الفهرس

1-3 دالة الإنتاج ومعامل الإحلال الحدى الفني

يعرف الإنتاج في الاقتصاد بأنه أي نشاط يؤدي إلى زيادة الكمية المنتجة من سلعة ما أو خدمة ، أو يؤدي إلى تغير هيئة السلعة أو الخدمة بحيث تصبح أكثر ملائمة للاستهلاك أو الاستخدام ، أو يؤدي إلى عملية توزيع تزيد من صلاحية الانتفاع بالسلعة أو الخدمة .ويستخدم لنظرية دالة الإنتاج للتعبير عن العلاقة بين الكمية المنتجة من سلعة ما وبين عناصر الإنتاج المستخدمة في إنتاج هذه السلعة ويمكن كتابتها ...

كالتالي حيث X_1 , X_2 , X_n

$$q = f\ (X_1 , X_2 , \ldots\ldots, Xn)$$

حيث q الكمية المنتجة في وحدة زمنية معينة ، وحيث x_1 , x_2 , x_n كميات عناصر الإنتاج المستخدمة لإنتاج السلعة خلال نفس الفترة الزمنية . فلو افترضنا ان المنشأة تقوم بإنتاج سلعة ما باستخدام عنصرين إنتاج هما $X_1 . X_2$

فإن دالة الإنتاج يعبر عنها كالآتي

$$q = \emptyset\ (X_1\ ,\ X_2) ..$$

فإذا غيرت المنشأة الكمية المستخدمة من العنصر x_1 بمقدار قدره dx1 والكمية المستخدمة من العنصر x_2 بمقدار dx_2 فإن مقدار الإنتاج يتغير بكمية قدرها dq

$$\partial q = \frac{\partial q}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial q}{\partial X_2} dX_2$$

فإذا فرضنا أن $\partial q = 0$ لحصلنا على ..

$$0 = \frac{\partial q}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial q}{\partial X_2} dX_2$$

وتمثل هذه المعادلة منحنى الناتج المتساوي .. يعطي مجموعات من عنصري الإنتاج X_1, X_2 بحيث كل مجموعة او نقطة على المنحنى تمثل كمية إنتاج ثابتة ويكون ميل منحنى الناتج المتساوي مساوي ..

$$r = \frac{dX_1}{dX_2}$$

ومن المعادلة الاخيره نحصل على

$$r = \frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{\left(\dfrac{\partial q}{\partial X_1}\right)}{\left(\dfrac{\partial q}{\partial X_2}\right)}$$

وهو معدل الإحلال الحدي الفني .. وهو النسبة بين الإنتاجية الحدية لعنصري الإنتاج .. فإذا كانت الإنتاجية الحدية لكل عنصر موجبة فان r تكون سالبة أي إن منحنيات الناتج المتساوي تتجه إلى الأسفل نحو اليمين .

<u>مـــــثال</u>

نفترض دالة الإنتاج التالية ...

$$q = AX_1^{\alpha} X_2^{\beta}$$

حيث $q, A, X_1, X_2 > 0$

$$0 < \alpha < 1 \quad , \quad 0 < \beta < 1$$

نجد أن معدل الإحلال الفني الحدي يساوي

$$r = \frac{dX_1}{dX_2} = -\frac{\left(\frac{\partial q}{\partial X_2}\right)}{\left(\frac{\partial q}{\partial X_1}\right)}$$

$$r = -\frac{\beta}{\alpha}\ \frac{X_1}{X_2} \quad < 0$$

ويمكن تحديد ما إذا كان عنصر الإنتاج المعين يخضع لقانون الغلة المتناقصة او المتزايدة ام الثابتة بحساب ..

$$\frac{\partial (Mpi)}{\partial Xi} = \frac{\partial^2 q}{\partial Xi^2}$$

فإذ ا كانت القيمة سالبة دل ذلك على تناقص الإنتاجية الحدية (سريان قانون تناقص الغلة) أما إذا كانت القيمة موجبة دل ذلك على تزايد الإنتاجية الحدية ، وفي الحالة التي يكون فيها

$$\frac{\partial (Mpi)}{\partial Xi} = \frac{\partial^2 q}{\partial Xi^2} = 0$$

تكون الغلة أو الإنتاجية الحدية ثابتة كما أيضا تحديد كيف تتغير الإنتاجية الحدية لعنصر ما (X_1) نتيجة تغير العنصر الأخر (X_2) وذلك بحساب

$$\frac{\partial (Mp_1)}{\partial X_2} = \frac{\partial^2 q}{\partial Xi\ \partial X_2}$$

ويمكن إثبات انه عندما تكون المنشاة في حالة توازن إن الإنتاجية الحدية لكل عنصر من عناصر الإنتاج تكون موجبة . أي إن اختيار المنشاة لأي نقطة على منحنى الناتج المتساوي إنما ينحصر من الجزء من المنحنى الذي يكون فيه الميل سالبا ..لنفترض أن دالة الإنتاج تساوي

$$q = \phi(X_1, X_2)$$

ولنفترض أن التكاليف الكلية

$$C = p_1 X_1 + p_2 X_2$$

حيث

p_1, p_2 **إثمان عنصري الإنتاج** X_1, X_2

وتكون اكبر من الصفر ولنفترض أن الإيراد الكلي يساوي R

بحيث

$$R = pq$$

ويمثل p **السعر السوقي للإنتاج وهو موجب بينما تمثل** q **كمية الإنتاج (أو المبيعات)**

وبعبارة أخرى فإننا نفترض منشأة تعمل في ظل المنافسة الكاملة حيث الهدف هو تحقيق أقصى ربح ممكن أو ..

تعظيم

$$\pi = p\,\phi\,(X_1, X_2) - p_1 X_1 - p_2 X_2$$

ويتطلب هذا التعظيم توافر الشروط :

$$\frac{\partial \pi}{\partial X_1} = p\phi_1 - p_1 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial X_2} = p\phi_2 - p_2 = 0$$

حيث ϕ_1, ϕ_2 **يمثلان الإنتاجية الحدية للعنصرين** X_1, X_2 **وحيث :**

قيمة الإنتاجية الحدية للعنصر X_1 **تساوي** $P\phi_1$ **و قيمة الإنتاجية الحدية للعنصر** X_2 **تساوي** $P\phi_2$

وعلية فإنه عند التوازن يكون

ثمن العنصر أ = قيمة الإنتاجية الحدية للعنصر أ

ثمن العنصر ب = قيمة الإنتاجية الحدية للعنصر ب

$$P\phi_1 = p_1$$

$$P\phi_2 = p_2$$

فإذا كانت $p_1 > 0 \quad , \quad p_2 > 0 \quad , \quad P > 0$

فإنه عند التوازن يكون ..

$$\phi_1 > 0 \quad , \phi_2 > 0$$

أي انه عند التوازن تكون الإنتاجية الحدية لكل عنصر موجبة وهو نفس القول عند التوازن ينحصر الاختيار للمنشأة في إحدى النقاط التي تقع في إحدى النقاط التي تقع على الجزء من منحنى الناتج المتساوي الذي يكون فيه ميل المنحنى سالبا إما الشرط الكافي للتوازن في مثالنا السابق فيتطلب $Ø_{11} < 0$

$$\begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{vmatrix} > 0$$

ويمكن حل هذه المشكلة باستخدام دالة لاجرانج فنحصل على

$$L = \phi(X_1, X_2) + \lambda(C - P_1 X_1 - P_2 X_2)$$

$$L_1 = \frac{\partial L}{\partial X_1} = \phi_1 - \lambda P_1 = 0$$

$$L_2 = \frac{\partial L}{\partial X_2} = \phi_2 - \lambda P_2 = 0$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = C - P_1 X_1 - P_2 X_2 = 0$$

وهي الشروط الضرورية للتوازن . ومن هذه الشروط يتضح انه عند التوازن :

$$\phi_1 = \lambda P_1$$
$$\phi_2 = \lambda P_2$$

او

$$\frac{\phi_1}{P_1} = \frac{\phi_2}{P_2} = \lambda$$

أي انه عند التوازن تكون :

$$\frac{\text{الإنتاجية الحدية للعنصر } X_1}{\text{الإنتاجية الحدية للعنصر } X_2} = \frac{\text{ثمن العنصر } X_1}{\text{ثمن العنصر } X_2}$$

لكن سبق وأن رأينا أن معدل الإحلال الحدي

$$r = \frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{\left(\frac{\partial q}{\partial X_1}\right)}{\left(\frac{\partial q}{\partial X_2}\right)} = -\frac{\phi_1}{\phi_2}$$

$$r = \frac{dX_1}{dX_2} = -\frac{\left(\frac{\partial q}{\partial X_2}\right)}{\left(\frac{\partial q}{\partial X_1}\right)} = -\frac{\phi_2}{\phi_1}$$

ويلاحظ أن الشرط الكافي للتوازن يعطى :

$$\overline{H}_2 \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} = -p_2{}^2\phi_{11} + 2p_1 p_2 \phi_{12} - p_1{}^2\phi_{22} > 0$$

بتعويض قيم $p_1\ p_2$ عند التوازن نحصل على ..

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(-\phi_2{}^2\phi_{11} + 2\phi_1\phi_2\phi_{12} - \phi_1{}^2\phi_{22}\right) > 0$$

ولكن :

$$\frac{dr}{dX_2} = \frac{d\left(\frac{dX_1}{dX_2}\right)}{dX_2} = \frac{d\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{dX_2} = -\frac{1}{\phi^3{}_1}\left(\phi^2{}_2\phi_{11} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_1{}^2\phi_{22}\right)$$

من المتباينة أعلاه نحصل على

$$(-\phi^2{}_2\phi_{11} + 2\phi_1\phi_2\phi_{12} - \phi_1{}^2\phi_{22}) > 0$$

وذلك λ^2 وحيث أن من الشرط الضروري للتوازن للمنتج

$$Mp_1 > 0$$

او

$$\phi_1 > 0$$

فإن

$$\frac{dr}{dX_2} > 0$$

أي إن معدل الإحلال الحدي الفني يكون موجبا عند التوازن وبمعنى آخر يكون منحنى الناتج المتساوي مقعرا من أسفل بالقرب من نقطة الأصل .

2-3 الدوال المتجانسة

إذا أدى تغير نسبي في عناصر الإنتاج إلى تغير في كمية الإنتاج مساويا لأس معين من نسبة التغير في عناصر الإنتاج فإنه يقا إن دالة الإنتاج متجانسة وان درجة التجانس هي الأس .وعلية لو كانت دالة الإنتاج

$$q = \phi(X_1, X_2)$$

فإذا كانت مقدار ثابت وتحققت الخاصية

$$\lambda^n q = \phi(\lambda X_1, \lambda X_2)$$

يقال إن الدالة q دالة متجانسة من درجة n وإذا كانت n = 1 فإن الدالة تكون متجانسة من الدرجة الأولى أو دالة خطية متجانسة .

مـــــثال 1

الدالة ...

$$Q = 3X_1^{\,4} + 2X_1^{\,2}X_2^{\,2} + 7X_2^{\,4}$$

متجانسة من الدرجة الرابعة وذلك لان

$$\phi(\lambda X_1, \lambda X_2) = 3\lambda^4 X_1^{\,4} + 2\lambda^2 X_1^{\,2}\lambda^2 X_2^{\,2} + 7\lambda^4 X_2^{\,4} = \lambda^4 Q$$

مـــــــثال2

الدالة ..

$$Q = \frac{X_1 X_2}{X_1^{\,2} + X_2^{\,2}} = \frac{\lambda X_1 \lambda X_2}{\lambda^2 X_1^{\,2} + \lambda^2 X_2^{\,2}} = \frac{\lambda^2 (X_1 X_2)}{\lambda^2 \left(X_1^{\,2} + X_2^{\,2}\right)} = \lambda^0 Q$$

متجانسة من درجة صفر و إذا كانت دالة الإنتاج متجانسة من درجة n فان الغلة الحجم تكون متزايدة اذا كانت n > 1 وتكون الغلة متناقصة إذا كانت n < 1 وتكون الغلة ثابتة إذا كانت تساوي n = 1 وبمعنى أخر فإن دوال الإنتاج المتجانسة من الدرجة الأولى تتمتع بثبات الغلة

3-3 خصائص دوال الإنتاج المتجانسة

إذا كانت الدالة

$$q=\phi(X_1,X_2)$$

متجانسة من درجة a فإنه يمكن إثبات إن

$$i \quad Q=X_1{}^{a}\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)=X^{a}{}_{2}\psi\left(\frac{X_1}{X_2}\right)$$

$$ii \quad \frac{\partial Q}{\partial X_1},\frac{\partial Q}{\partial X_2}$$

تكونان متجانستان من درجة (a-1)

$$iii \quad Q=X_1\frac{\partial Q}{\partial X_1}+X_2\frac{\partial Q}{\partial X_2}$$

$$iv \quad X^2{}_1\frac{\partial^2 Q}{\partial X_1{}^2}+2X_1X_2\frac{\partial^2 Q}{\partial X_1\partial X_2}+X^2{}_2\frac{\partial^2 Q}{\partial X_2{}^2}=a(a-1)Q$$

وسوف نقوم بإثبات هذه الخصائص في حالة الدالة الخطية المتجانسة ..نفترض إن ...

$$q=\phi(X_1,X_2)$$

دالة متجانسة من الدرجة الأولى فإننا نحصل على ...

$$\phi(\lambda X_1,\lambda X_2)=\lambda\phi(X_1,X_2)=\lambda q$$

وذلك لآي قيمة من قيم λ

فلو افترضنا أن :

$$\lambda=\frac{1}{X_1}$$

نحصل على

$$\phi\left(\frac{X_1}{X_1},\frac{X_2}{X_1}\right)=\frac{1}{X_1}\phi(X_1,X_2)$$

$$\phi\left(1,\frac{X_2}{X_1}\right)=\frac{1}{X_1}\phi(X_1,X_2)$$

$$X_1\phi\left(1,\frac{X_2}{X_1}\right)=\phi(X_1,X_2)$$

$$X_1\phi\left(1,\frac{X_2}{X_1}\right)=q$$

ومن ثم :

$$X_1\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)=q$$

وعلية فإنه إذا كانت

$$q=\phi(X_1,X_2)$$

دالة متجانسة من الدرجة الأولى فإنه يمكن كتابتها بالصورة التالية ..

$$q=X_1\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$$

$$q=X_2\varphi\left(\frac{X_1}{X_2}\right)$$

وهو برهان الخاصية الأولى إذا كانت :

$$q=X_1\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$$

فإن :

$$\frac{\partial q}{\partial X_1}=\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)\frac{dX_1}{dX_1}+X_1\frac{\partial\left[\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)\right]}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial X_1}=\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)+X_1\phi'\left(\frac{X_2}{X_1}\right)\frac{\partial\left[\frac{X_2}{X_1}\right]}{\partial X_1}=\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)+X_1\phi'\left(\frac{X_2}{X_1}\right)\left(-\frac{X_2}{X_1^{\ 2}}\right)=\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)-\phi'\left(\frac{X_2}{X_1}\right)\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$$

كما انه إذا كانت

$$q=X_1\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$$

فإن :

$$\frac{\partial q}{\partial X_2}=\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)\frac{dX_1}{dX_2}+X_1\frac{\partial\left[\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)\right]}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial X_1}=\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)(0)+X_1\frac{\partial\left[\phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)\right]}{\partial X_2}=\phi'\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$$

وعلية فإنه إ ذا كانت دالة الإنتاج

$$q = \phi(X_1, X_2)$$

دالة خطية متجانسة فإن الإنتاجية الحدية

$$\frac{\partial q}{\partial X_1} \quad , \frac{\partial q}{\partial X_1}$$

تصبح دوال فقط لمعدل استخدام عنصري الإنتاج أي دوال للمتغير

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$$

iii) لقد أثبتنا انه إذا كانت :

$$q = \phi(X_1, X_2)$$

دالة خطية متجانسة فإنه :

$$\frac{\partial q}{\partial X_1} = \phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right) - \left(\frac{X_2}{X_1}\right) X_1 \phi'\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial X_2} = \phi'\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$$

بالجمع نحصل على :

$$\frac{\partial q}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial q}{\partial X_2} X_2$$

$$X_1 \phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right) - X_2 \phi'\left(\frac{X_2}{X_1}\right) + X_2 \phi'\left(\frac{X_2}{X_1}\right) = X_1 \phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right) = Q$$

$$Q = X_1 \phi\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$$

لكن سبق أن أثبتنا .....

وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على :

$$Q = \frac{\partial q}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial q}{\partial X_2} X_2$$

وتعرف هذه المعادلة الأخيرة بنظرية اويلر . وطبقا لهذه النظرية يساوي الإنتاج الكلي مجموع حاصل ضرب كل عنصر في إنتاجيته الحدية إذا كانت دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى .

iv) بأخذ التفاضل الجزئي لطرفي معادلة اويلر للمتغير X_1 نحصل على

$$\frac{\partial\left[X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial Q}{\partial X_2}\right]}{\partial X_1} = \frac{\partial Q}{\partial X_1}$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$X_1 \frac{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial X_1}\right)}{\partial X_1} + \frac{\partial Q}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dX_1} + X_2 \frac{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial X_2}\right)}{\partial X_1} + \frac{\partial Q}{\partial X_2}\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{\partial Q}{\partial X_1}$$

$$X_1 \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2_1} + \frac{\partial Q}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial Q}{\partial X_1}$$

$$X_1 \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2_1} + X_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1 \partial X_2} = 0 \rightarrow X_1 \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2_1} = -\frac{X_2}{X_1}\frac{\partial^2 Q}{\partial X_1 \partial X_2} \text{ or } \quad X_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2_2} = -\frac{X_1}{X_2}\frac{\partial^2 Q}{\partial X_2 \partial X_1}$$

$$X_1^{\,2} \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2_1} + X_2^{\,2} \frac{\partial^2 Q}{\partial X_2^{\,2}} + 2X_1X_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1 \partial X_2} = 0$$

ويمكن بسهولة تعميم النتائج السابقة على دوال الإنتاج المتجانسة من درجة k

4-3 <u>مرونة الإحلال</u>

تعرف مرونة الإحلال بالتغير النسبي في نسب عناصر الإنتاج إلى التغير النسبي في الأسعار النسبية لهذه العناصر :

$$\sigma_{12} = \frac{d\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}{\frac{X_1}{X_2}} \div \frac{d\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\frac{P_2}{P_1}}$$

حيث ...
X_1 تمثل الكمية المستخدمة من العنصر الأول
X_2 تمثل الكمية المستخدمة من العنصر الثاني
P_1 تمثل ثمن العنصر الأول
P_2 تمثل ثمن العنصر الثاني

ويمكننا استنتاج عدد من الصيغ لهذه المرونة التي تعبر عن شكل منحنى الناتج المتساوي

نحصل من تعريف مرونة الإحلال على

$$\sigma_{12} = \frac{d\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}{\frac{X_1}{X_2}} \times \frac{\frac{P_2}{P_1}}{d\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}$$

ولما كان ميل منحنى الناتج المتساوي يساوي ميل خط التكلفة عند توازن المنتج فإن

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{dX_1}{dX_2}$$

بتعويض هذه المعادلة الأخيرة في معادلة مرونة الإحلال نحصل على :

$$\sigma_{12} = \frac{d\left(\frac{X_1}{X_2}\right)}{\frac{X_1}{X_2}} \times \frac{\frac{P_2}{P_1}}{d\left(\frac{dX_2}{dX_1}\right)}$$

إلا أن ..

$$d\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \frac{X_2 dX_1 + X_1 dX_2}{X_2^{\ 2}}$$

$$r = \frac{dX_1}{dX_2}$$

كما أن

$$r = r\left(\frac{X_1}{X_2}\right) \qquad (3)$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial X_1}(dX_1) + \frac{\partial r}{\partial X_2}(dX_2) \qquad (4)$$

بتعويض المعادلة (2) ، (3) ، (4) في المعادلة (1) نحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{\frac{X_2 dX_1 + X_1 dX_2}{X_2^{\ 2}}}{\frac{\partial r}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial r}{\partial X_2} dX_2} \times \frac{r}{\frac{X_1}{X_2}} \qquad (5)$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{X_2 dX_1 + X_1 dX_2}{\frac{\partial r}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial r}{\partial X_2} dX_2} \times \frac{r}{X_1 X_2}$$

بضرب كل من البسط والمقام في $\frac{1}{\partial X_2}$ **وتعويض قيمة** $r = \frac{dX_1}{dX_2}$

نحصل على

$$\sigma_{12} = -\frac{rX_2 - X_1}{r\frac{\partial r}{\partial X_1} + \frac{\partial r}{\partial X_2}} \times \frac{r}{X_1 X_2} \qquad (6)$$

وهي صيغة أخرى من صيغ مرونة الإحلال .

ومن المعادلة (4) نحصل على ...

$$\frac{dr}{dX_2} = \frac{\partial r}{\partial X_1}(r) + \frac{\partial r}{\partial X_2} \qquad (7)$$

بتعويض المعادلة (7) في المعادلة (6) نحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{rX_2 - X_1}{\frac{\partial r}{\partial X_2}} \times \frac{r}{X_1 X_2} \qquad (8)$$

وهي صيغة ثالثة من صيغ مرونة الإحلال ، وتوضح هذه الصيغة أن مرونة الإحلال تتناسب تناسبا عكسيا مع $\frac{dr}{dX_2}$ **. كما يلاحظ أن مرونة الإحلال تكون موجبة** $\sigma = 0$ **إذا كان منحنى الناتج المتساوي مقعراً بالنسبة لنقطة الأصل أي إذا كانت** $\frac{dr}{dX_2} > 0$ **وكان معدل الإحلال الحدي سالبا** $r < 0$
ولما كانت قيمة r **عند التوازن تساوي :**

$$r = \frac{\partial q}{\partial X_2} \bigg/ \frac{\partial q}{\partial X_1} = -\frac{\phi_2}{\phi_1} \qquad (9)$$

بتعويض المعادلة 9 في المعادلة 8 نحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{X_2\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right) - X_1}{\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\frac{\partial\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{\partial X_1} + \frac{\partial\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{\partial X_2}} \times \frac{\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{X_1 X_2}$$

$$\sigma_{12}=-\frac{X_2\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2-X_1\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\frac{\phi_1\phi_{21}}{\phi_1^{\,2}}+\frac{\phi_1\phi_{22}+\phi_2\phi_{21}}{\phi_1^{\,2}}}\times\frac{\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{X_1X_2}$$

وبضرب وقسمة المقام في $\phi_1^{\,2}$ نحصل على :

$$\sigma_{12}=-\frac{\left(-\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\ -X_2\left(\frac{\phi_2+X_1\phi_1}{\phi_1}\right)}{\frac{\phi_1\phi_2\phi_{21}}{\phi_1^{\,3}}-\frac{\phi_2^{\,2}\phi_{11}}{\phi_1^{\,3}}-\frac{\phi_1^{\,2}\phi_{22}}{\phi_1^{\,3}}+\frac{\phi_1\phi_2\phi_{21}}{\phi_1^{\,3}}}\times\frac{1}{X_1X_2}$$

بالاختصار نحصل على

$$\sigma_{12}=-\frac{X_1\phi_1-X_2\phi_2}{-\phi_1^{\,2}\phi_{22}-\phi_2^{\,2}\phi_{11}+2\phi_1\phi_2\phi_{21}}\times\frac{\phi_1\phi_2}{X_1X_2}\qquad(10)$$

وهي الصيغة الرابعة من صيغ مرونة الإحلال ويمكن استخدام المصفوفات في إعادة صياغة هذه المعادلة الأخيرة . فنحصل على :

$$\sigma_{12}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i\phi_i}{X_1X_2}\times\frac{\overline{H}**_{12}}{\overline{H}*_2}\qquad(11)$$

حيث :

$$\overline{H_2}*\begin{vmatrix}\phi_{11}&\phi_{12}&-\phi_1\\ \phi_{21}&\phi_{22}&-\phi_2\\ -\phi_1&-\phi_2&0\end{vmatrix}==-\phi_1^{\,2}\phi_{22}-\phi_2^{\,2}\phi_{11}+\ 2\phi_1\ \phi_2\ \phi_{12}$$

وحيث $\overline{H}^{**}_{12}$ هي المصغر الأساسي للمحددة $\overline{H}^{*}_2$ الذي يتبقى بعد حذف الصف الأول والعمود الثاني أو

$$\overline{H}**_{12}=\begin{vmatrix}\phi_{21}&-\phi_2\\ -\phi_1&0\end{vmatrix}=(-1)-\phi_1\phi_2$$

وإذا كان هناك أكثر من عنصري إنتاج ورغبنا إيجاد مرونة الإحلال بين عنصرين منهما فإنه يمكننا تعميم المعادلة (11) أعلاه فنحصل على :

حيث : -

$$\overline{H}^*_n = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{1n} & -\phi_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{2n} & -\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{nn} & -\phi_n \\ -\phi_1 & -\phi_2 & -\phi_n & 0 \end{vmatrix}$$

وحيث $\overline{H}^{**}_{12}$ يمثل المصغر الأساسي للمحددة $\overline{H}^*_n$ الذي يبقى بعد حذف الصف i والعمود j

5-3 مرونة الإحلال لدوال الإنتاج المتجانسة

تعطي الصيغة الرابعة من صيغ مرونة الإحلال المعادلة

$$\sigma_{12} = -\frac{X_1\phi_1 - X_2\phi_2}{-\phi_1^2\phi_{22} - \phi_2^2\phi_{11} + 2\phi_1\phi_2\phi_{21}} \times \frac{\phi_1\phi_2}{X_1X_2} \quad (10)$$

إذا كانت دالة الإنتاج

$$q = \phi(X_1 \, , X_2)$$

إذا كانت الدالة متجانسة من الدرجة الأولى فأنه طبقا للخاصية الرابعة :

$$\phi_{22} = -\frac{X_1}{X_2}\phi_{21} \; , \qquad \phi_{11} = -\frac{X_2}{X_1}\phi_{12}$$

بتعويض هاتين المعادلتين في صيغة مرونة الإحلال بالنسبة للدالة المتجانسة من الدرجة الأولى :

$$\sigma_{12} = -\frac{X_1\phi_1 - X_2\phi_2}{-\phi_1^2\frac{X_1}{X_2}\phi_{21} - \phi_2^2\frac{X_2}{X_1}\phi_{21} + 2\phi_1\phi_2\phi_{21}} \times \frac{\phi_1\phi_2}{X_1X_2} \quad (10)$$

او

$$\sigma_{12} = -\frac{\phi_1\phi_2(X_1\phi_1 - X_2\phi_2)}{\phi_{12}(\phi_1^2X_1^2 + \phi_2^2X_2^2 + 2\phi_1\phi_2X_1X_2)}$$

ولكن من نظرية اويلر نحصل على :

$$q = \left(X_1\phi_1 + X_2\phi_2\right)$$

$$q^2 = \left(\phi_1{}^2 X_1{}^2 + \phi_2{}^2 X_2{}^2 + 2\phi_1\phi_2 X_1 X_1\right)$$

بتعويض هاتين المعادلتين في معادلة مرونة الإحلال نحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{\phi_1\phi_2 Q}{\phi_{12} Q^2} = \frac{\phi_1\phi_2}{\phi_{12} Q}$$

وتمثل هذه المعادلة صيغة مرونة الإحلال بالنسبة لدالة الإنتاج المتجانسة من الدرجة الأولى ويمكن إعادة كتابتها كالآتي :

$$\sigma_{12} = -\frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial X_2}\right)}{Q\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial X_1 \partial X_2}\right)}$$

ويمكن تعميم مرونة الإحلال لدوال الإنتاج المتجانسة من درجة k فنحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{\phi_1\phi_2}{KQ\phi_{12} - (K-1)\phi_1\phi_2}$$

6-3 <u>دوال إنتاج كوب دوجلاس</u>

تعطي الصيغة الرابعة من صيغ مرونة الإحلال المعادلة تأخذ هذه الدالة الصيغة

$$q = A\ L^{\alpha}\ K^{\beta}$$

حيث ..

q **الكمية المنتجة**

A **ثابت يعبر عن دور التقنية**

L **وحدات من العنصر العمل**

K **وحدات عنصر رأس المال**

α **ثابت يمثل مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل**

β **ثابت يمثل مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال**

حيث

$$q > 0\ ,\ A > 0\ , L > 0\ ,\ K > 0$$

أما $0 < \alpha\ ,\ \beta < 1$

وتحمل هذه الدالة الخصائص الآتية ..

هي دالة متجانسة من درجة $\alpha + \beta$ فإذا تغيرت عناصر الإنتاج بنسبة ثابتة λ فإن ذلك سوف يؤدي إلى زيادة في الإنتاج قدرها $\alpha + \beta$:

$$q = A\,\lambda^{\alpha}\,L^{\alpha}\lambda^{\beta}K^{\beta} = \lambda^{(\alpha+\beta)}\,q$$

فإذا كانت $(\alpha + \beta) = 1$ فإن دالة كوب دوجلاس تكون متجانسة من الدرجة الأولى ويمكن كتابتها كالآتي :

$$\mathbf{q = A\ L^{\alpha}\ K^{(1-\alpha)}}$$

وعليه :

1- إذا كانت $(\alpha + \beta) = 1$ ... تكون غلة الإنتاج ثابتة
2- إذا كانت $(\alpha + \beta) > 1$ ... يخضع الإنتاج لتزايد الغلة
3- إذا كانت $(\alpha + \beta) < 1$ ... يخضع الإنتاج لتناقص الغلة أو الغلة المتناقصة

طبقا لدالة كوب دوجلاس تكون الإنتاجية الحدية لكل عنصر موجبة ولكن تخضع لقانون تناقص الغلة : فبالنسبة لعنصر العمل : M_{pL}

$$MpL = \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{\alpha q}{L} > 0$$

$$\frac{\partial (MpL)}{\partial L} = \frac{\partial^2 q}{\partial L^2} = \alpha(\alpha - 1)\frac{q}{L^2} < 0$$

إما بالنسبة لعنصر رأس المال

$$MpK = \frac{\partial q}{\partial K} = \frac{\beta q}{K} > 0$$

$$\frac{\partial (MpK)}{\partial K} = \frac{\partial^2 q}{\partial K^2} = \beta(\beta - 1)\frac{q}{K^2} < 0$$

1- تتزايد الإنتاجية الحدية لكل عنصر نتيجة زيادة العنصر الآخر المشترك معه في العملية الإنتاجية أو ..

$$\frac{\partial (MpK)}{\partial L} = \frac{\partial^2 q}{\partial K \partial L} = \frac{\alpha\beta q}{LK} > 0$$

$$\frac{\partial (MpL)}{\partial K} = \frac{\partial^2 q}{\partial L \partial K} = \frac{\alpha\beta q}{LK} > 0$$

2- يكون معدل الإحلال الحدي طبقا لدالة كوب دوجلاس سالبا ويتوقف على النسبة التي تستخدم بها عناصر الإنتاج ومرونة الإنتاج بالنسبة لكل منها .

$$r=\frac{dK}{dL}=-\frac{MpL}{MpK}=-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{K}{L}<0$$

3- تكون مرونة الإنتاج بالنسبة لكل عنصر ثابتة .

$$\eta_{qL}=\frac{\partial q}{\partial L}\quad\frac{L}{q}=\alpha$$
$$\eta_{qK}=\frac{\partial q}{\partial K}\quad\frac{K}{q}=\beta$$

4- مرونة إحلال دالة كوب دوجلاس تساوي الواحد صحيح .

ويمكن اشتقاق هذه المرونة كالآتي :

$$\sigma_{12}=-\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}\times\frac{\frac{dK}{dL}}{d\left(\frac{dK}{dL}\right)}$$

$$\sigma_{12}=-\frac{\frac{dK}{dL}}{\left(\frac{K}{L}\right)}\div\frac{d\left(\frac{dK}{dL}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)}$$

لكننا نحصل من دالة كوب دوجلاس على ..

$$r=\frac{dK}{dL}=-\left(\frac{MpL}{MpK}\right)=-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\frac{\frac{dK}{dL}}{\left(\frac{K}{L}\right)}=-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$\frac{d\left(\frac{dK}{dL}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)}=-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\frac{dK}{dL}}{\left(\frac{K}{L}\right)} \div \frac{d\left(\frac{dK}{dL}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)} = \left[-\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \div \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right] = -1$$

أي انه طبقا لدالة إنتاج كوب دوجلاس إذا تغيرت الأسعار النسبية لعناصر الإنتاج بمقدار واحد بالمائة فإنه سوف يتبع ذلك تغيرا في الاستخدام النسبي لهذه العناصر بمقدار واحد بالمائة أيضا

7-3 **دالة إنتاج C.E.S تأخذ هذه الدالة الصيغة التالية**

$$q = A\left[\lambda K^{-\rho} + (1-\lambda)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

حيث ..

- **q** **الكمية المنتجة**
- **A** **ثابت يعبر عن الكفاءة أو دور التقنية**
- **L** **وحدات من العنصر العمل**
- **K** **وحدات عنصر رأس المال**
- **λ** **ثابت يمثل توزيع الدخل بين العناصر**
- ρ **ثابت يمثل مرونة الإحلال**

حيث $q > 0$, $A > 0$, $L > 0$, $K > 0$ $\delta > 0$

أما $0 < \lambda < 1$, $\rho > -1$

وقد سميت هذه الدالة بالدالة ذات مرونة الإحلال الثابتة لأنها تعطي مرونة إحلال ثابتة ρ ولكنها لا تساوي واحد صحيح كما هو الحال في دالة إنتاج كوب دوجلاس . وقد قام بتأليف دالة إنتاج C . E . S أربعة اقتصاديين وتحمل هذه الدالة الخصائص الآتية ..

1- **تعتبر هذه الدالة متجانسة من الدرجة الأولى . فلو افترضنا زيادة كل عنصر من عناصر الإنتاج بنسبة ثابتة α نحصل على**

$$q = \delta\left[\lambda\left(\alpha^{-\rho}\right)K^{-\rho} + (1-\lambda)\left(\alpha^{-\rho}\right)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} = \alpha q$$

وعلية فإن هذه الدالة تحقق غلة حجم ثابتة ...

2- تحقق هذه الدالة إنتاجية حدية موجبة لكل عنصر من عناصر الإنتاج .

فبالنسبة لعنصر العمل ورأس المال حصل على

$$\frac{\partial q}{\partial L} = \frac{-1}{\rho}\gamma\left[\lambda L^{-\rho} + (1-\lambda)K^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}(-\rho)\lambda L^{-\rho-1} = \lambda\gamma^{-\rho}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+\rho} > 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial K} = \frac{-1}{\rho}\gamma\left[\lambda L^{-\rho} + (1-\lambda)K^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}(-\rho)(1-\lambda)K^{-\rho-1} = (1-\lambda)\gamma^{-\rho}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+\rho} > 0$$

3- تتناقص الإنتاجية الحدية لكل عنصر مع زيادة الوحدات المستخدمة من هذا العنصر وثبات عدد الوحدات المستخدمة من العنصر المرافق أي أن الإنتاجية لكل عنصر تخضع لقانون تناقص الغلة .فبالنسبة لعنصر العمل ورأس المال نحصل على :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial L^2} = \left(-\frac{1}{\rho}-1\right)\gamma(\lambda)[\lambda L^{-\rho} + (1-\lambda)K^{-\rho}]^{--\frac{1}{\rho}-2} L^{-\rho-1}\left(L^{-\rho-1}\right) + \gamma(\lambda)(-\rho-1)K^{-\rho-2}\frac{-1}{\rho}\left(-\frac{1}{\rho}-2\right)[\lambda L^{-\rho} + (1-\lambda)K^{-\rho}]^{--\frac{1}{\rho}-1}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial K^2} = \left(-\frac{1}{\rho}-1\right)\gamma(1-\lambda)[\lambda L^{-\rho} + (1-\lambda)K^{-\rho}]^{--\frac{1}{\rho}-2} K^{-\rho-1}\left(K^{-\rho-1}\right) + \gamma(1-\lambda)(-\rho-1)K^{-\rho-2}\frac{-1}{\rho}\left(-\frac{1}{\rho}-2\right)[\lambda L^{-\rho} + (1-\lambda)K^{-\rho}]^{--\frac{1}{\rho}-1}$$

لكن من معطيات دالة C . E. S

حيث

$$q>0 \quad , \quad A>0 \quad , \quad L>0 \quad , \quad K>0 \quad , \quad \delta>0$$

أما

$$(q)>0 \quad , \quad 0<\lambda<1 \quad , \quad \rho>-1 \quad , \quad K>0 \quad , \quad \delta>01-\lambda$$

وعلية نحصل على :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial L^2}<0$$

اذا كانت

$$\frac{\partial q}{\partial L} \quad L-q \quad <0$$

ونحصل على

$$\frac{\partial^2 q}{\partial K^2}<0$$

إذا كانت

$$\frac{\partial q}{\partial K} \quad K-q \quad <0$$

ولما كانت دالة الإنتاج C . E . S متجانسة من الدرجة الأولى فإن نظرية اويلر تنطبق عليها ومن ثم

$$Q = L\frac{\partial Q}{\partial L} + K\frac{\partial Q}{\partial K} = Q$$

أي أن :

$$Q - K\frac{\partial Q}{\partial K} = L\frac{\partial Q}{\partial L} > 0$$

وكذلك ..

$$Q - L\frac{\partial Q}{\partial L} = K\frac{\partial Q}{\partial K} > 0$$

ومن ثم :

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} - Q < 0 \quad \text{و} \quad L\frac{\partial Q}{\partial L} - Q < 0$$

ويتبع ذلك أن

$$\frac{\partial^2 q}{\partial L^2} < 0$$

و

$$\frac{\partial^2 q}{\partial K^2} < 0$$

وعلية فإن الإنتاجية الحدي لكل عنصر تخضع طبقا لهذه الدالة لقانون تناقص الغلة

4- تتزايد الإنتاجية الحدية للعنصر المعين إذا ما زادت الكمية المستخدمة من العنصر المرافق أي أن .....

$$\frac{\partial(MpL)}{\partial K} = \frac{\partial(MpK)}{\partial L} = \frac{\partial^2 q}{\partial L \partial K} = \frac{\partial^2 q}{\partial K \partial L}$$

وهي كمية موجبة .

$$= \lambda(1+\rho)(1-\lambda)\,\gamma^{-2\rho}\; Q^{1+2\rho}\,(LK)^{-(1+\rho)}$$

5- معدل الإحلال الحدي الفني r لدالة الإنتاج سالب ويتضح من الآتي

$$r = \frac{dK}{dL} = -\frac{MpL}{MpK}$$

$$r = -\frac{(1-\lambda)\gamma^{-\rho}\left(\frac{q}{L}\right)^{1+\rho}}{(\lambda)\gamma^{-\rho}\left(\frac{q}{K}\right)^{1+\rho}} = -\frac{(1-\lambda)}{(\lambda)}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho}$$

6- مرونة إحلال دالة إنتاج C . E . S ثابتة وتساوي :

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}$$

حيث

$$\rho > -1$$

ويمكن إثبات ذلك كالآتي :

حيث أن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى فإنه يمكن أن نطبق بشأنها معادلة مرونة الإحلال :

$$\sigma = -\frac{\left(\frac{\partial q}{\partial L}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right)}{q\left(\frac{\partial^2 q}{\partial L \partial K}\right)} = \frac{\left[-\lambda\gamma^{-\rho}\left(\frac{q}{L}\right)^{1+\rho}\right]\left[(1-\lambda)\gamma^{-\rho}\left(\frac{q}{K}\right)^{1+\rho}\right]}{\lambda(1-\lambda)(1+\rho)\,\gamma^{-2\rho}\,(q)^{1+2\rho}\,(LK)^{-(1+\rho)}}$$

وبتعويض هذه المعادلات في معادلة مرونة الإحلال نحصل على :

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}$$

وتوضح هذه الدالة النتيجة أن مرونة إحلال دالة إنتاج C . E . S ثابتة ولكنها لا تساوي بالضرورة واحد صحيح ..