} = G``Ø_1 Ø_2 + G`Ø_{12} \rightarrow L_{21} = G``Ø_1 Ø_2 + G`Ø_{21} \rightarrow L_{22} = G``Ø_2^2 + G`Ø_{22}$

$\psi = I – P_1 X_1 - P_2 X_2 \rightarrow \psi_1 = - P_1 \rightarrow \psi_2 = - P_2$

وتصبح محددة هيشيان مساوية

$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} \left(G''\phi_1^{\ 2} + G'\phi_{11}\right) & \left(G''\phi_1 \phi_2 + G'\phi_{12}\right) & -P_1 \\ \left(G''\phi_1 \phi_2 + G'\phi_{12}\right) & \left(G''\phi_2^{\ 2} + G'\phi_{22}\right) & -P_2 \\ -P_1 & -P_1 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ويكون المطلوب إثباته أن تغير مقياس المنفعة لن يؤثر في إشارة هذه المحددة .. بتعويض قيمة **..**(i = 1 , 2) $P_i = G`\text{ø}_i / \lambda˝$ أو $G`\text{ø}_i / p_i = \lambda˝$

$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} \left(G''\phi_1^{\ 2} + G'\phi_{11}\right) & \left(G''\phi_1 \phi_2 + G'\phi_{12}\right) & -\frac{G'\phi_1}{\lambda} \\ \left(G''\phi_1 \phi_2 + G'\phi_{12}\right) & \left(G''\phi_2^{\ 2} + G'\phi_{22}\right) & -\frac{G'\phi_2}{\lambda} \\ -\frac{G'\phi_1}{\lambda} & -\frac{G'\phi_2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

بضرب الصف الأخير والعمود الأخير في G`/ λ˝

يضرب الصف الأخير في ``G ø1 وإضافته للصف الأول وبضرب الصف الأخير في ``G ø2 وإضافته للصف الثاني نحصل على

$$\overline{H}_2=\left(\frac{\lambda^*}{G'}\right)^2 \begin{vmatrix} \left(G''\phi_1^{\,2}+G'\phi_{11}\right) & \left(G''\phi_1\phi_2+G'\phi_{12}\right) & -\phi_1 \\ \left(G''\phi_1\phi_2+G'\phi_{12}\right) & \left(G''\phi_2^{\,2}+G'\phi_{22}\right) & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{H}_2=\left(\frac{\lambda^*}{G'}\right)^2 \begin{vmatrix} G'\phi_{11} & G'\phi_{12} & -\phi_1 \\ G'\phi_{12} & G'\phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

وبتعويض $..G`\phi_2 = \lambda^{*}p_2 / G`$ $\phi_1 = \lambda^{*}p_1 / G`$ وبضرب الصف الاخير والعمود الخير في $G` / (\lambda^{*})$ نحصل على ...

$$\overline{H}_2= \begin{vmatrix} G'\phi_{11} & G'\phi_{12} & -P_1 \\ G'\phi_{12} & G'\phi_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}$$

بضرب العمود الاخير في `G وبقسمة الصفين الاول والثاني على `G نحصل على ..

$$\overline{H}_2= G' \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -P_1 \\ \phi_{12} & \phi_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} >$$

واضح أن هذه المحددة الاخيره لا تختلف عن محددة هيشيان المطوقة في الحالة العادية إلا أنها مضروبة في `G فإذا كانت $G` > 0$ سوف لا تتأثر إشارة المحددة ولن يتأثر الشرط الكافي للتوازن . وبالطبع تكون $G` > 0$ إذا كان مقياس المنفعة تحويله متزايدة باستمرار من المقياس الأصلي .

المدلول الثالث

لن يتأثر توازن المستهلك إذا حدث تغير نسبي متساوي في الدخل وكافة الأسعار ومعنى ذلك انه إذا تضاعف الدخل وتضاعفت كافة الأسعار في نفس الوقت ، لن يغير المستهلك من الكميات المطلوبة أو المشتراه من السلع المختلفة .لإثبات هذا المدلول نفترض

دالة المنفعة الآتية : $U = \phi (X_1 , X_2)$

ونفترض أن الدخل و الأسعار تغيرت بنسبة معينه α فإن قيد الدخل يصبح $..I^* = \alpha I = \alpha P_1X_1 + \alpha_2 P_2X_2$ وتعطي دالة لاجرانج:

$$L = \phi (X_1 , X_2) + \lambda [I^* - \alpha p_1x_1 - \alpha_2 p_2x_2]$$

وتكون الشروط الضرورية ..

$$\partial L /\partial x_1 = \phi_1 - \alpha \lambda^{**} P_1 = 0$$

$$\partial L /\partial x_2 = \phi_2 - \alpha \lambda^{**} P_2 = 0$$

$$\partial L /\partial = (I^* - \alpha P_1X_1 - \alpha P_2 X_2) = 0$$

وتعطي هذه الشروط :- $\alpha\sum_{i=1}^{n} PiXi = \alpha I$ $\phi 1 / \alpha P1 = \lambda^{**}$ $\phi 2 / \alpha P2 = \lambda^{**}$ أو $\phi 1 / P1= \lambda^{**}$ $\phi 2 / P2 = \alpha \lambda^{**}$

$\sum_{i=1}^{n} PiXi = I$ وواضح أن شروط التوازن هذه هي نفسها التي توصلنا إليها سابقا طالما أن $\lambda^{**} = \lambda/ \alpha$

أي طالما أن المنفعة الحدية للنقود عند التوازن تكون قد نقصت بنفس نسبة الزيادة في الأسعار والدخول . وعلية إن توازن المستهلك لن يتأثر إذا تغيرت الأسعار والدخل بنفس النسبة ولكن سوف يحدث هو تغير عكسي في المنفعة الحدية للنقود بنفس النسبة .

6-2 الأثر ألدخلي والأثر الاحلالي لتغير السعر

أن هناك أثرين منفصلين لتغير السعر للسلعة على الطلب عليها هما اثر الدخل واثر الإحلال وقد كان لهذا التقدم اثر هام على النظرية الاقتصادية من ناحيتين أصبح في الإمكان اشتقاق نظرية أكثر عموميه للطلب أصبح في الإمكان استخدام نفس أسلوب التحليل في شرح الكثير من الظاهر الاقتصادية نستخدم هذا الفصل بين اثر الدخل واثر الإحلال في اشتقاق دالة طلب عامة تمثل السلع العادية والسلع الرديئة (منها سلع جفن) نفترض دالتي المنفعة والدخل $I = P_1X_1 + P_2X_2$ $U = \emptyset(X_1, X_2)$

لتعظيم دالة المنفعة نستخدم دالة لاجرانج .. $L = \emptyset(X_1, X_2) + \lambda[\mathbf{I} - p_1x_1 - p_2x_2]$ وتعطي الشروط الضرورية للتوازن

$$\partial L/\partial x_1 = \phi_1 - \lambda P_1 = 0$$

$$\partial L/\partial x_2 = \phi_2 - \lambda P_2 = 0$$

$$\partial L/\partial \lambda = (I - P_1X_1 - P_2X_2) = 0$$

وباخذ التفاضل الكلي لكل معادلة نحصل على ..

$$\phi_{11}\,dx_1 + \phi_{12}\,dx_2 - p_1\,d\lambda = \lambda\,dp_1$$

$$\phi_{21}\,dx_1 + \phi_{22}\,dx_2 - p_2\,d\lambda = \lambda\,dp_2$$

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 = dI - x_1dp_1 - x_2dp_2$$

بحل هذه المعادلة أنيا نحصل على :

$$dX_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -P_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -P_2 \\ -dI + X_1dP_1 + X_2dP_2 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_{12} & -P_1 \\ \phi_2 & \phi_{22} & -P_2 \\ dP_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -P_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -P_2 \\ -dI + X_1dP_1 + X_2dP_2 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} = dX_{1(dI=dP_2)} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -P_1 \\ 0 & \phi_{22} & -P_2 \\ X_1dP_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2}$$

$$\frac{dX_{1(dI=dP_2)}}{dP_1} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \phi_{12} & -P_1 \\ 0 & \phi_{22} & -P_2 \\ X_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} = -\lambda\frac{P_2^{\,2}}{\overline{H}_2} + X_1\frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -P_1 \\ \phi_{22} & -P_2 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} \rightarrow dX_{1(dP1=dP_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \phi_{12} & -P_1 \\ 0 & \phi_{22} & -P_2 \\ dI & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} = \frac{dX_{1(dP1=dP_2)}}{dI} =_1 \frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -P_1 \\ \phi_{22} & -P_2 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2}$$

وتعطي هذه المعادلة أثر تغير السعر The price Effect ويطلق عليها معادلة سلوتسكي وبعدها اثر الدخل بافتراض ثبات الأسعار Slutsky Equation وتوضح المعادلة أن لتغير السعر أثران هما الأثر الاحلالي والاثر الدخلي dx_1/dI مضروبا في $(-x_1)$ ويمكن إثبات أن $\lambda p_2/\mathbf{H`_2}$ - يمثل الأثر الاحلالي فنفترض أن المستهلك يبقى على نفس منحنى السواء أي نفترض انه لا يوجد أي تغير في المنفعة أو درجة الإشباع . بمعنى أخر $du=0$ في هذه الحالة نحصل على . $du =$ وحيث انه عند التوازن: $\phi_1dx_1 + \phi_2dx_2 = 0$: $\emptyset_1 = \lambda p_1 = 0$ $\emptyset_2 = \lambda p_2 = 0$ فإنه $P_1dx_1 + p_2dx_2 = 0$ لكن من معادلة الدخل نحصل على $P_1x_1 + p_2$ $I = x_2$

$$dI = P_1dx_1 + x_1dp_1 + p_2\,dx_2 + x_2dp_2$$

$$-x_1dp_1 - x_2dp_2 = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 dI$$

فإن بقي المستهلك على نفس منحنى السواء وكانت $du = 0$ نحصل على: dI $-x_1dp_1 - x_2dp_2 = 0$ وبتعويض هذه المعادلة الاخيره في المعادلة (1)

$$dX_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -P_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -P_2 \\ -dI + X_1dP_1 + X_2dP_2 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} = dX_{1(du=dP_2)} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -P_1 \\ 0 & \phi_{22} & -P_2 \\ 0 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} = \frac{dX_{1(du=dP_2)}}{dp_1} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \phi_{12} & -P_1 \\ 0 & \phi_{22} & -P_2 \\ 0 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} = \frac{-\lambda P_2^{\,2}}{\overline{H}_2}$$

وهو الأثر الاحلالي ... ولما كانت $\lambda > 0$ (إذ لابد أن تكون المنفعة الحدية للنقود موجبة) $p2^2 > 0$ إن إشارة الأثر الإحلال يتوقف على إشارة $s`2$. وقد سبق أن أثبتنا أن هذه الإشارة لابد وان تكون موجبة إذا تحقق الشرط الكافي للتوازن .. بمعنى $\mathbf{0 <}$ $(dx_1/dp_1)_{du=0}$ أي أن الأثر الاحلالي لتغير السعر يكون

دائما سالبا . فإذا ارتفع سعر السلعة فان الطلب عليها يقل بسبب الأثر الاحلالي . والعكس صحيح ، ..أي أن الأثر الاحلالي لتغير السعر يؤدي دائما إلى علاقة عكسية بين الطلب والسعر . وقد كان أنصار المدخل التقليدي يعتقدون فقط في الأثر الاحلالي وعليه فانه طبقا لهذا المدخل تكون العلاقة بين الطلب والسعر لأي سلعة علاقة عكسية .إلا أن الأثر ألدخلي لتغير السعر قد يكون موجبا أو سالبا إذا يتوقف على إشارة dx_1/dI أي أن سالبيه الأثر الاحلالي لا نظمن بالضرورة عكسية العلاقة بين الطلب والسعر أي أنه ليس هناك ما يضمن أن منحنى الطلب سوف يتجه إلى أسفل نحو اليمين كما اعتقد التقليديون .ولما كان اثر التغير في السعر ، كما سبق أن رأينا ، يتحدد بالعلاقة الآتية ..

$$\frac{dX_{1(dI=dP_2)}}{dP_1} = -\lambda \frac{P_2^{\ 2}}{\overline{H}_2} + X_1 \frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -P_1 \\ \phi_{22} & -P_2 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2}$$

فانه يمكننا التميز بين ثلاث حالات ..

أ) **السلعة العادية** في هذه الحالة يكون الأثر الاحلالي سالب ويكون الأثر ألدخلي موجبا وعلية يكون الأثر ألسعري سالبا أي أن منحنى الطلب ينحدر إلى أسفل نحو اليمين

ب) **حالة السلع الرديئة (ولكن ليست من نوع جفن)**في هذه الحالة يكون الأثر الاحلالي سالبا ويكون الأثر ألدخلي أيضا سالبا أي أن القيمة المطلقة للأثر الاحلالي السالب تفوق القيمة المطلقة للأثر ألدخلي السالب مضروبا في (x1-) وعليه يكون الأثر ألسعري سالبا أ ي رغم أن الاثر ألدخلي سالب ، فأن قوة الأثر الاحلالي تؤدي إلى وجود علاقة عكسية بين السعر والطلب أي يتجه منحنى الطلب للسلع الرديئة (التي ليست من نوع جفن) إلى أسفل نحو اليمين .

ج) **سلعة جفن** في هذه الحالة يكون الأثر الاحلالي سالبا أي ...ويكون الأثر ألدخلي سالبا إلا أن القيمة المطلقة للأثر الاحلالي السالب تكون اقل من القيمة المطلقة للأثر ألدخلي السالب مضروب في (x1-) وعلية نحصل على علاقة موجبة بين السعر والطلب أو أي يتجه منحنى الطلب في حالة سلعة جفن إلى الأعلى نحو اليمين على عكس المنحنى المألوف أي أن قانون الطلب هنا غير ساري المفعول .. ومن ثم مدخل منحنيات السواء قد مكننا من استنتاج العلاقة بين السعر والطلب في كافة الحالات حتى الشاذة منها .

2-7 توازن المستهلك ومرونة الإحلال

تعرف مرونة الإحلال بين سلعتين x1 . x2إنها سالب التغير في النسب المستهلكة من السلعتين إلى التغير النسبي في نسب أسعارهما ويعبر عنها كالأتي ..

$$\sigma_{12} = -\frac{d\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)} \div \frac{d\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}$$

حيث ترمز σ_{12} إلى مرونة الإحلال ..من التوازن للمستهلك $Mu1 \backslash p_1 = Mu2 / p_2 = \lambda$

فإذا كان لدينا دالة المنفعة $u = \emptyset (X_1 , X_2)$ .. وكان قيد الدخل $I = P_1X_1 + P_2 X_2$ فإنه عند التوازن أي عند تعظيم المنفعة من شرط القيد في الاعتبار نحصل على $\frac{\phi_1}{p_1} = \frac{\phi_2}{p_2}\lambda \leftrightarrow \phi_1 = \lambda p_1 \Leftrightarrow \phi_2 = \lambda p_2$ بتعويض هذه القيم في معادلة المرونة نحصل على

$$\sigma_{12} = -\frac{d\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)} \div \frac{d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)} \to = \frac{d\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)} \times \frac{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}$$

$$d\left(\frac{X_1}{X_2}\right)=\frac{X_2dX_1-X_1dX_2}{X_2^{\ 2}}\to\to, d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)=\frac{\phi_1(\phi_{21}dX_1+\phi_{22}dX_2)-\phi_2(\phi_{11}dX_1+\phi_{21}dX_2)}{\phi_1^{\ 2}}$$

$$d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)=\frac{\phi_1\phi_{21}dX_1+\phi_1\phi_{22}dX_2-\phi_2\phi_{11}dX_1+\phi_2\phi_{21}dX_2}{\phi_1^{\ 2}}\to\sigma_{12}=\frac{d\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}\times\frac{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}$$

$$\sigma_{12}=-\frac{\phi_1\phi_2}{X_1X_2}\times\frac{X_2dX_1-X_1dX_2}{\phi_1\phi_{21}dX_1+\phi_1\ \phi_{22}dX_2-\phi_2\ \phi_{11}dX_1-\phi_2\phi_{21}dX_2}\to$$

$$=-\frac{\phi_1\phi_2}{X_1X_2}\times\frac{X_2\frac{dX_1}{dX_1}-X_1\frac{dX_2}{dX_1}}{\phi_1\phi_{21}\frac{dX_1}{dX_1}+\phi_1\ \phi_{22}\frac{dX_2}{dX_1}-\phi_2\ \phi_{11}\frac{dX_1}{dX_1}-\phi_2\phi_{12}\frac{dX_2}{dX_1}}\to r=\frac{dX_2}{dX_1}=\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)$$

$$=-\frac{\phi_1\phi_2}{X_1X_2}\times\frac{X_2-X_1\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}{\phi_1\phi_{21}+\phi_1\phi_{22}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)-\phi_2\phi_{11}-\phi_2\phi_{21}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}$$

$$=-\frac{\phi_1\phi_2}{X_1X_2}\times\frac{X_2\phi_2+X_1\phi_1}{-\phi_1\phi_2\phi_{21}+\phi_1^{\ 2}\phi_{22}+\phi_2^{\ 2}\phi_{11}-\phi_1\phi_2\phi_{21}}$$

$$=-\frac{\phi_1\phi_2}{X_1X_2}\times\frac{X_2\phi_2+X_1\phi_1}{\phi_1^{\ 2}\phi_{22}-2\phi_1\phi_2\phi_{21}+\phi_2^{\ 2}\phi_{11}}\to\overline{H}_2=\phi_1^{\ 2}\phi_{22}-2\phi_1\phi_2\phi_{21}+\phi_2^{\ 2}\phi_{11}$$

وهي معادلة مرونة الإحلال بين السلعتين عندما يكون المستهلك قد حقق أقصى إشباعا ممكنا ويمكن اختصار وتعميم المعادلة

$$\overline{H}^*_2=\begin{vmatrix}\phi_{11} & \phi_{12} & \phi_1\\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_2\\ \phi_1 & \phi_2 & 0\end{vmatrix}\to\overline{H}^{**}=(-1)\begin{vmatrix}\phi_{21} & \phi_2\\ \phi_1 & 0\end{vmatrix}$$

$$\sigma_{12}=\frac{d\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}{\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}\times\frac{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}\to=-\frac{\phi_1\phi_2}{X_1X_2}\times\frac{X_2\phi_2-X_1\phi_1}{\left(\phi_1^{\ 2}\phi_{22}-\phi_1\phi_2\phi_{12}+\phi_2^{\ 2}\phi_{11}\right)}$$

$$\sigma_{12}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Xi\phi i}{X_1X_2}\times\frac{\overline{H}^{**}_{12}}{\overline{H}^{*}_{2}}\to\sigma_{ij}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Xi\phi i}{X_iX_j}\times\frac{\overline{H}^{**}_{ij}}{\overline{H}^{*}_{n}}$$

1- إذا كانت $0\sigma ij\ >$ فإن السلعتين xj, xi تكونان سلعتين بديلتين أو متنافستين
2- إذا كانت $0<\sigma ij$ فإن السلعتين $xi\ , xj$ تكونان مكملتين .
3- إذا كانت $\sigma ij\ =\ 0$ فإن السلعتين تكونان محايدتين

مثال

حددي طبيعة العلاقة بين السلعتين x_1, x_2 إذا كانت دالة المنفعة $u = 1 - x_1^2\, x_2$.. وكان المستهلك في حالة توازن . قيمة مرونة الإحلال – حيث أن لدينا سلعتين فقط **$\phi_{12}=\phi_{21}=-2x_1$** **$\phi_{22}=0$** **$\phi_{11}=-2x_2$** , $\phi_1=-x_1^2$, $\phi_1=-2x_1x_2$

$$\overline{H}^*_2=\begin{vmatrix}-2X_2 & -2X_1 & -2X_1X_2\\ -2X_1 & -X_1 & -X_1^{\ 2}\\ -2X_1X_2 & -X_1^{\ 2} & 0\end{vmatrix}=-6X_1^{\ 4}X_2\to\overline{H}^{**}=(-1)\begin{vmatrix}-2X_1 & -X_1^{\ 2}\\ -2X_1X_2 & 0\end{vmatrix}=2X_1^{\ 2}X_2$$

$$\sum xi\ \phi i\ = x_1\ \phi_1 + x_2\ \phi_2$$

$$\sigma_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi\phi i}{X_1 X_2} \times \frac{\overline{H}^{**}{}_{12}}{\overline{H}^{*}{}_{2}} = \frac{-3X_1{}^2 X_2}{X_1 X_2} \times \frac{2X_1{}^3 X_2}{-6X_1{}^4 X_2} = -1$$

وعلية فإن السلعتين x_1 , x_2 تكونان متكاملتين ..

8-2 <u>العلاقة بين مرونة الإحلال ومرونة الطلب التقاطعية</u>

فإذا كان لدينا دالة المنفعة .. $u = Ø (X_1 , X_2)$ وكان قيد الدخل $I = P_1X_1 + P_2 X_2$

فإنه عند التوازن أي عند تعظيم المنفعة بعد اخذ شرط القيد في الاعتبار نحصل على $L = Ø (X_1 , X_2) + λ [M -p_1x_1 - p_2x_2]$

$$\partial L /\partial x_1 = \phi_1 - \lambda P_1 = 0$$

$$\partial L /\partial x_2 = \phi_2 - \lambda P_2 = 0$$

$$\partial L /\partial \lambda = (M - P_1X_1 - P_2 X_2) = 0$$

الشرط الكافي ...

$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -P_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ومن معادلات التوازن أعلاه نحصل على ...

$$\phi_{11}\, dx_1 + \phi_{12}\, dx_2 - p_1\, d\lambda = \lambda\, dp_1$$

$$\phi_{21}\, dx_1 + \phi_{22}\, dx_2 - p_2\, d\lambda = \lambda\, dp_2$$

$$p_1\, dx_1 + p2\, dx_2 = dI - x1dp_1 - x_2dp_2$$

باستخدام قاعدة كرا يمر ....

$$dX_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -P_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -P_2 \\ -dI + X_1 dP_1 + X_2 dP_2 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_{12} & -P_1 \\ \phi_2 & \phi_{22} & -P_2 \\ dP_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -P_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -P_2 \\ -dI + X_1 dP_1 + X_2 dP_2 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2}$$

ولو افترضنا ثبات سعر السلعة x1 وكذلك الدخل فانه يمكننا استنتاج التغير في الطلب على هذه السلعة بالنسبة لتغير سعر السلعة الأخرى ..أي بافتراض أن : $dp1 = dM = 0$

$$\frac{dX_{1(dI=dP1=0)}}{dp_2} 2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \phi_{12} & -P_1 \\ \lambda & \phi_{22} & -P_2 \\ X_2 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} = \frac{-\lambda \begin{vmatrix} \phi_{12} & -P_1 \\ -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} + X_2 \frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -P_1 \\ -\phi_{22} & -P_2 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2}$$

وعلية يمكن كتابة المعادلة dx/dp2 كالأتي : $\frac{dX_{1(dI=dP1=0)}}{dp_2} = \frac{-\lambda \overline{H}*_{21}}{\overline{H}_2} + X_2 \frac{\overline{H}*31}{\overline{H}_2}$

وألان نفترض ثبات الأسعار وتغير الدخل أي إننا نفترض : $dp_1 = dp_2 = 0 \; dI \neq 0 \; \frac{dX_{1(dP1=dp2=0)}}{dI} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \phi_{12} & -P_1 \\ 0 & \phi_{22} & -P_2 \\ 1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} = \frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -P_1 \\ -\phi_{22} & -P_2 \end{vmatrix}}{\overline{H}_2} = \frac{\overline{H}*_{31}}{\overline{H}_2}$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على أثر تغير الدخل على الطلب على السلعة X_1 مع ثبات الأسعار (أي الأثر ألدخلي لتغير السعر) . ويمكن التعبير عنها بصورة أخرى كالآتي

$$\frac{dX_{1(dP1=dp2=0)}}{dI} = \frac{\overline{H}*_{31}}{\overline{H}_2}$$

بضرب المعادلة (2) في P2/X1 –وتعويض المعادلة (3) $\eta_{12} = \frac{dX_{1(dI=dP1=0)}}{dp_2} \times \frac{P_2}{X_2} = \frac{-\lambda \overline{H}*_{21}}{\overline{H}_2}\left(\frac{P_2}{X_2}\right) + X_2 \frac{\overline{H}*31}{\overline{H}_2}\left(\frac{P_2}{X_2}\right)$

$\acute{\eta}$($= - P_2/X_1 dx_1/ dp_2$) تعبر عن مرونة الطلب التقاطعية للسلعة x1 النسبة لسعر السلعة x_2 أي p_2وبما انه عند التوازن نحصل على $\phi i = \lambda Pi$فإنه بتعويض هذه القيمة في محددة هيشيان المطوقة s`2 والعوامل المساعدة نحصل على $\overline{H}*_{ii} = \frac{1}{\lambda^2 Hij*} \rightarrow \overline{H}*n = \frac{1}{\lambda^2 Hn*}$

حيث $$\overline{H}^*_2 = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_2 \\ \phi_1 & \phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

يمكن كتابة معادلة المرونة التقاطعية كالأتي : $\acute{\eta}_{12} = - \lambda P_2/X_1 \, H`**_{12}/H`*_2 + X_2 P_2/X_1 \; dX_1/dI$

ولكن من دراستنا لمرونة الإحلال توصلنا إلى ... $\sigma_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi\phi i}{X_1 X_2} \times \frac{\overline{H}^{**}_{12}}{\overline{H}^*_2} \rightarrow \sigma_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi\phi i}{X_i X_j} \times \frac{\overline{H}^{**}_{ij}}{\overline{H}^*_n}$

بتعويض هذه القيمة في معادلة المرونة التقاطعية نحصل على ... $\sigma_{12} = \frac{\overline{\frac{\lambda P_2}{X_1 \sigma_{12} X_1 X_2}}}{\sum_{i=1}^{n} Xi\phi i} + \frac{P_2}{X_1}\frac{dI}{dI}$

ولنفترض أن نسبة الدخل المنفقة على السلعة X_2 تساوي $\delta 2$ أي إن ..

$$\delta_2 = \frac{P_2 X_2}{I} = \frac{P_2 X_2}{\sum_{i=1}^{n} X_i P_i}$$

وحيث عند التوازن للمستهلك $P_I = \phi i / \lambda$.. فإنه عند التوازن نحصل على

$$\delta_2 = \frac{P_2 X_2}{\sum_{i=1}^{n} X_i P_i} = \frac{\lambda \phi_2 X_2}{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \phi_i} = \frac{\phi_2 X_2}{\sum_{i=1}^{n} X_i \phi_i}$$

بتعويض هذه القيمة في معادلة المرونة التقاطعية نحصل على

$$(\lambda P_2 \delta_2 \sigma_{12}) / \phi_2 + (X_2 P_2 / X_1) (d X_1/dI) \acute{\eta}_{12} =$$

وبتعويض قيمة λ عند التوازن وبضرب وقسمة الجزء الثاني من الطرف الأيمن في $\delta 2$ نحصل على ..

$$(\phi_2 /P_2) P_2/ \phi 2 \; \delta 2 \; \sigma_{12} + (I /X_1) (X2 \; P_2/I) (dX_1/dI) \acute{\eta}_{12} =$$

وبالاختصار نحصل على $\delta_2 \sigma_{12} + \delta_2 (I /X_1 \; dX_1/dI) \acute{\eta}_{12}$

إلا إن ...$\acute{\varepsilon}_1 = (I/X_1 \; dX_1/dI)$

تمثل مرونة الطلب الداخلية للسلعة x1 وعلية فإن مرونة الطلب التقاطعية تساوي :

$$= \delta_2\sigma_{12} + \delta_2\acute{\varepsilon}_1\acute{\eta}_{12}$$

$$= \delta_2 (\sigma_{12} + \acute{\varepsilon}_1)\acute{\eta}_{12}$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة فنحصل على ..

$\delta i (\sigma_{ij} + \acute{\varepsilon}_j)\acute{\eta}_{ij}$ وكذلك $= \delta i (\sigma ii + \acute{\varepsilon} i)\acute{\eta} ii$

وتبين المعادلة الأولى أن مرونة الطلب التقاطعية $\acute{\eta}_{ij}$ بين السلعتين xi , xj تتوقف على :

أ- النسبة من الدخل التي ينفقها المستهلك على السلعة xi (δi) ..

ب- مرونة الطلب الدجلية على السلعة xj (έj)

ت- مرونة الإحلال بين السلعتين , xi , xj (σi j)

أما المعادلة الآنية فتوضح أن مرونة الطلب على السلعة بالنسبة لثمنها ($\acute{\eta}_{ii}$) تساوي حاصل ضرب النسبة التي ينفقها المستهلك من دخلة على هذه السلعة في مجموع مرونة الإحلال للسلعة لسعرها ومرونة الطلب على نفس السلعة بالنسبة للدخل .