النظرية (٢-٧-٣) أوضحت العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية. النظرية التالية توضح الكيفية التي تتم فيها عملية التحول من التكامل بالإحداثيات الديكارتية إلى التكامل بالإحداثيات القطبية.

(٢-٧-٦) نظرية

لتكن $z = f(x,y)$ دالة معرفة ومتصلة على المنطقة $R = R_r$، فإن

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

قبل البدء بإعطاء بعض الأمثلة التوضيحية، نود أن نشير إلى أننا استخدمنا في التكامل الثنائي بالإحداثيات الديكارتية شريحة أفقية أو رأسية واستخدمنا حركة الشريحة وسنستخدم في الإحداثيات القطبية شريحة مثلثية وستكون حركة الشريحة هنا دورانية وتعطي قيم تغير θ أما الحركة داخل الشريحة فتعطي قيم تغير r.

مثال (٣)

أحسب التكامل

$$I = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx$$

الحل

بقراءة لحدود التكامل نجد أن المنطقة R محدودة بالمنحنيات $y=\sqrt{a-x^2}$، $y=0$ $x=a$ و $x=-a$ أي أن R هي:

$$R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -a \le x \le a, 0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2}\right\}$$

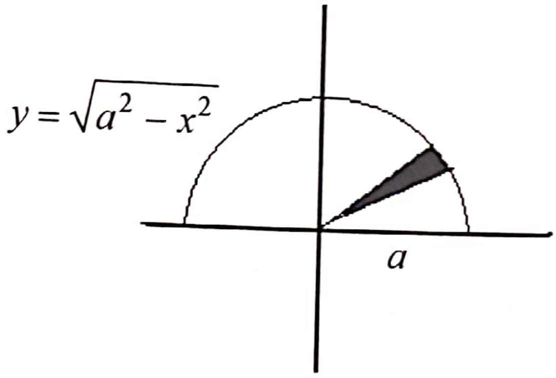
وهي عبارة عن النصف العلوي للقرص الدائري والذي مركزة نقطة الأصل ونصف قطره a .

كما سبق وأن نوهنا في بداية هذا الفصل فإن هذا التكامل لا يمكن حسابه بالإحداثيات الديكارتية ولذلك سوف نستخدم الاحداثيات القطبية وفق الخطوات التالية:

١- نكتب الدالة $f(x,y)$ بالاحداثيات القطبية

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{3/2} = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r^2)^{3/2} = r^3$$

٢- نرسم المنطقة R كما في شكل (٢-١٩)، ثم نرسم شريحة مثلثية تقع بكاملها داخل المنطقة R. أنظر شكل (٢-١٨) . نلاحظ أنه أثناء دوران الشريحة من بداية المنطقة إلى نهايتها فإن نهايتي الشريحة تبقى على نفس المنحنيين مما يعني أن لا تجزئة للمنطقة. من حركة الشريحة نجد أن $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le r \le a$.



الشكل (٢-١٩)

وعندئذٍ ومن نظرية (٢-٧-٦) يصبح التكامل على الشكل التالي :

$$I = \iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)dA$$

$$= \int_0^\pi \int_0^a r^3 dr\, d\theta = \int_0^\pi \int_0^a r^4 dr\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{a^5}{5} d\theta = \frac{\pi a^5}{5}$$

مثال (٤)

احسب التكامل

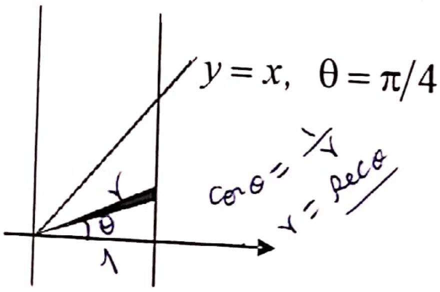
$$I = \iint_R \frac{dA}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

حيث R المنطقة المحدودة بالمستقيمات :

$$y = 0\ ,\ x = 1\ ,\ y = x$$

الحل

أنظر الشكل (٢-٢٠)



$x = 1, \quad r = \sec\theta$

الشكل (٢-٢٠)

هنا أيضاً لا يمكن حساب هذا التكامل بالإحداثيات الديكارتية، لذلك سنستخدم الاحداثيات القطبية.

بما أن $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$ ، فإن $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\dfrac{1}{(1+r^2)^{3/2}}$

لايجاد حدود R بالإحداثيات القطبية نقوم بتحويل معادلات المنحنيات التي تحد المنطقة إلى الإحداثيات القطبية. من المعادلة $y=x$ ، بالتالي $r\sin\theta=r\cos\theta$ ومنه $\sin\theta=\cos\theta$ أي أن $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. أيضا المعادلة $x=1$ تصبح $r\cos\theta=1$ ، أي أن $r=\sec\theta$. وبالنظر إلى الشريحة في شكل (٢-٢٠) نجد أن:

$$R=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le r\le \sec\theta \text{ ، } 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

وبالتالي، من نظرية (٢-٧-٦) فإن التكامل يصبح

$$I=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}rd\ rd\theta=\int_0^{\pi/4}\left[-(1+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\sec\theta}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/4}\left[1+\sec^2\theta\right]^{-1/2}d\theta=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}d\theta$$ $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

$$=\frac{\pi}{4}-\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\theta\right)\right\}_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}.$$

مثال (٥)

احسب التكامل المعتل $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ إن وجد، باعتباره $\lim\limits_{b\to\infty}\iint_{R_b} e^{-(x^2+y^2)}dA$ ، حيث R_b المنطقة في الربع الأول والمحدودة بالمحورين الإحداثيين والدائرة $x^2+y^2=b^2$.

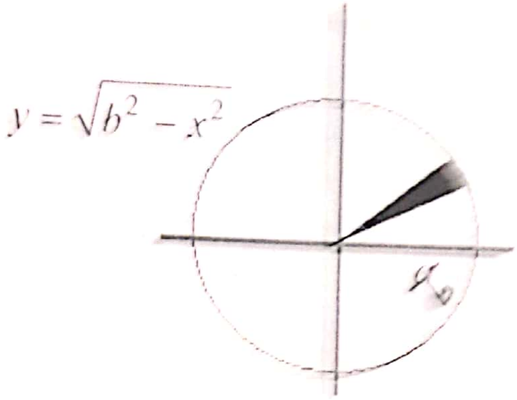
الحل

المنطقة R_b كما هي موضحة بالشكل (٢-٢١)

$\dfrac{1}{\sqrt{1+\sec\theta}}=$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\cos\theta}}}$

$1+\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta+1}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{2-\sin^2\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}$



الشكل (٣-٢١)

باستخدام الإحداثيات القطبية، فإذا فرضنا أن

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\lim_{b\to\infty}\iint_{R_b} e^{-(x^2+y^2)}\,dA=\lim_{b\to\infty}\int_0^{\pi/2}\int_0^{b} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{-1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\Big|_0^{b}\,d\theta=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{\pi/2}(1-e^{-b^2})\,d\theta=\frac{\pi}{4}\lim_{b\to\infty}(1-e^{-b^2})=\frac{\pi}{4}$$

بشكل عام يمكننا القول أنه إذا كانت الدالة المكاملة أو جزء منها يحتوى تعريفها على الصيغة التربيعية x^2+y^2 أو أن أحد أو كل حدود المنطقة المراد التكامل عليها تحتوي منحنى دائري ففي هذه الحالة فإن استخدام الإحداثيات القطبية لحساب التكامل قد لا يكون هو الأنسب المفضل وقد لا نستطيع حسابه إلا بهذه التكاملات كما أوضحت ذلك الأمثلة السابقة.

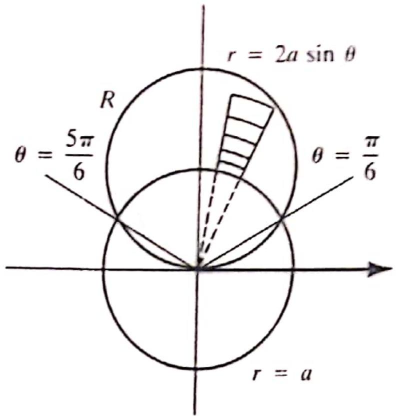
لتكن f دالة في المتغيرين r,θ معرفة ومتصلة على المنطقة R. إذا كانت $f(r,\theta)\ge 0$ لكل (r,θ) في المنطقة R. فإن $\iint_R f(r,\theta)\,dA$ يمثل حجم المجسم الواقع تحت سطح الدالة $z=f(r,\theta)$ وفوق المنطقة R. الآن إذا كانت $z=f(r,\theta)=1$ فإن التكامل $\iint_R 1\,dA$ يمثل مساحة المنطقة R والذي نرمز له بالرمز A ونكتب $A=\iint_R dA$.

مثال (٣٦)

أوجد مساحة المنطقة المستوية الواقعة خارج الدائرة $r=a$، وداخل الدائرة $r=2a\sin\theta$ حيث $a>0$.

الحل

نحسب أولاً نقاط تقاطع الدائرتين فنجد أنه بوضع $2a\sin\theta=a$، نحصل على $2a\sin\theta=a$



الشكل (٢-٢٢)

ومنه فإن $\sin\theta = \frac{1}{2}$، وبالتالي فإن $\theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}$. من حركة الشريحة والحركة داخل الشريحة نجد أن :

$$a \le r \le 2a\sin\theta \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$$

وبالتالي فإن مساحة المنطقة المستوية هي:

$$A = \iint_R dA = \int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_a^{2a\sin\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{2a\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(4a^2\sin^2\theta - a^2)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} 4a^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - \frac{a^2}{2}[\,\theta\,]_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$= a^2\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{a^2}{2}\left[\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

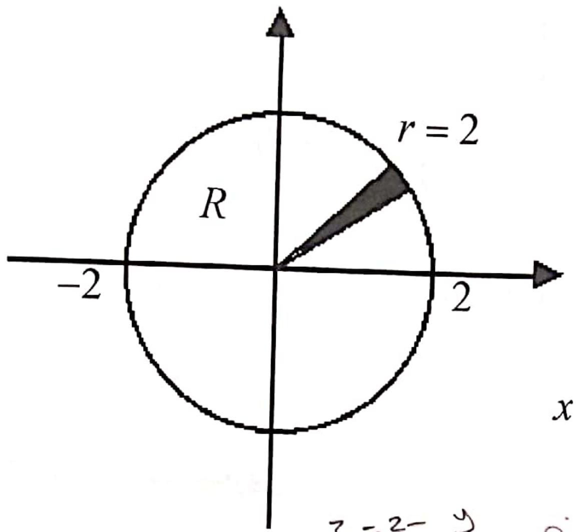
$$= \frac{\pi}{3}a^2 + a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}a^2 + a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

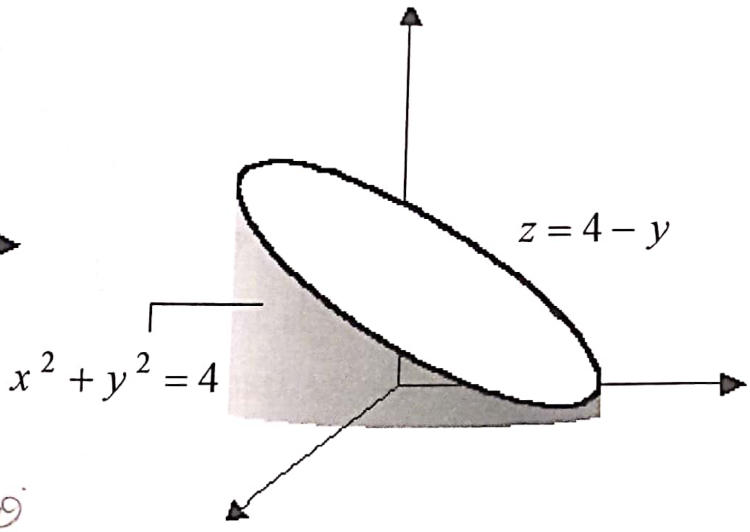
مثال (٧)

أوجد حجم المجسم المحدود بالأسطوانه $x^2 + y^2 = 16$ وبالمستويين $y + z = \cancel{4}$ z، $z = 0$.

الحل

سبق وأن ناقشنا هذا المثال عند دراستنا للحجوم بالإحداثيات الديكارتية. أنظر مثال (٤) من الفصل (٢-٥).





$z = 2 - y$
$= 2 - r\sin\theta$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2 - r\sin\theta) r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^3}{3}\sin\theta \right]_0^2 d\theta$$

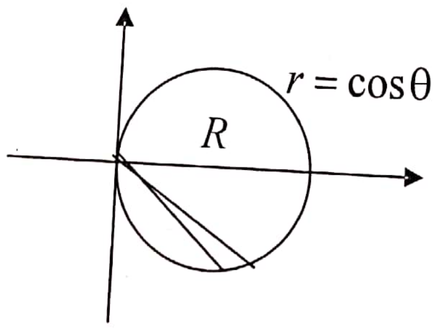
$$= \int_0^{2\pi} (4 - \frac{8}{3}\sin\theta)\,d\theta = \left[4\theta + \cos\theta\right]_0^{2\pi} = (8\pi + 1) - (0 + 1) = 8\pi$$

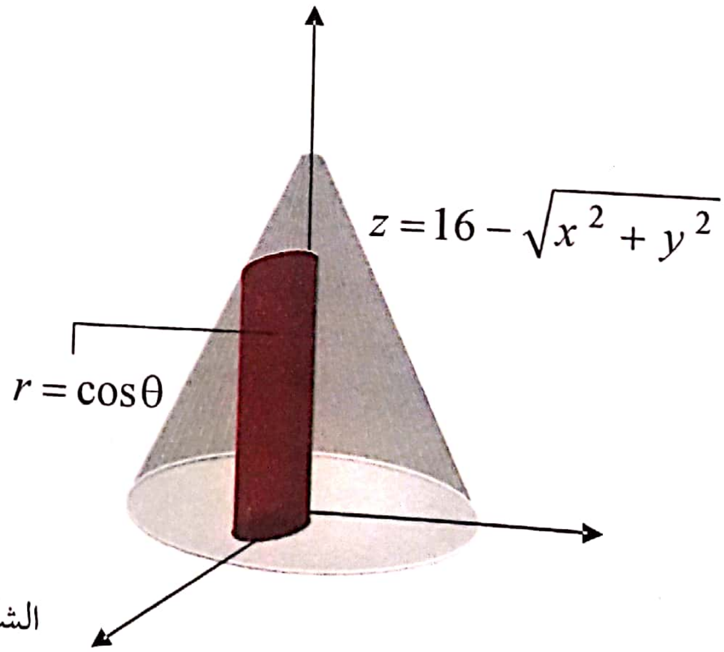
مثال (٨)

احسب حجم المجسم المحدود من الجوانب بالإسطوانة $r = cos\theta$ ومن الأعلى بالسطح المخروطي $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ، من الاسفل $z = 0$

الحل

المجسم هو الموضح بالشكل (٢-٢٣)، وكذلك R.





الشكل (٢-٢٣)

بالنظر إلى R نجد أن $0 \le r \le \cos\theta$ و $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. بالتالي فإن

$$V = \iint_R (16 - \sqrt{x^2 + y^2})dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} (16 - \sqrt{r^2})r dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[8r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_0^{\cos\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (8\cos^2\theta - \frac{\cos^3\theta}{3})\, d\theta = 4\pi - \frac{4}{9}$$

(٢-٨) تــمــارين

في التمارين من ١-٤ عبر عن التكامل كتكامل متعاقب بالإحداثيات القطبية، ثم احسبه.

١- $I = \iint_R 2y\, dA$، حيث إن R هي المنطقة المحدودة بالدائرة $(x-1)^2 + y^2 = 1$ والمستقيم $y = x$ والمستقيم $y = -x$.

٢- $I = \iint_R \sin(x^2 + y^2) dA$، حيث إن R هي المنطقة

$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 16\right\}$.

٣- $\iint_R \sin\theta\, dA$. حيث أن R المنطقة المستوية خارج الدائرة $r = 2$ وداخل منحنى القلب $r = 2(1 + \cos\theta)$.

٤- $\iint_R y\, dA$، حيث أن R المنطقة المستوية المحدودة الدائرة $r = 2\cos\theta$.

في التمارين من ٥-١١ احسب مساحة المنطقة المستوية باستخدام التكامل المتعاقب بالإحداثيات القطبية.

٥- المنطقة داخل منحنى القلب $r = 1 + \cos\theta$ وخارج الدائرة $r = \frac{1}{2}$.

٦- المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة $r = \sin\theta - \cos\theta$.

٧- المنطقة المحدودة بمنحنى القلب $r = 1 + \sin\theta$ والدائرة $r = -\sin\theta$.

٨- المنطقة داخل الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ وعلى يمين الخط $x = 1$.

٩- المنطقة المحدودة بالمنحنى $r = 1 - \cos\theta$

١٠- المنطقة في الربع الأول داخل الدائرة $r = 4\sin\theta$ وخارج $r^2 = 8\cos 2\theta$.

١١- المنطقة في الربع الأول والمحدودة بالمنحنيات $5y = 2x - 4$ و $8y = 16 + x^2$.

في التمارين من ١٢-١٦ استخدم التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية لحساب حجم المجسم.

١٢- المجسم المحدود بنصف الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3.

١٣- المجسم داخل الكرة $x^2+y^2+z^2=4$ وخارج الأسطوانة $x^2+y^2=1$ وفوق المستوى — xy.

١٤- المجسم الذي تقطعه الأسطوانة $r=a\cos\theta$ من الكرة التي نصف قطرها a.

١٥- المجسم المحدود من أعلى بالسطح $z=(x^2+y^2)^{3/2}$ ومن الأسفل بالمستوى xy ومن الجوانب بالاسطوانتين $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=9$.

١٦- المجسم المحدود بالسطح المكافىء $z=4-x^2-y^2$، المستوى $z=3$ والمستوى — xy.

في التمارين من ١٧-٢٤ غير التكامل إلى تكامل متعاقب بالإحداثيات القطبية، ثم احسبه.

١٧- $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

١٨- $\int_0^1\int_y^{\sqrt{2-y^2}} dxdy$

١٩- $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dydx$

٢٠- $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy\,dx$

٢١- $\int_{3\sqrt{2}}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

٢٢- $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

٢٣- $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dydx$

٢٤- $\int_0^{1}\int_{\sqrt{x-b^2}}^{1-\sqrt{x-b^2}} dydx$

٢٥- (أ) بفرض أن $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dy$، وبالتالي $I=\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$، ومنه

$$I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

استخدم مثال (٥) لإثبات أن $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(ب) استخدم (أ) لإثبات أن $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

(ج) استخدم أفكار مثال (٥) وفرعي (أ) و (ب). لإثبات أن $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$.

(النتجة الأخيرة تعني أن مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y=e^{-x^2/2}$ ومحور السينات تساوي $\sqrt{2\pi}$ وهي ذات أهمية خاصة في علم الإحصاء).