الفصل الثالث
الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة مركبة

مقدمة :

سلف أن وأوضحنا فى الجزء الأول (الفائدة البسيطة) أن الدفعات المتساوية هى عبارة عن "مجموعة مبالغ متساوية تدفع على فترات زمنية متساوية" ولايعنى ذلك أنها تدفع على سنوات متساوية ولكن قد تكون سنوية أو نصف سنوية أو كل شهرين أو كل شهر ... الخ .

فضلا عن ذلك قد بينا أن الدفعات المتساوية تنقسم إلى نوعين رئيسيين وهما :

١ – **الدفعات الإحتمالية** : وهى الدفعات التى يتوقف دفعها على وقوع حادث معين أو ظروف معينة ولهذا سميت "دفعات شرطية" كما أشرنا سالفاً عند شرحنا للدفعات المتساوية بفائدة بسيطة .

٢ – **الدفعات المؤكدة** : وهى الدفعات التى لايتوقف دفعها إستحقاق قيمتها على وقوع حادث معين .

وسوف تقتصر دراستنا كما أشرنا فى حالة "الفائدة البسيطة" على الدفعات المؤكدة .

علاوة على ماسبق قد تنقسم الدفعات المؤكدة من حيث تاريخ سداد الدفعة إلى :

أ – دفعات عادية : وهى التى تدفع فى آخر كل فترة زمنية .

ب – دفعات فورية : وهى التى تدفع فى أول كل فترة زمنية .

كما تقسم الدفعات المؤكدة من حيث عدد مرات دفعها إلى نوعين رئيسيين هما :

أ – الدفعات المحدودة : وهى الدفعات التى يستمر دفعها لمدة محدودة أى أن عدد الدفعات محدوداً ومعروفاً مسبقاً بمعنى أنها تدفع ١٠ مرات أو ٢٠ مرة .... الخ .

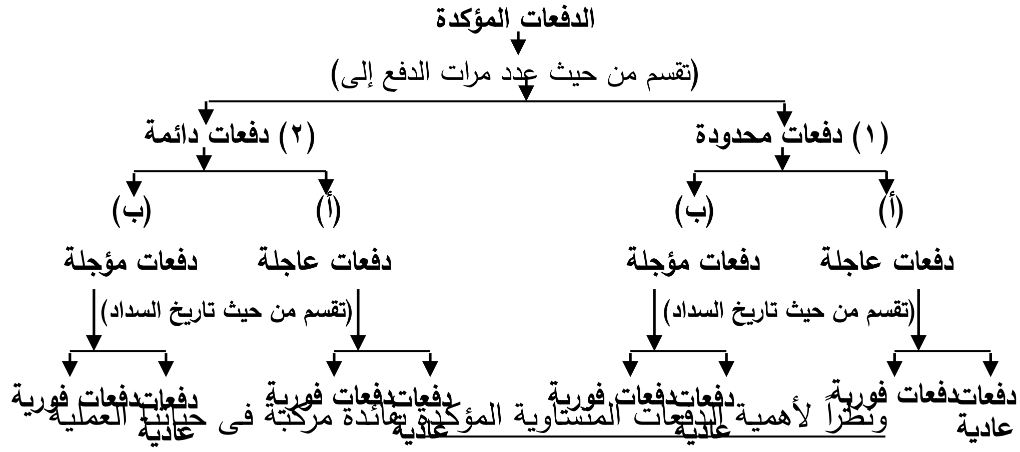
ب – الدفعات الدائمة : وهى الدفعات التى يستمر دفعها دون توقف أى أن عدد الدفعات غير محدوداً لذا تسمى دفعات لا نهائية لأن الدفعات تدفع لفترة زمنية غير محدودة أى لمدة لانهائية كما هو الحال فى إيرادات العقارات الموقوفة لصالح الأعمال الخيرية .

ويمكن تقسيم الدفعات المؤكدة من حيث ميعاد وإستحقاق الدفع إلى :

أ – دفعات عاجلة : وهى الدفعات التى يبدأ فيها سداد الدفعة الأولى خلال الفترة الزمنية الأولى والدفعة الثانية خلال الفترة الزمنية الثانية وهكذا .

ب – دفعات مؤجلة : وهى الدفعات التى تبدأ فيها سداد الدفعة الأولى بعد إنقضاء فترة زمنية معينة تسمى "فترة التأجيل" .

نستخلص مما سلف أن الدفعات المؤكدة والتى سنتولى دراستها يمكن تقسيمها وفقاً لهذا الرسم :



ونظراً لأهمية الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة مركبة فى حياتنا العملية لذا سنتولى دراستها بشئ من التفصيل على النحو التالى :

أولا : المفاهيم الأساسية لكل من الجملة والقيمة الحالية للدفعات المتساوية بفائدة مركبة

حتى ترسخ المفاهيم الأساسية لكل من الجملة والقيمة الحالية للدفعات المتساوية بفائدة مركبة فى ذهن القارئ فإن المؤلف سوف يخصص مبحث مستقل لدراسة كل منهما بشئ من التفصيل فضلا عن ذلك فإن أهم الحالات الخاصة للدفعات المؤكدة بفائدة مركبة وهى الدفعات المتغيرة سيتم دراستها فى مبحث ثالث مستقل كما هو مبين لنا فى المباحث التالية :

المبحث الأول

جملة الدفعات المتساوية المؤكدة

يقصد بجملة الدفعات المتساوية كما ذكرنا سالفاً ، مجموع الدفعات مضافاً إليها فوائدها فى نهاية المدة .

من ثم يمكن القول أن جملة الدفعات المتساوية يمكن الحصول عليها عن طريق حساب جملة كل دفعة على حدة بفائدة مركبة من تاريخ دفع كل منها حتى نهاية المدة ثم جمعها .

وتسهيلاً للعمليات الحسابية فى الوصول إلى جملة الدفعات المتساوية أيا كانت قيمتها يمكن أن نحسب أولا جملة الدفعات والتى قيمة كل منها جنيه واحد (كما يتبين لنا فيما بعد) ثم بضرب الناتج فى قيمة الدفعة المتساوية أيا كانت قيمتها فينتج جملة الدفعات المتساوية المطلوبة كالآتى :

جملة الدفعات المتساوية = قيمة الدفعة الواحدة × جملة الدفعات المتساوية التى قيمة كل منها ١ جنيه

ويمكن الوصول إلى جملة الدفعات المتساوية حسب التقسيم السالف الإشارة إليه فى نهاية أى عدد من الفترات الزمنية بطريقتين مختلفتين هما :

أ – الطريقة الرياضية : وذلك بإستخدام المتوالية الهندسية .

ب – طرقة الجداول المالية : وذلك بإستخدام جداول جملة الدفعات .

وسوف نتولى دراسة جملة الدفعات المتساوية بمقتضى الطريقتين أ ، ب للوصول إلى معادلة لجملة كل نوع من الدفعات المذكورة سالفاً كما يتبين لنا فيمايلى :

أولا : الدفعات المحدودة :

١ – معادلة جملة الدفعات المحدودة العاجلة العادية :

أ – بإستخدام الطريقة الرياضية :

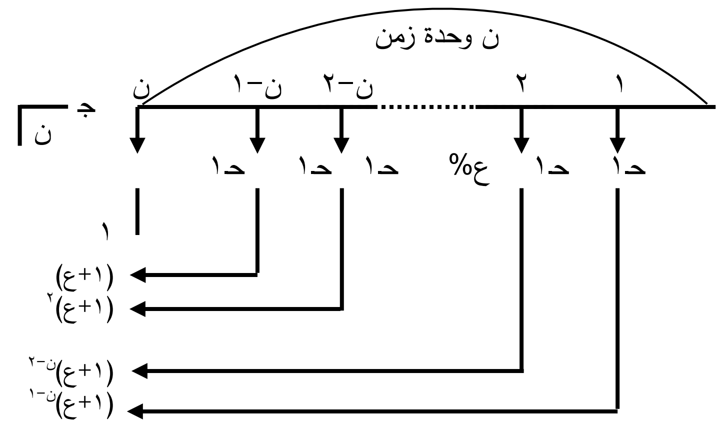
<u>الفروض الاساسية :</u>

بفرض أن لدينا مايلى :

مبلغ الدفعة المتساوية قدره واحد جنيه

معدل الفائدة المركبة : ع%

مدة الدفعات : ن وحدة زمن



شكل (١)

المطلوب : إيجاد جملة دفعة محدودة عاجلة عادية قدرها ١ جنيه ومدتها (ن) والتى يرمز لها بالرمز جـ ن⌉

البرهان : إذا أمعنا النظر فى الشكل (١) يتضح لنا بجلاء مايلى :

أن <u>الجنيه الأول</u> (الدفعة الأولى) يستمر من نهاية وحدة الزمن الأولى حتى نهاية المدة أى يستثمر (ن–١) من وحدات الزمن ولهذا فإن جملة الدفعة الأقلى فى نهاية المدة = $١(١+ع)^{ن-١}$.

أن <u>الجنيه الثانى</u> (الدفعة الثانية) يستثمر من نهاية وحدة الزمن الثانية حتى نهاية المدة أى يستثمر لمدة (ن–٢) من وحدات الزمن ولهذا فإن جملة الدفعة الثانية فى نهاية المدة $(١+ع)^{ن-٢}$ وهكذا حتى :

<u>الجنيه قبل الأخير</u> : (الدفعة قبل الأخيرة) يستثمر لمدة وحدة زمن واحدة لهذا فإن جملة الدفعة قبل الاخيرة = (١+ع) .

<u>الجنيه الأخير</u> (الدفعة الأخيرة) لا يستثمر على الإطلاق ولهذا فإن جملة الدفعة = ١ جنيه فقط وعلى ذلك فإن :

جملة الدفعات = مجموع الجمل المركبة للدفعات المتساوية .

$= (١+ع)^{ن-١} + (١+ع)^{ن-٢} + ... + (١+ع) + ١$

وحيث أن الطرق الأيسر يمثل متوالية هندسية تنازلية ، وإذا أعيد كتابته معكوساً فإنه يمثل متوالية هندسية تصاعدية حدها الأول = ١ جنيه وأساسها (١+ع) وعددها "ن" لهذا فإن جملة الدفعات تصبح كالآتى :

جملة الدفعات $= ١ + (١+ع) + ... + (١+ع)^{ن-٢} + (١+ع)^{ن-١}$

وحيث أن مجموع المتوالية الهندسية التصاعدية =

$$\frac{\text{الحد الأول} \times \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}} - ١}{\text{الأساس}}$$

لذا إذا رمزنا لجملة دفعة محدودة عاجلة قدرها ١ جنيه وبمعدل فائدة مركبة قدرها ع بالرمز $\text{ج}_{\overline{ن|}ع\%}$ فإن :

$$\boxed{\text{ج}_{\overline{ن|}ع\%} = ١ \times \frac{(١+ع)^{ن}-١}{(١+ع)-١} = \frac{(١+ع)^{ن}-١}{ع}} \qquad (١)$$

وبالتالى إذا كانت قيمة الدفعة د جنيها فإن :

جملة الدفعات = د × $جـ_{\overline{ن|}}$ ع% = قيمة الدفعة × $جـ_{\overline{ن|}}$ ع%	(٢)

مثال (١) :

أودع شخص فى أحد البنوك دفعة عادية سنوية قدر كل منها ٥٠ جنيها لمدة ١٠ سنوات – المطلوب حساب جملة ما يصير له فى البنك إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة ١٠% سنوياً .

الحل

جملة الدفعات = قيمة الدفعة ×

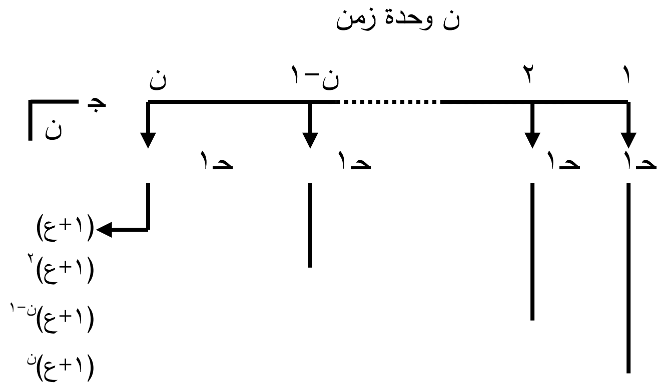
$$= \text{قيمة الدفعة} = \frac{(1+ع)^{ن} - 1}{ع}$$

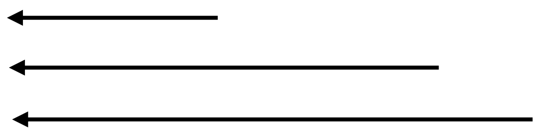
$$\text{جملة ما يصير للشخص} = 50 \times \frac{(1+0.10)^{10} - 1}{0.10}$$

$$= 50 \times \frac{2.59374 - 1}{0.10}$$ بإستخدام جدول جملة الجنيه $(1+ع)^{ن}$

= ٧٩٦,٨٧ جنيهاً

(٢) معادلة جملة الدفعات المحدودة العاجلة الفورية :





شكل (٢)

أ – بإستخدام الطريقة الرياضية :

بنفس الخطوات السابقة يمكن الوصول إلى جملة دفعة محدودة عاجلة فورية قدرها ١ جنيه والتى يرمز لها بالرمز $جـ_{\overline{ن|}ع}$ وذلك بالنظر إلى الشكل (٢) كالآتى :

أن الجنيه الأول (قيمة الدفعة الأولى) يستثمر لمدة ن وجملته = $(١+ع)^{ن}$

، أن الجنيه الثانى (قيمة الدفعة الثانية) يستثمر لمدة (ن) وحدة زمن وجملته = $(١+ع)^{ن-١}$ وهكذا حتى :

الجنيه قبل الأخير فيستثمر لمدة فترتين زمنيتين وجملته $(١+ع)^{٢}$

، الجنيه الأخير فيستثمر لمدة فترة زمنية واحدة وجملته = $(١+ع)$

$$\therefore\ جـ_{\overline{ن|}} = (١+ع)^{ن} + (١+ع)^{ن-١} + \ldots\ldots + (١+ع)^{٢} + (١+ع)$$

وبإعادة كتابة الطرق الأيسر معكوساً فإن :

$$جـ_{\overline{ن|}} = (١+ع) + (١+ع)^{٢} + \ldots\ldots + (١+ع)^{ن-١} + (١+ع)^{ن}$$

$$\frac{\text{الحد الأول} \times \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}} - ١}{\text{الأساس}}$$

$$جـ_{\overline{ن|}} = (١+ع) \times \frac{(١+ع)^{ن} - ١}{(١+ع) - ١}$$

$$\boxed{(١+ع)^{ن} - ١}$$

$$\ddot{\text{جـ}}_{\overline{\text{ن}}|} = (\text{١}+\text{ع}) \times \frac{\qquad}{\text{ع}} \qquad (\text{٣})$$

وبالنظر إلى المعادلة (٣) نجد أن هناك علاقة بين $\ddot{\text{جـ}}_{\overline{\text{ن}}|}$ ، $\text{جـ}_{\overline{\text{ن}}|}$ أى أن :

$$\boxed{\ddot{\text{جـ}}_{\overline{\text{ن}}|} = (\text{١}+\text{ع}) \times \text{جـ}_{\overline{\text{ن}}|}}$$

لهذا يمكن الإكتفاء بجدول $\text{جـ}_{\overline{\text{ن}}|}$ لحساب قيمة $\ddot{\text{جـ}}_{\overline{\text{ن}}|}$ على ضوء العلاقة السابقة كما يتضح لنا من المثال الآتى :

مثال (٢) :

إحسب جملة المستحق لشخص يدفع فى أول كل سنة ولمدة ٥ سنوات دفعة متساوية قدرها ١٠٠ جنيها إذا كان معدل الفائدة المركبة ٩% سنوياً .

الحل

جملة الدفعات = جملة المستحق للشخص = قيمة الدفعة × $\ddot{\text{جـ}}_{\overline{\text{ن}}|\,\text{ع}\%}$

= ١٠٠ × $\ddot{\text{جـ}}_{\overline{\text{ن}}|\,\text{٩}\%}$

= ١٠٠ (١+٠٩ر) × $\text{جـ}_{\overline{\text{ن}}|\,\text{٩}\%}$

= ١٠٠ × (١,٠٩) × ٢٩,٣٦٠٩٢

= ٣٢٠٠,٣٤٠ جنيه

مثال (٣) :

إشترى أسامة عثمان شقة ودفع مقدم قدره ٣٠٠٠ جنيه يوم الشراء وتعهد بسداد باقى ثمن الشقة على دفعات سنوية تدفع فى آخر كل سنة لمدة ١٥ سنة وذلك بعد فترة تأجيل من تاريخ الشراء والتى قدرها ٦ سنوات – فإذا علمت أن قيمة الدفعة ١٠٠٠ جنيه ومعدل الفائدة المركبة ٩% سنوياً .

فالمطلوب : حساب جملة الدفعات التى سددها المشترى ثم حساب قيمة الشقة فى وقت الشراء .

الحل

٦ سنة

١٥ سنة

١٠٠٠ ١٠٠٠

الدفعات عادية

∴ جملة الدفعات التى سددها المشترى = ١٠٠٠ × جـ/م ن⌉

= ١٠٠٠ × جـ/٦ ١٥⌉ ٩%

= ١٠٠٠ × جـ ١٥⌉ ٩% = ١٠٠٠ × ٢٩,٦٠٩٢ = ٢٩٣٦٠,٩٢ جنيه

∴ قيمة الشقة فى وقت الشراء = مقدمة الثمن + جملة الدفعات × ح ٢١ ٩%

= ٣٠٠٠ + ٢٩٣٦٠,٩٢ × ١٦٣٧ر = ٧٨٠٦,٣٨ جنيه

.

أمثلة أخرى محلولة :

مثال (٤) :

إذا علمت أن أحد رجال الأعمال يدخر إبنه الوحيد مبلغ ٢٠٠ جنيهاً فى أول كل شهر فى صندوق البريد وفى نهاية كل عام يسحب كل ما أودعه خلال العام ويودعه فى بنك الدلتا – فالمطلوب : حساب جملة ما يصير للإبن عندما يبلغ سن الرشد إذا علمت أن والده كان يدخر له إبتداء من ميلاده وأن صندوق البريد يسحب الفوائد البسيطة بمعدل ٧% سنوياً والبنك يحسب الفوائد المركبة بمعدل ٨% سنوياً .

الحل

جملة ما يصير للإبن = جملة ما ادخره الوالد ابتداء من ميلاد الإبن حتى سن الرشد = جملة دفعة سنوية محدودة عاجلة عادية لمدة ٢١ سنة بمعدل فائدة مركبة ٨% سنوياً .

والجدير بالذكر أن قيمة الدفعة السنوية تعادل جملة الدفعات الشهرية لذا يمكن حساب قيمة هذه الدفعة بحساب جملة الدفعات الشهرية كالآتى :

جملة الدفعات الشهرية = $٢٠٠ \times ١٢ + ٢٠٠ \times \frac{٧}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \left(\frac{١٢+١}{١٢}\right)$

= ٢٤٠٠ + ٩١ = ٢٤٩١ جنيهاً

وهذا المبلغ يمثل قيمة دفعة سنوية تستثمر لمدة ٢١ سنة

∴ جملة الدفعة = $٢٤٩١ \times ج_{\overline{٢١}|٨\%}$

= ٢٤٩١ × ٥٠٫٤٢٢٩٢ = ١٢٥٦٠٣٫٤٩ جنيهاً

مثال (٦) :

إشترت شركة آية الكبرى مصنع للموبيليا وإتفقت مع البائع على دفع ٣٠٫٠٠٠ جنيه فى تاريخ الشراء وسداد الباقى كالآتى :

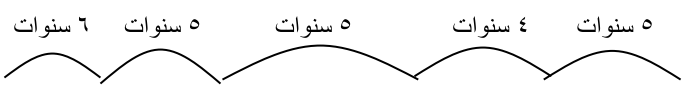
٢٠٫٠٠٠ جنيها بعد ٥ سنوات من تاريخ الشراء .

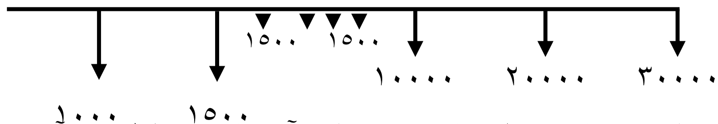
١٠٫٠٠٠ جنيهاً بعد ٤ سنوات من تاريخ سداد المبلغ السابق .

١٥٠٠ جنيها سنوياً لمدة ٥ سنوات دفعت الدفعة الأولى بعد ١٠ سنوات من تاريخ الشراء .

١٠٠٠ جنيه سنوياً لمدة ٥ سنوات دفعت الدفعة الأولى بعد ١٤ سنة من تاريخ الشراء . فإحسب جملة ما دفعته شركة آية للبائع فى نهاية ٢٥ سنة من تاريخ الشراء وذلك على أساس معدل فائدة مركبة قدره ١٠% سنوياً .

الحل





يمكن حساب جملة ما دفعته شركة آية بإحدى الطرق الآتية :

الطريقة الأولى :

جملة ما دفعته شركة آية= ٣٠٠٠٠(١+٠,١ر)^{٢٥}+٢٠٠٠٠(١+٠,١)^{٢٠}+ ١٠٠٠٠

(١+٠,١ر)^{١٦} + ١٥٠٠ × جـ ٥⌉(١+٠,١ر)^{١١} + ١٠٠٠ × جـ ٥⌉(١+٠,١ر)^{٦}

= ٣٠٠٠٠ × ١٠,٨٣٤٤٧٠ +٢٠٠٠٠× ٦,٧٢٧٥+ ١٠٠٠٠ × ٤,٥٩٤٩٧

+ ١٥٠٠ × ٦,١٠٥١٠ × ٢,٨٥٣١٢ + ١٠٠٠ × ٦,١٠٥١٠ ×

١,٧٧١٥٦ = ٥٤٢٤٨٤,١٢ جنيهاً

الطريقة الثانية :

جملة ما دفعته شركة آية= ٣٠٠٠٠(١,١٠)^{٢٥}+٢٠٠٠٠(١,١٠)^{٢٠}+ ١٠٠٠٠

(١,١٠)^{١٦} + ١٥٠٠ × جـ ١٠⌉ (١,١٠)^{٦} + ٥٠٠ × جـ ٥⌉(١,١٠)^{١١}

= ٣٠٠٠٠ × ١٠,٨٣٤٤٧٠ +٢٠٠٠٠× ٦,٧٢٧٥+ ١٠٠٠٠ × ٤,٥٩٤٩٧

+ ١٠٠٠ × ١٥,٩٣٧٤٢ × ١,٧٧١٥٦ + ٥٠٠ × ٦,١٠٥١٠ ×٢,٨٥٣١٢

= ٥٤٢٤٨٤,٠٨ جنيهاً

المبحث الثانى

القيمة الحالية للدفعات المتساوية المؤكدة

يقصد بالقيمة الحالية للدفعات المتساوية مجموع الدفعات مطروحاً منها مجموع الخصم الخاص بكل دفعة عن مدة خصمها بمعدل فائدة مركبة معين .

وبمعنى آخر : يقصد بالقيمة الحالية للدفعات المتساوية مجموع القيم الحالية للدفعات فى بداية المدة .

من ثم يمكن القول بأن القيمة الحالية للدفعات المتساوية يمكن الحصول عليها عن طريق حساب القيمة الحالية لكل دفعة على حدة فى بداية المدة ثم جمعها . وكما ذكرنا سالفاً عند شرحنا لجملة الدفعات المتساوية فتسهيلاً للعمليات الحسابية للوصول إلى القيمة الحالية للدفعات أيا كانت قيمتها يمكن أن نحسب أولا القيمة الحالية للدفعات التى قيمة كل منها جنيه واحد ثم بضرب الناتج فى قيمة الدفعة المتساوية أيا كانت قيمتها فتنتج القيمة الحالية للدفعات المطلوبة كالآتى :

القيمة الحالية للدفعات المتساوية =

قيمة الدفعة × القيمة الحالية للدفعة المتساوية التى قيمة كل منها ١ جنيه

ويمكن الوصول إلى القيمة الحالية للدفعات المتساوية فى بداية حسب التقسيم السابق الإشارة إليه بأحد الطريقتين المشار إليهما سالفاً وهما :

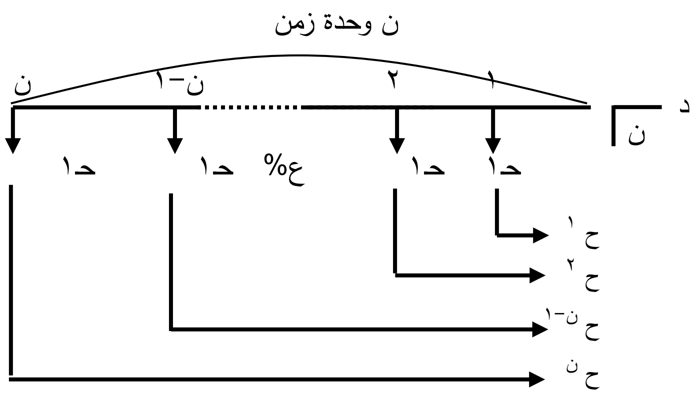
أ – الطريقة الرياضية (بإستخدام المتوالية الهندسية) .

ب – طريقة الجداول المالية (بإستخدام جداول القيمة الحالية للدفعات) وسوف نتولى دراسة القيمة الحالية للدفعات المتساوية بمقتضى الطريقتين أ ، ب للوصول إلى معادلة القيمة الحالية لكل نوع من الدفعات (الدفعات المحدودة – الدفعات الدائمة) كما يتبين لنا فيمايلى :

أولا : الدفعات المحدودة

١ – معادلة القيمة الحالية للدفعات المحدودة العاجلة العادية :

أ – بإستخدام الطريقة الرياضية :



شكل (٦)

بفرض أن لدينا دفعة محدودة عاجلة عادية قدرها ١ جنيه وأن الدفعة تسدد لمدة "ن" وحدة زمن بمعدل فائدة مركبة قدره ع% .

والمطلوب : إيجاد القيمة الحالية لهذه الدفعة . والتى يرمز بها بالرمز

البرهان :

من الشكل (٦) نلاحظ الآتى :

أن الجنيه الأول تحسب قيمته الحالية عن المدة من نهاية وحدة الزمن الأولى إلى أول المدة أى يخصم عن وحدة زمن واحدة ولهذا فإن قيمته الحالية = $ح^{١}$.

أن الجنيه الثانى تحسب قيمته الحالية عن المدة من نهاية وحدة الزمن الثانية إلى أول المدة أى يخصم عن وحدتين زمن ولهذا فإن قيمته الحالية = $ح^{٢}$.

وهكذا :

نجد أن الجنيه قبل الأخير تحسب قيمته الحالية عن المدة من نهاية (ن–١) وحدة زمن إلى أول المدة أى يخصم عن (ن–١) وحدة ولهذا فإن قيمته الحالية = $\text{ح}^{\text{ن}-١}$.

والجنيه الأخير تحسب قيمته الحالية عن المدة ن وحدة زمن أى يخصم عن ن وحدة زمن ولهذا فإن قيمته الحالية $\text{ح}^{\text{ن}}$.

لذلك إذا رمزنا للقيمة الحالية للدفعات المحدودة العاجلة العادية بالرمز فإن :

القيمة الحالية للدفعات = $\text{د}_{\overline{\text{ن}|}} = \text{ح} + \text{ح}^{٢} + \ldots\ldots + \text{ح}^{\text{ن}-١} + \text{ح}^{\text{ن}}$

وحيث أن الطرف الأيسر من المعادلة عبارة عن متوالية هندسية تنازلية حدها الأول ح وأساسها ح وعدد حدودها ن .

وحيث أن مجموع المتوالية الهندسية التنازلية =

$$\frac{\text{الحد الأول} \times ١ - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{١ - \text{الأساس}}$$

$$\therefore \text{د}_{\overline{\text{ن}|}} = \text{ح} \times \frac{١ - \text{ح}^{\text{ن}}}{١ - \text{ح}}$$

$$\text{د}_{\overline{\text{ن}|}} = \text{ح} \times \frac{١ - \text{ح}^{\text{ن}}}{١ - \frac{١}{(١+\text{ع})}} \quad (\text{حيث أن ح} = \frac{١}{١ - \text{ع}})$$

$$= \text{ح} \times \frac{١ - \text{ح}^{\text{ن}}}{\frac{١ + \text{ع} - ١}{(١+\text{ع})}}$$

$$١ - \text{ح}^{\text{ن}}$$

$$= ح \times \frac{١}{\frac{١}{(١+ع)} \times ع}$$

$$= ح \times \frac{١ - ح^{ن}}{ح \times ع}$$

$$\therefore \quad د_{\overline{ن|}} = \frac{١ - ح^{ن}}{ح \times ع} \qquad (٧)$$

وبالتالى إذا كانت قيمة الدفعة = جنيهاً فإن :

القيمة الحالية للدفعات = قيمة الدفعة × $د_{\overline{ن|}ع\%}$

مثال (١١) :

أوجد القيمة الحالية لإحدى عشرة دفعة سنوية عادية قدر كل منهما ١٠٠ جنيهاً إذا كان معدل الفائدة المركبة ٦% سنوياً .

الحل

القيمة الحالية للدفعات العادية = قيمة الدفعة × $د_{\overline{ن|}ع\%}$

$$= \text{قيمة الدفعة} \times \frac{١ - ح^{ن}}{ع} \text{ بمعدل ٦\%}$$

$$= ١٠٠ \times \frac{١ - ح^{١١}}{٠٦ر}$$

$$= ١٠٠ \times \frac{١ - ٥٢٦٧٩ر}{٠٦ر} \text{ من جدول ح ن}$$

= ٧٨٨,٦٨٣ جنيهاً

مثال (١٢) :

أودع عباس البنهاوى دفعة ربع سنوية مدة ٤ سنوات قدر كل منها ٥٠ جنيه – فإحسب القيمة الحالية لهذه الدفعات على أساس أن معدل الفائدة المركبة ٣٦% سنوياً والفائدة تعلى ٤ مرات فى السنة .

الحل

المعدل الحقيقى = ٣٦ / ٤ = ٩% كل ربع سنة

، المدة = ٤ × ٤ = ١٦ وحدة زمن كل منها ربع سنة

∴ القيمة الحالية لهذه الدفعات = ٥٠ × د ١٦⌉ ٩%

= ٥٠ × (١ × ح^١٦) / ٠٩ر

= ٥٠ × (١ – ٢٥١٨٧ر) / ٠٩ر بإستخدام جدول ح ن = ٤١٥,٦٢٨ جنيها

(ب) بإستخدام الجداول المالية :

للحصول على قيمة د ن⌉ع% = (١ – ح ن) / ع يلزمنا إستخدام جدول القيمة الحالية للجنيه بفائدة مركبة كما رأينا فى حل المثالين السالفين للحصول على ح ن ثم طرح القيمة المستخرجة من الواحد الصحيح ثم قسمة الباقى على معدل الفائدة وهذا فى الواقع يحتاج إلى وقت وجهد الأمر الذى إستدعى القيام بعمل جدول خاص لحساب د ن⌉ع% أى القيمة الحالية لدفعة عادية قدرها جنيه واحد وتدفع فى نهاية كل وحدة زمنية ولمدة تتراوح من ١ إلى ٦٠ وحدة زمن

بمعدلات فائدة مركبة مختلفة وذلك كما يتبين لنا فى العمود الخامس من الجداول المالية الملحق بهذا الكتاب . (أنظر إلى ملحق الكتاب)

وبحل المثالين السابقين بإستخدام جدول $د_{\overline{ن|}ع\%}$ يتبين لنا مدى السهولة والسرعة فى الحصول على القيمة للدفعات كالآتى :

– القيمة الحالية للدفعات فى المثال الأول (مثال ١١) = ١٠٠ × $د_{\overline{١١|}٦\%}$

= ١٠٠ × ٧,٨٨٦٨٧ من جدول $د_{\overline{ن|}}$ أما ن = ١١ وتحت ع = ٦%

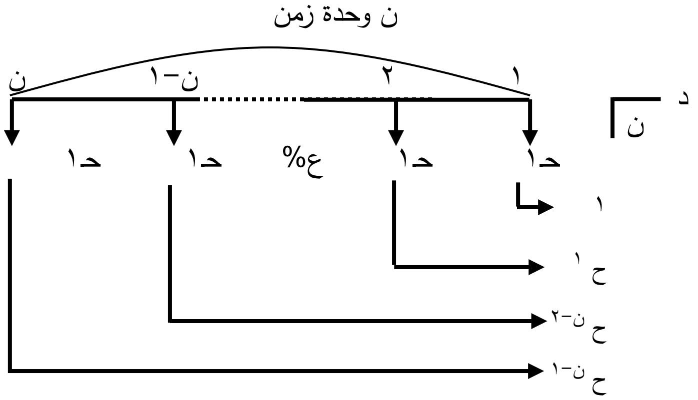
= ٧٤٨٨,٦٨٣ جنيهاً

– القيمة الحالية للدفعات فى المثال الثانى مثال (١٢) = ٥٠ × $د_{\overline{١٦|}٩\%}$

= ٥٠ × ٨,٣١٢٥٦ من جدول $د_{\overline{ن|}}$ أمام ن = ١٦ وتحت ع = ٩%

= ٤١٥,٦٢٨ جنيهاً

(٢) معادلة القيمة الحالية للدفعات المحدودة العاجلة الفورية :



شكل (٧)

أ – بإستخدام الطريقة الرياضية :

بفرض أن لدينا دفعة محدودة عاجلة فورية قدرها ١ جنيه تستثمر لمدة ن وحدة زمن بمعدل فائدة مركبة ع% والمطلوب : إيجاد قيمتها الحالية والتى يرمز لها بالرمز $د_{\overline{ن|}}$

البرهان :

من الشكل (٧) نلاحظ مايلى :

أن <u>الجنيه الأول</u> يستحق فوراً ولذلك فقيمته الحالية = ١ جنيه

أن <u>الجنيه الثانى</u> يستحق بع وحدة زمنية لهذا فقيمته الحالية = ح وهكذا إلى أن نصل إلى :

<u>الجنيه قبل الأخير</u> يستحق بعد (ن–٢) وحدة زمن لهذا فقيمته الحالية = $ح^{ن-٢}$.

، <u>الجنيه الأخير</u> يستحق بعد (ن–١) وحدة زمن لهذا فقيمته الحالية = $ح^{ن-١}$ وعلى ذلك فإن :

القيمة الحالية للدفعات = ١ + ح + ... + $ح^{ن-٢}$ + $ح^{ن-١}$

(متوالية هندسية تنازلية)

$$\text{الحد الأول} \times \frac{١ - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{١ - \text{الأساس}}$$

$$= ١ \times \frac{١ - ح^{ن}}{١ - ح}$$

$$= \times \frac{١ - ح^{ن}}{١ - \frac{١}{(١+ع)}} \quad (\text{حيث أن } ح = \frac{١}{١ + ع})$$

$$= \frac{١ - ح^{ن}}{\frac{١+ع-١}{١+ع}} = \frac{١ - ح^{ن}}{\frac{ع}{١+ع}} = ١ - ح^{ن} \times \frac{١+ع}{ع}$$

$$\therefore \boxed{د_{\overline{ن|}} = (١+ع) \times \frac{١ - ح^{ن}}{ع}} \qquad (٨)$$

بالنظر إلى المعادلة (٨) نجد أن هناك علاقة ظاهرة بين $\text{د}_{\overline{\text{ن}}|}$ ، $\text{د}_{\overline{\text{ن}}|}$ أى أن :

$$\boxed{\text{د}_{\overline{\text{ن}}|} = (\text{١}+\text{ع}) \times \text{د}_{\overline{\text{ن}}|}}$$

مثال (١٣) :

أودع شخص فى صندوق للإدخار إثنا عشر دفعة فورية سنوية قدر كل منها ٨٠ جنيه – فإحسب قيمتها الحالية بإستخدام معدل فائدة مركبة قدره ٧% سنوياً .

الحل

القيمة الحالية للدفعات الفورية = قيمة الدفعة × $\text{د}_{\overline{\text{ن}}|\text{ع}\%}$

$= \text{٨٠} \times \text{د}_{\overline{\text{١٢}}|\text{٧}\%}$

بإستخدام العلاقة بين ($\text{د}_{\overline{\text{ن}}|}$ ، $\text{د}_{\overline{\text{ن}}|}$)

$= \text{٨٠} \times \text{١,٠٧} \times \text{د}_{\overline{\text{١٢}}|\text{٧}\%}$

= ٨٠ × ١,٠٧ × ٧,٩٤٢٦٩ = ٦٧٣,٨٩٤ جنيهاً

أمثلة أخرى محلولة :

مثال (١٧) :

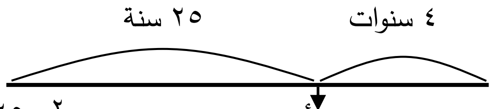
إشترت كلية التجارة جامعة طنطا ٣ أفدنة مجاورة لها لإقامة مدرجات جديدة دفعت من ثمنها ٢٠% نقداً وعرض البائع عليها عرضين لسداد باقى الثمن وهما :

أ – أن تدفع ١٢٠٠٠ جنيها بعد سنتين من تاريخ الشراء ٣٧٠٠٠ جنيه فى آخر السنة السابعة و ١٨٠٠٠ جنيها بعد ١٠ سنوات من تاريخ الشراء .

ب – أن تدفع ٥٠٠٠ جنيها سنويا لمدة ٢٥ سنة على أن تبدأ الدفع بعد أربع سنوات فأى العرضين أفضل بالنسبة لكلية التجارة إذا كان معدل الفائدة المركبة ٧% سنوياً .

الحل

للوصول إلى أى العرضين أفضل للمشترى ينبغى المقارنة بينهما كالآتى :



أ – القيمة الحالية للعرض الأول = ١٢٠٠٠ × ح^{٢} + ٢٧٠٠٠ × ح^{٧} + ١٨٠٠٠ × ح^{١٠} = ١٢٠٠٠ × ٠,٨٧٣٤٤ + ٢٧٠٠٠ × ٠,٦٢٢٧٥ + ١٨٠٠٠ × ٠,٥٠٨٣٥ = ٤٢٦٧٣,٣٣ جنيهاً

ب – القيمة الحالية للعرض الثانى = ٥٠٠٠ × (م/ د ن⌉ ٧%)

= ٥٠٠٠ × (٣ × د ٢٥⌉ ٧%)

= ٥٠٠٠ (د ٢٨⌉ – د ٣⌉)٧%

= ٥٠٠٠ (١٢,١٣٧١ – ٢,٦٢٤٣٢) = ٤٧٥٦٣,٩ جنيهاً

بمقارنة العرضين معاً نجد أن الأول أقل من الثانى – لذا تحبذ كلية التجارة العرض الأولى .

ملحوظة :

يمكن إعتبار الدفعة فورية فى العرض الثانى وبالتالى ستكون فترة التأجيل ٤ سنوات بدلا من ٣ سنوات وفى هذه الحالة القيمة الحالية .

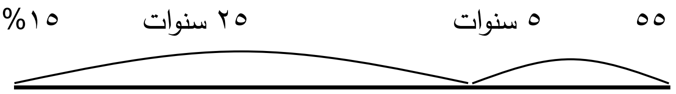
= (٥٠٠٠ × ٤ / د ٢٥⌉)

= ٥٠٠٠ × (د ٤+٢٥–١⌉ – د ٤–١⌉) وتؤدى إلى نفس النتيجة السابقة .

مثال (١٨) :

أراد أحد رجال الأعمال أن يضمن لنفسه دفعة سنوية مبلغها ١٢٠٠٠ جنيه لمدة ٢٥ سنة عندما يصل إلى سن المعاش (٦٠سنة) فما هو المبلغ الذى يجب أن يضعه اليوم فى البنك إذا كان معدل الفائدة المركبة ٨% سنوياً علماً بأن عمره اليوم ٥٥ سنة .

الحل



المبلغ الذى يجب وضعه فى البنك (القيمة الحالية)

= ١٢٠٠ × ٥/ د ٢٥⌉ ٨%

= ١٢٠٠ × (د ٥+٢٥−١⌉ − د ٥−١⌉) ١٤%

= ١٢٠٠ × (د ٢٩⌉ − د ٤⌉) ٨%

طريقة أخرى :

القيمة الحالية = ١٢٠٠٠ × ٤/ د ٢٥⌉ ٨%

= ١٢٠٠٠ × (د ٢٥+٤⌉ − د ٤⌉) ١٤%

= ١٢٠٠٠ = (د ٢٩⌉ − د ٤⌉) ٨%

= ١٢٠٠٠ (١١,١٥٨٤ – ١,٣٢١٣)

= ٩٤١٥٥,٢٤ جنيهاً

ثانياً : التمارين التدريبية على الفصل الثالث

(١) أودعت آية عثمان صاحبة محلات كريستيان ديور فى بنك الدلتا الدولى مبلغ ٥٠٠ جنيه أول كل سنة لمدة ١٠ سنوات ثم خفضت الإيداع السنوى

إلى ١٥٠٠ جنيه خلال الخمس سنوات التالية ثم زادت الإيداع السنوى إلى ٢٠٠٠ جنيه خلال العشر سنوات التالية . المطلوب حساب :

أ – جملة المستحق لها فى نهاية ٢٥ سنة .

ب – جملة المستحق لها عند إيداع الدفعة الأخيرة مباشرة ثم بين سبب الاختلاف بين أ ، وذلك إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة ١٠% سنوياً .

(٢) المطلوب : حساب قيمة الدفعة التى يدفعها شخص فى أحد البنوك فى نهاية كل شهور ولمدة ١٠ سنوات ليصبح رصيده فى نهاية المدة ٦٠٤٠,١٥ جنيها إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة ٨% سنوياً والفائدة تعلى كل ٣ شهور .

(٣) أحسب جملة ما يستحق لتاجر فى نهاية ١٥ سنة إذا قام بإيداع مبلغ قدره ٥٠٠ جنيه فى أحد البنوك فى آخر كل ٦ شهور لمدة عشرة سنوات وذلك إذا علمت البنك يستخدم معدل فائدة مركبة ٨% سنوياً والفائدة تضاف مرتين فى السنة .

(٤) اشترى أحد المزراعين خمس فدادين زراعية من جاره المزارع وعرض عليه الأخير ثلاثة عروض للشراء وهى :

أ – أن يدفع ١٥٠٠٠ جنيهاً نقداً عند تحرير عقد الشراء .

ب – أن يدفع ٣٠٠٠ جنيهاً فوراً وعشرة دفعات سنوية عادية قدر كل منها ٢٠٠٠ جنيه الدفعة الأولى تبدأ بعد سنة من تاريخ الشراء .

جـ – أن يدفع ٢٥ دفعة فورية قدر كل منها ١٥٠٠ جنيهاً .

المطلوب : بيان أى العروض أفضل لمشترى بإستخدام معدل فائدة مركبة ٨% سنوياً