الفهرس

1- **الفصل الأول**	**3**
1-1 التغير الحدي و المرونات التعريف الرياضي للتغير الحدي	**4-3**
2-1 العلاقة بين التكلفة المتوسطة والتكلفة الحدية	**5-4**
3-1 العلاقة بين التكلفة الحدية والإنتاجية الحدية	**6-5**
4-1 أنواع المرونات	**7-6**
5-1 العلاقة بين الإيراد الحدي ومرونة الطلب	**7**
6-1 التغير الحدي والسلع المرتبطة	**8-7**
7-1 مرونات الطلب الجزئية والسلع المرتبطة	**9-8**
8-1 تطبيق الفصل الأول	**13-10**
2- **الفصل الثاني**	**14**
1-2 المدرسة التقليدية	16-14
2-2 مدخل منحنيات السواء	16-16
3-2 تناقص المنفعة ومعدل الإحلال الحدي	17-16
4-2 مرونة منحنى السواء	17-17
5-2 توازن المستهلك طبقا لمدخل منحنيات السواء ومدلولاته	20-17
6-2 الأثر ألدخلي والأثر الاحلالي لتغير السعر	22-20
7-2 توازن المستهلك ومرونة الإحلال	24-22
8-2 العلاقة بين مرونة الإحلال ومرونة الطلب التقاطعية	26-24
9-2 تطبيقات الفصل الثاني	32-27
3- **الفصل الثالث**	**33**
1-3 دالة الإنتاج ومعامل الإحلال الحدي الفني	35-33
2-3 الدوال المتجانسة	36-35
3-3 خصائص دوال الإنتاج المتجانسة	38-36
4-3 مرونة الإحلال	40-38
4-3 مرونة الإحلال لدوال الإنتاج المتجانسة	41-41
6-3 دالة إنتاج كوب دوجلاس	43-42
7-3 دالة إنتاج .C.E.S	45-44
8-3 تطبيق الفصل الثالث	49-46
4- **الفصل الرابع**	**50**
1-4 دالة التكاليف	51-50
2-4 مرونة التكاليف وغلة الحجم	52-51
3-4 شروط تصغير تكلفة الإنتاج	55-52
4-4 تكلفة الإنتاج طويلة الأجل	55-55
5-4 تكلفة إنتاج المنشات ذو المنتجات المتعددة	56-55
6-4 اشتقاق دالة التكاليف من دالة الإنتاج حالة كوب دوجلاس	**56**
1-6-4 حالة دالة كوب دوجلاس	57-56
4 -6-2 حالة دالة الإنتاج .C.E.S	60-58
4- 7 تطبيق الفصل الرابع	64-61
5- **الفصل الخامس**	**65**
1-5 حالة المنافسة الكاملة	66-65
2-5 حالة الاحتكار الكامل	70-66
3-5 حالة احتكار القلة	75-70
4-5 تطبيق الفصل الخامس	79-76
6- **الفصل السادس**	**80**
1-6 كيون تكا	84-80
2-6 تطبيق كيون تكا	87-85
7- **الامتحانات**	**88**
1-7 امتحانات فصلية	93-88
2-7 امتحانات نهائيه	100-94
3-7 مجموعة امتحانات	103-101

الفصل الرابع **نظرية التكاليف**

1-4 دالة التكاليف

تعرف العلاقة بين تكلفة الإنتاج وبين مستوى الإنتاج بدالة التكاليف ويمكن التعبير عنها كالآتي ..

$$C = f(q)$$

حيث ..

C التكلفة الكلية

q مستوى الإنتاج

ويمكن استنتاج التعاريف الآتية ..

متوسط التكاليف المتغيرة = أجمالي التكاليف المتغيرة ÷ عدد الوحدات المنتجة

متوسط التكاليف الثابتة = أجمالي التكاليف الثابتة ÷ عدد الوحدات المنتجة

متوسط التكاليف الكلية = أجمالي التكاليف الكلية ÷ عدد الوحدات المنتجة

التكاليف الحدية = التغير في التكاليف الكلية عند تغير الإنتاج بوحدة واحدة

$$Mc = \frac{dc}{dq}$$

تتناقص التكلفة الحدية إذا كان ..

$$\frac{d(Mc)}{dq} = \frac{d^2c}{dq^2} < 0$$

تتزايد التكلفة الحدية إذا كان ..

$$\frac{d(Mc)}{dq} = \frac{d^2c}{dq^2} > 0$$

تبقى التكلفة الحدية ثابتة إذا كان ..

$$\frac{d(Mc)}{dq} = \frac{d^2c}{dq^2} = 0$$

مثال : نفترض دالة التكاليف الآتية

$$C = aq^3 - bq^2 + gq + F$$

F التكلفة الثابتة

$aq^3 - bq^2 + gq$ التكلفة المتغيرة

متوسط التكاليف الثابتة تساوي

$$\frac{F}{q}$$

متوسط التكاليف المتغيرة

$$\frac{V}{q} = AVc = \frac{aq^3 - bq^2 + gq}{q} = aq^2 - bq + g$$

متوسط التكاليف الكلية

$$\frac{C}{q} = \frac{aq^3 - bq^2 + gq + F}{q} = aq^2 - bq + g + \frac{F}{q}$$

وعلية فإن متوسط التكاليف المتغيرة = متوسط التكاليف الكلية – متوسط التكاليف الثابتة

$$AVc = ATc - AF$$

والتكلفة الحدية ..

$$Mc = \frac{dc}{dq}$$

$$Mc = 3aq - 2bq + g$$

ويلاحظ أن التكلفة الحدية تساوي التكلفة المتوسطة عندما تكون الأخيرة عند نهايتها الصغرى

$$Mc = ATc_{\min}$$

$$ATc = \frac{aq^3 - bq^2 + gq + F}{q}$$

$$\frac{d(ATc)}{dq} = \frac{[3aq^2 - 2bq \quad + g]q - C}{q^2} = 0$$

$$3aq^3 - 2bq^2 + gq = C$$

$$3aq^2 - 2bq \quad + g = \frac{C}{q}$$

أي انه عندما يكون متوسط التكاليف عند نهايتها الصغرى نحصل على

$$Mc = ATc_{\min}$$

ويمكن تحديد ما إذا كانت التكلفة الحدية في مثالنا هذا تتناقص أو تتزايد أو تبقى ثابتة مع زيادة الإنتاج

$$MC = [3a\,q^2 - 2b\,q + g\,] \rightarrow \frac{d(Mc)}{dq} = 6aq - 2b = 0 \rightarrow 6aq = 2b \rightarrow q = \frac{2b}{6a} = \frac{b}{3a}$$

واضح أن

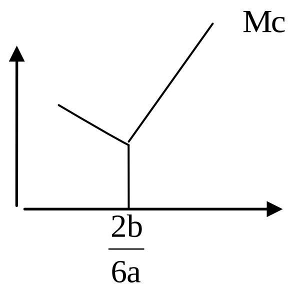
إذا كانت

$$q = \frac{2b}{6a} = \frac{b}{3a}$$

وتكون

$$\frac{d(Mc)}{dq} > 0 \quad \rightarrow 6aq - 2b \quad if \rightarrow q > \frac{2b}{6a} \qquad \frac{d(Mc)}{dq} < 0 \quad \rightarrow 6aq - 2b \quad if \rightarrow q < \frac{2b}{6a}$$

وعلية فإن التكلفة الحدية تتناقص عند مستويات اقل من 2b/6a وتتزايد عند مستويات التي تفوق 2b/6a .



2-4 **مرونة التكاليف وغلة الحجم**

تعرف مرونة تكاليف الإنتاج كالآتي : -

$$S = \frac{dc}{dq} \times \frac{q}{c}$$

حيث

c جملة التكاليف

q وحدات الإنتاج

ويرمز أحيانا إلى S بمعامل التكاليف النسبية

كما يرمز إلى مقلوب $\frac{1}{S}$ بمعامل الكفاءة النسبية للمنشأة

ويمكن استخدام مرونة التكلفة الكلية بالنسبة للإنتاج ومرونة التكلفة المتوسطة بالنسبة للإنتاج في توضيح العلاقة بين التكلفة الحدية والمتوسطة وتحديد ما إذا كانت تكلفة الحجم متناقصة أو متزايدة . فمرونة التكاليف المتوسطة تعرف كالتالي .

$$S=\frac{dTc}{dq}\times\frac{Q}{TC}\quad =Mc\times\frac{Q}{TC}\quad \to K'=\frac{d\left(ATc\right)}{dq}\times\frac{Q}{\left(ATc\right)}=\frac{d\left(ATc\right)}{dq}\times\frac{Q}{\frac{\left(Tc\right)}{Q}}=\frac{d\left(ATc\right)}{dq}\times\frac{Q^2}{\left(Tc\right)}$$

$$S'=\frac{Q\left(\frac{dTc}{dQ}\right)-Tc}{Q^2}\times\frac{Q^2}{Tc}\to\left[\frac{Q\left(Mc\right)-Tc}{Q^2}\times\frac{Q^2}{Tc}\right]\to\left\|\frac{Q\left(Mc\right)}{Tc}-\frac{Tc}{Tc}\right\|\to S'=\left(\left(Mc\right)\times\frac{Q}{Tc}\right)-\frac{Tc}{Tc}=S-1$$

وعلية فإن

$$S'=S-1$$

أي انه إذا كانت $S<1$ فإن مرونة التكاليف المتوسطة S' سوف تكون سالبة

وهذا يشير إلى وجود تكلفة متناقصة أي أن الزيادة في الإنتاج سوف تتحقق بزيادة نسبة اقل في التكاليف .

والعكس لو كانت $S>1$.

أما إذا كانت $S=1$ فإن التكلفة تكون ثابتة أي أن الزيادة الطفيفة في الإنتاج سوف يتبعها زيادة في التكاليف بنفس النسبة

وفي هذه الحالة $S'=0$

ويكون لدينا

$$S=\frac{dc}{dq}\times\frac{q}{c}=1$$

أي أن

$$\frac{dc}{dq}=\frac{c}{q}$$

فالتكلفة الحدية تتساوى مع التكلفة المتوسطة وتكون الأخيرة ثابتة عند كل حجم إنتاج (ثبات التكلفة) .

3-4 **شروط تصغير تكلفة الإنتاج**

لنفترض أن تكلفة الإنتاج الثابتة هي **F** وعلية فإن هذه التكاليف لن تتغير المنتجات أو عناصر الإنتاج . ولنفترض إن عناصر الإنتاج هي **X_1 . X_2 , ..., Xn** وانه يمكن شراء أي كميات منها بالأسعار $P_1, P_2, .., Pn$ فنحصل على

$$C = F + \sum_{i=1}^{n} PiXi$$

حيث .. **C** التكاليف الكلية .

ولنفترض أن دالة الإنتاج هي .. **$Q = Ø (X_1 , X_2,\ldots,Xn)$**

فتصبح مشكلتنا تحقيق اقل تكلفة ممكنة لإنتاج كمية ثابتة أو ...

Minimize $$C = F + \sum_{i=1}^{n} PiXi$$

S.T $q` = U = Ø (X_1 , X_2,\ldots,Xn)$

أي أن المطلوب هو الحصول على اقل تكاليف ممكنة مع مراعاة قيد الإنتاج أي الحصول على مقدار ثابت من الإنتاج .. وباستخدام دالة

لاجرانج نحصل على .. $$L = F + \sum_{i=1}^{n} PiXi + \lambda\left(q' - \phi\left(X_1, X_2, ..., Xn\right)\right)$$

وتعطى الشروط الضرورية للتوازن ...

$$Li = \partial L / \partial xi = pi - \lambda\ øi = 0$$

$$L\lambda = q` - Ø (X_1 , X_2,\ldots,Xn)$$

حيث ..

$$Ø i = \partial Ø / \partial xj \qquad (i= 1, ..., n)$$

ومن هذه الشروط نحصل على ..

$$Ø_1/P_1 = Ø_2/P_2 = ...= Øn/Pn = 1/ \lambda$$

وتوضح هذه المعادلة الأخيرة انه عندما تكون التكاليف عند نهايتها الصغرى فإن الإنتاجية الحدية لأخر وحدة نقدية **$1/\lambda$** سوف تكون متساوية في كل وجه من أوجه الإنفاق . ويمكن إثبات أن **λ** تمثل التكلفة الحدية أي يمكن إثبات أن : **$\lambda = \partial c / \partial q$**

فواضح من معادلة التكاليف أن . $$dC = \sum_{i=1}^{n} PidXi + \sum_{i=1}^{n} dPiXi .$$

وواضح من دالة الإنتاج أن $$dq = \sum_{i=1}^{n} \phi idXi$$ وبقسمة المعادلتين نحصل (بافتراض ثبات الأسعار) على ...

$$\frac{dC}{dQ} = \frac{\sum_{i=1}^{n} PidXi + \sum_{i=1}^{n} dPiXi}{\phi_1 dX_1 + \phi_2 dX_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} PidXi + \sum_{i=1}^{n} dPiXi}{\sum_{i=1}^{n} \phi idXi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi i\lambda\ dXi + 0}{\sum_{i=1}^{n} \phi idXi} = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} \phi idXi}{\sum_{i=1}^{n} \phi idXi} = \lambda$$

لكن من شروط التوازن أعلاه نحصل على .. $pi = \lambda\ øi.$

وعلية فإنه عند التوازن نحصل على .. $Pi = \partial c / \partial q\ \ øi$

وتشير هذه المعادلة الأخيرة إلى انه عندما تكون التكاليف قد وصلت إلى أدني حد لها عند مستوى إنتاج معين فإن ثمن العنصر للإنتاج لابد وان يساوي التكلفة الإنتاجية الحدية المادية لهذا العضو مضروبة في التكلفة الحدية . أيضا من المعادلة **$\partial c / \partial q = \lambda$**

نحصل على $\partial \lambda / \partial q = \partial^2 c / \partial q^2$

وكذلك .. $\partial \lambda / \partial p_j = \partial^2 c / \partial q \, \partial p_j$

إلا انه عند التوازن .. $\lambda = p_j / \phi_j$

وبالتعويض نحصل على ..
$$\frac{d\lambda}{dP_j} = \frac{\phi_j \frac{\partial P_j}{\partial P_j} - P_j \frac{\partial \phi_j}{\partial P_j}}{\phi_j^{2}} = \frac{1}{\phi_j}$$

وبما أن $\phi_j = \partial q / \partial x_j$ إذن ...

$$\partial \lambda / \partial p_j = \partial x_j / \partial q$$

وبتعويض قيم $\partial \lambda / \partial p_j$

نحصل على ... $\partial^2 c / \partial q \, \partial p_j = \partial x_j / \partial q$

وتشير المعادلة الأخيرة إلي أن التغير في أي عنصر من عناصر الإنتاج بالنسبة للكمية المنتجة لابد وان يساوي التغير في التكلفة الحدية بالنسبة لثمن هذا العنصر . ويتطلب الشرط الكافي للتوازن أن تكون كافة محددات هيشيان المطوقة سالبة أو

$$H`_j < 0 \qquad (j = 2,3\ldots, n)$$

حيث ...
$$\overline{H}n = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} & \phi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L2n & \phi 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} & \phi_n \\ \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n & 0 \end{vmatrix}$$

وفي حالة ما إذا كان هناك عنصرين إنتاج فقط فان الشرط الكافي يتطلب $H`_2$ سالبة ويمكن إثبات أن هذا اشرط يتحقق بالتعويض **نحصل على**
$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} -\lambda\phi_{11} & -\lambda\phi_{12} & -\phi_1 \\ -\lambda\phi_{21} & -\lambda\phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$
وبتعويض المعادلة $p_i = \phi_i \lambda$ نحصل على ..

$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} -\lambda\phi_{11} & -\lambda\phi_{12} & -\frac{P_1}{\lambda} \\ -\lambda\phi_{21} & -\lambda\phi_{22} & -\frac{P_2}{\lambda} \\ -\frac{P_1}{\lambda} & -\frac{P_2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} = \overline{H}_2 = \frac{1}{\lambda}\{ p_1^2 \phi_{22} - 2 p_1 p_2 \phi_{12} + p_2^2 \phi_{11} \}$$

وحيث أن $\lambda > 0$ فأن الكميات داخل القوس لابد وان تكون سالبة حتى يتحقق الشرط الكافي للتوازن إلا أن هذه الكميات ليست إلا صيغة تربيعي في المتغيرين p_1, p_2 وعلية تكون سالبة بالتأكيد إذا كانت .. $\phi_{11} < 0$ $\phi_{11} \phi_{22} > \phi_{12}^2$ وعلية فأن تناقص الإنتاجية الحدية لعناصر الإنتاج ليست شرطا كافيا لتحقيق اقل تكلفة ممكنة .

<u>مثال</u> المطلوب تصغير دالة التكاليف الآتية إلى أدنى حد مع مراعاة قيد الإنتاج المعطى بدالة الإنتاج المذكورة :

Minimize : $C = P_1 X_1 + P_2 X_2$ **ST : $q` = A X_1^{\alpha} X_2^{1-\alpha}$**

$$L = P_1X_1 + P_2X_2 + \lambda\left(q' - X_1^{\alpha}X_2^{(1-\alpha)}\right)$$

$$L_1 = P_1 - \alpha\lambda X_1^{\alpha-1}X_2^{(1-\alpha)} = 0 \to P_1 - \frac{\alpha\lambda q}{X_1} = 0 \to P_1 = \frac{\alpha\lambda q}{X_1}$$

من دالة لاجرانج نحصل على ..

$$L_2 = P_2 - (1-\alpha)\lambda X_1^{\alpha}X_2^{(-\alpha)} = 0 \to P_2 - \frac{(1-\alpha)\lambda q}{X_2} = 0 \to P_2 = \frac{(1-\alpha)\lambda q}{X_2}$$

$$L\lambda = q' - X_1^{\alpha}X_2^{(1-\alpha)} = 0 \to q' = X_1^{\alpha}X_2^{(1-\alpha)}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{\alpha\lambda q}{X_1}}{\frac{(1-\alpha)\lambda q}{X_2}} \to \frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha X_2}{(1-\alpha)X_1} \to (1-\alpha)P_1X_1 = \alpha P_2X_2$$

ويتطلب الشرط الكافي أن تكون H`2 < 0

$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{X_1^2}\alpha(\alpha-1)q' & -\frac{\lambda}{X_1X_2}\alpha(\alpha-1)q' & -\frac{\alpha q'}{X_1} \\ -\frac{\lambda}{X_1X_2}\alpha(\alpha-1)q' & -\frac{\lambda}{X_2^2}\alpha(\alpha-1)q' & -\frac{(1-\alpha)q'}{X_2} \\ -\frac{\alpha q'}{X_1} & -\frac{(1-\alpha)q'}{X_2} & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وبتعويض الشرط الضروري للتوازن نحصل على. $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha X_2}{(1-\alpha)X_1}$

$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} -\frac{P_1}{X_1}(\alpha-1) & -\frac{P_2\alpha}{X_1} & -\frac{\alpha q'}{X_1} \\ -\frac{P_1}{X_2}(1-\alpha) & -\frac{P_2\alpha}{X_1} & -\frac{(1-\alpha)q'}{X_2} \\ -\frac{\alpha q'}{X_1} & -\frac{(1-\alpha)q'}{X_2} & 0 \end{vmatrix} < 0$$

$$\overline{H}_2 = (-)(-)\frac{1}{X_1X_2}\begin{vmatrix} (1-\alpha)P_1 & \alpha P_2 & \alpha q' \\ -P_1(1-\alpha) & P_2\alpha & -(1-\alpha)q' \\ \frac{\alpha q'}{X_1} & \frac{(1-\alpha)q'}{X_2} & 0 \end{vmatrix} \to = \frac{1}{X_1X_2}\begin{vmatrix} (1-\alpha)P_1 & \alpha P_2 & \alpha q' \\ -P_1(1-\alpha) & P_2\alpha & -(1-\alpha)q' \\ \frac{\alpha q'}{\lambda} & \frac{(1-\alpha)q'}{\lambda} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{H}_2 = \frac{P_1P_2q'}{\lambda X_1X_2}\begin{vmatrix} (\alpha-1) & \alpha & \alpha \\ -(1-\alpha) & \alpha & -(1-\alpha) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \to = \frac{P_1P_2q'}{\lambda X_1X_2}\begin{vmatrix} (\alpha-1) & 1 & \alpha \\ -(1-\alpha) & 1 & -(1-\alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{P_1P_2q'}{X_1X_2}$$

أي أن الشرط الكافي للتوازن يتحقق أيضا . وعند التوازن : **$C = P_1 X_1 + P_2 X_2$**

$$C = (\alpha \lambda q` / X_1) X_1 + (1-\alpha) \lambda q` / X_2) X_2$$

أي أن $C = \lambda q`$

4-4 تكلفة الإنتاج طويلة الآجل

تصبح كافة عناصر الإنتاج متغيرة في الأجل الطويل . وعلية لو كانت عناصر الإنتاج المتغيرة في الآجل القصير $X_1 , X_2 , ..., Xm$ بينما العناصر الثابتة هي $Y_1 , Y_2 , ..., Yn$ فإن دالة تكاليف الإنتاج طويلة الأجل تكتب كالتالي

$$C = \sum_{i=1}^{m} PiXi + \psi(Y_1, Y_2, ..., Yn)$$

حيث Pi سعر العنصر **i** ($i = 1, ..., m$) لتصغير دالة التكلفة أعله إلى حدها الأدنى مع الأخذ بالاعتبار قيد الإنتاج :

$$q' = \phi(X_1, X_2, ..., Xm, Y_1, Y_2, ..., Yn)$$

نستخدم دالة لاجرانج

$$L = \sum_{i=1}^{m} PiXi + \psi(Y_1, Y_2, ..., Yn) + \lambda[q' - \phi(X_1, X_2, ..., Xm, Y_1, Y_2, ..., Yn)]$$

وتعطي الشروط الضرورية للتوازن ...

$$LX_I = \partial L/\partial X_1 = Pi - \lambda \partial q/\partial X_1 = 0 \; ; \quad (i = 1, ..., m)$$

$$L Y_I = \partial L/\partial Y_1 = \partial \Psi /\partial Y_1 - \lambda \partial q/\partial Y_1 = 0 \; ; \quad (i = 1, ..., n)$$

$$L\lambda = \{q` - ø (X_1, X_2, ..., Xm, Y_1, Y_2, ..., Yn)\} = 0$$

وتعطي هذه المعادلات مع معادلة التكاليف عدد **m+n+2** معادلة يمكن حلها في عدد **m+n+2** متغير . ويعطي حل هذه المعادلات دالة الإنتاج طويلة الأجل : **C = c (q)** حيث **C** تمثل اقل تكلفة لإنتاج كمية ثابتة **q`** ويلاحظ أن :

أ) متوسط التكاليف الكلية في الأجل الطويل = متوسط التكاليف المتغيرة **c/q**
ب) التكاليف الحدية في الأجل الطويل = dc/dq
ت) التكلفة الحدية في الأجل الطويل = التكلفة المتوسطة في الأجل الطويل (عند نهايتها الصغرى)
ث) تتساوى التكاليف الحدية في الأجل القصير مع التكلفة الحدية في الأجل الطويل عندما يصبح منحنى التكلفة المتوسطة في الأجل الطويل مماسا لمنحنى التكلفة المتوسطة في الأجل القصير عند نهايتها الصغرى .

5-4 تكلفة إنتاج المنشات ذو المنتجات المتعددة

لنفترض إن هناك منشأة تنتج العديد من المنتجات . في هذه الحالة تكون دالة الإنتاج :

$$ø (q_1, q_2, ..., q_k , X_1, X_2, ..., Xn) = 0$$

حيث **qj** تشير إلى المنتج **j** وحيث **xi** تشير إلى عنصر الإنتاج **I**

فإذا افترضنا دالة التكاليف : $C = F + \sum_{i=1}^{n} PiXi$

فإن مشكلة هذه المنشأة تصبح محاولة تحقيق اقل تكلفة ممكنة لإنتاج كميات محددة (او ثابتة) $q`_1 , q`_2 , ..., q`_k$

من دالة لاجرانج نحصل على .

$$L = \sum_{i=1}^{m} PiXi + \lambda\phi\,(q_1, q_2, ..., qk, X_1, X_2, ..., Xn) + \lambda[q' - \phi(, Y_1, Y_2 ...., Yn)]$$

وتعطي الشروط الضرورية للتوازن :

$$LX_I = \partial L/\partial X_1 = Pi \quad + \lambda\, \partial ø /\partial X_1 = 0$$

$$Lqj = \partial L/\partial qj = \lambda\, \partial ø /\partial qj = 0$$

$$L\lambda = ø\,(q_1,q_2,\ldots,q_k\,,\; X_1,X_2,\ldots,Xn) = 0$$

حيث $i = 1, 2, \ldots, n \qquad j = 1, 2, \ldots, k$

وتشبه هذه المعادلات تماما تلك التي حصلنا عليها من توازن المنشاة ذات المنتج الفردي وحيث إن **0** < λ فإنه يتبع ذلك :

$\partial ø /\partial qj=0$ والذي لابد وان يحدث إذا كانت **ø =0** وبحل المعادلات التي نحصل عليها من الشروط الضرورية للتوازن نحصل على دالة التكاليف $\mathbf{C = c\,(q_1,q_2,\ldots,q_k) + F}$ حيث تمثل **C** اقل تكلفة لإنتاج المنتجات $\mathbf{(q_1,q_2,\ldots,q_k)}$

6-4 اشتقاق دالة التكاليف من دالة الإنتاج

1-6-4 حالة دالة كوب دوجلاس

لو افترضنا إن إنتاج منشأه ما يتبع دالة كوب دوجلاس وان ثمن وحدة الإنتاج **P** وثمن وحدة عنصر العمل **W** بينما ثمن عنصر رأس المال **K** ، ف؟إنه يمكننا إن نشتق دالة تكاليف ، وإذا افترضنا إن المنشأة تعمل في ظل المنافسة الكاملة فإنه يمكننا إن نشتق دالة العرض . ويمكننا توضيح ذلك فيما يلي : $\mathbf{q = A\ L^{\alpha}\ K^{\beta}}$ ولنفترض إن تكلفة الإنتاج: $C = W\,L + I\,K$

حيث **C** تمثل التكاليف الكلية ، فنحصل من المعادلة الأخيرة على .. $K = \dfrac{C - WL}{I}$ وبتعويض هذه المعادلة في دالة كوب دوجلاس نحصل على :

$$q = AL^{\alpha}\left[\frac{C - WL^{\alpha}}{I}\right]^{\beta}$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{\partial q}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1}\left[\frac{C-WL}{I}\right]^{\beta} + AL^{\alpha}\beta\left[\frac{C-WL}{I}\right]^{\beta-1}\left[\left(-\frac{W}{I}\right)\right] = AL^{\alpha-1}\left[\frac{C-WL}{I}\right]^{\beta-1}\left[\alpha\left(\frac{C-WL}{I}\right) - \beta L\left(-\frac{W}{I}\right)\right]$$

حينما يكون الإنتاج عند نهايته العظمى نحصل على $\mathbf{\partial q /\partial L = 0}$ حيث أن $\left[\dfrac{C-WL}{I}\right]^{\beta-1}$ $\left[\dfrac{C-WL}{I}\right] > 0$ $L^{\alpha-1} > 0$ $\mathbf{A > 0}$

وعلية فإن $0 <$ $AL^{\alpha-1}\left[\dfrac{C-WL}{I}\right]^{\beta-1}$ ومعنى ذلك انه عندما يكون الإنتاج عند نهايته العظمى فإن : $\left[\alpha\left(\dfrac{C-WL}{I}\right) - \beta L\left(-\dfrac{W}{I}\right)\right] = 0$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على : $\dfrac{\alpha C}{I} - \dfrac{\alpha WL}{I} = \dfrac{\beta WL}{I}$ ومنها نحصل على **:** $\alpha C = WL\,(\alpha + \beta)$

أو $L = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\dfrac{C}{W}$ وبتعويض هذه المعادلة في المعادلة : $K = \dfrac{C - WL}{I}$ نحصل على $K = \dfrac{C - W\left(\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\right)\dfrac{C}{W}}{I}$ بضرب البسط والمقام في $(\alpha + \beta)$ نحصل على $\rightarrow K = \dfrac{\alpha C + \beta C - \alpha C}{I(\alpha+\beta)}$ ومنها نحصل على : $K = \dfrac{\beta}{(\alpha+\beta)} \times \dfrac{C}{I} \rightarrow$

بتعويض قيمة K في المعادلة الأخيرة وقيمة

$$L = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \times \frac{C}{W}$$

في دالة كوب دوجلاس نحصل على :

$$q = A\left(\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \times \frac{C}{W}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{(\alpha+\beta)} \times \frac{C}{I}\right)^{\beta} \rightarrow q = A\left(\frac{1}{(\alpha+\beta)}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{W}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{(I)}\right)^{\beta} C^{\alpha+\beta}$$

وعلية $C^{(\alpha+\beta)} = \frac{q}{A}\left(\frac{W}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{I}{\beta}\right)^{\beta}(\alpha+\beta)^{(\alpha+\beta)}$ وبضرب الأس في مقلوب $\alpha+\beta$ ومنها نحصل على :

$$C = (\alpha+\beta)\left(\frac{q}{A}\right)^{\left(\frac{1}{(\alpha+\beta)}\right)}\left(\frac{W}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}}\left(\frac{I}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}}$$

وهي دالة التكاليف ويمكن استنتاج دالة العرض باستخدام المساواة MC=∂C /∂q= p وذلك لأنه عند التوازن في ظل المنافسة الكاملة يساوي الثمن التكلفة الحدية Mc = p من المعادلة الأخيرة نحصل على

$$P = \frac{\partial C}{\partial q} = \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{A^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)}}\right) q^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}-1\right)}\left(\frac{W}{\alpha}\right)^{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}1\right)}\left(\frac{I}{\beta}\right)^{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)}$$

وعلية

$$q^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}-1\right)} = A^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)}\left(\frac{\alpha}{W}\right)^{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)}\left(\frac{\beta}{I}\right)^{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} P$$

ومن ثم

$$q = A^{\left(\frac{1}{1-\alpha-\beta}\right)}\left(\frac{\alpha}{W}\right)^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\right)}\left(\frac{\beta}{I}\right)^{\left(\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\right)} P^{\left(\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\right)}$$

وهي عبارة عن دالة العرض لأي منشأة تتبع دالة الإنتاج كوب دوجلاس وتعمل في ظل المنافسة الكاملة .ويلاحظ أن دالة التكاليف خطية في لوغاريتم الأجور (ثمن العمل) وسعر الفائدة (ثمن رأس المال) ومستوى الإنتاج . كما يلاحظ انه إذا كانت $\alpha+\beta = 1$ فإن التكلفة تصبح نسبية لمستوى الإنتاج ، ويصبح منحنى العرض مرنا مرونة لانهائية .

2-6-4 حالة دالة الإنتاج C.E.S

يمكن أيضا اشتقاق دالة التكاليف إذا كانت المنشأة تتبع دالة إنتاج **SMAC** ويمكن توضيح ذلك كالآتي ..

لنفترض إن تكلفة الإنتاج هي : $C = IK + WL$

ومن ثم $L = \dfrac{C - IK}{W}$

وبالتعويض في دالة C.E.S

$q = \gamma\left[\lambda K^{-\rho} + (1-\lambda)L^{-\rho}\right]^{\frac{-1}{\rho}}$ نحصل على $q = \gamma\left[\lambda K^{-\rho} + (1-\lambda)\left(\dfrac{C - IK}{W}\right)^{-\rho}\right]^{\frac{-1}{\rho}}$

لتعظيم الإنتاج يجب إن يكون $\dfrac{dq}{dK} = 0$ وعلية نحصل عند التوازن على

$$\frac{\partial q}{\partial K} = \left(\frac{-1}{\rho}\right)\gamma\left[\lambda K^{-\rho} + (1-\lambda)L^{-\rho}\right]^{\frac{-1}{\rho}-1}\left[(-\rho)\left(\lambda K^{-\rho-1} - (1-\lambda)\frac{I}{W}\left(\frac{C - IK}{W}\right)^{-\rho-1}\right)\right]$$

وعلية عند التوازن نحصل على

$$\lambda K^{-\rho-1}(1-\lambda)\frac{I}{W}\left(\frac{C - IK}{W}\right)^{-\rho-1} = 0$$

$$\lambda K^{-\rho-1} = (1-\lambda)\frac{I}{W}\left(\frac{C - IK}{W}\right)^{-\rho-1}$$

فإذا قسمنا طرفي المعادلة على $K^{-\rho-1}$ نحصل على

$$\lambda = (1-\lambda)\frac{I}{W}\left(\frac{C - IK}{W}\right)^{-\rho-1} K^{\rho+1}$$

وبقسمة الطرفين على $\left(\dfrac{C - IK}{W}\right)^{-\rho-1}$

نحصل على $\lambda\left(\dfrac{C - IK}{W}\right)^{1+\rho 1} = (1-\lambda)\dfrac{I}{W}K^{1+\rho}$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كالآتي

$$\lambda^{\frac{1}{1+\rho}}\left(\frac{C - IK}{W}\right) = (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}}\left(\frac{I}{W}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} K$$

بضرب طرفي المعادلة في W نحصل على $\lambda^{\frac{1}{1+\rho}}(C - IK) = (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}}(I)^{\frac{1}{1+\rho}}(W)^{\frac{\rho}{1+\rho}} K$

ومن هذه المعادلة نحصل على

$$\lambda^{\frac{1}{1+\rho}} C = (\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}} (I) K + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}} I^{\frac{1}{1+\rho}} (W)^{\frac{\rho}{1+\rho}} K$$

$$\lambda^{\frac{1}{1+\rho}} C = K\left[\lambda^{\frac{1}{1+\rho}} I + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}} I^{\frac{1}{1+\rho}} (W)^{\frac{\rho}{1+\rho}} \right]$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $(I)^{\frac{1}{1+\rho}}$ نحصل على

$$\left(\frac{\lambda}{I}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} C = K\left[\lambda^{\frac{1}{1+\rho}} I^{\frac{\rho}{1+\rho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}} (W)^{\frac{\rho}{1+\rho}} \right]$$

بتعويض $Q = \left(\frac{\lambda}{I}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}$

$$M = \lambda^{\frac{1}{1+\rho}} I^{\frac{\rho}{1+\rho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}} (W)^{\frac{\rho}{1+\rho}}$$

$$N = \left(\frac{1-\lambda}{W}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}$$

نحصل على $K = \left(\frac{CQ}{M}\right)$ $\qquad L = \frac{CN}{M}$

وبتعويض هذه القيم في دالة الإنتاج نحصل على

$$q = \gamma\left[\lambda\left(\frac{CQ}{M}\right)^{-\rho} + (1-\lambda)\left(\frac{CN}{M}\right)^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$q = \gamma\left[\lambda C^{-\rho} M^{\rho} \left(\lambda Q^{-\rho} + (1-\lambda) N^{-\rho}\right)\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$q^{-\rho} = \gamma^{-\rho}\left[C^{-\rho} M^{\rho} \left(\lambda Q^{-\rho} + (1-\lambda) N^{-\rho}\right)\right]$$

وعلية

$$C^{-\rho} = q^{-\rho} \gamma^{\rho} M^{-\rho} \left[\left(\lambda Q^{-\rho} + (1-\lambda) N^{-\rho}\right)\right]^{-1}$$

$$C = q\gamma^{-1} M \left[\left(\lambda Q^{-\rho} + (1-\lambda) N^{-\rho}\right)\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

وبتعويض قيمة $M = \lambda^{\frac{1}{1+\rho}} I^{\frac{\rho}{1+\rho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}} (W)^{\frac{\rho}{1+\rho}}$

في المعادلة نحصل على

$$C = \frac{q}{\gamma}\left[\left(\lambda^{\frac{1}{1+\rho}} I^{\frac{\rho}{1+\rho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}} W^{\frac{\rho}{1+\rho}} \right)\right] \times \left[\left(\lambda Q^{-\rho} + (1-\lambda) N^{-\rho}\right)\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

بتعويض قيمة Q , N في المعادلة الأخيرة نحصل على

$$C=\frac{q}{\gamma}\left[\left(\lambda^{\frac{1}{1+\rho}}\ I^{\frac{\rho}{1+\rho}}+(1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}}\ W^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)\right]\times\left[\left(\lambda^{\frac{1}{1+\rho}} I^{\frac{\rho}{1+\rho}}+(1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}}\ W^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

$$C=\frac{1}{\gamma}\left[\left(\lambda^{\frac{1}{1+\rho}}\ I^{\frac{\rho}{1+\rho}}+(1-\lambda)^{\frac{1}{1+\rho}}\ W^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)\right]\quad q$$

$$C=\frac{1}{\gamma}\left[\left((\lambda\ I^{\rho})^{\frac{1}{1+\rho}}+((1-\lambda)W^{\rho})^{\frac{1}{1+\rho}}\right)\right]^{\frac{1+\rho}{\rho}}\quad q$$

وهي دالة التكاليف ويلاحظ أنها دالة خطية في الإنتاج وهو ما نتوقعه في حالة دوال الإنتاج الخطية المتجانسة .