التكامل غير المحدد

تعريف لتكن f دالة متصلة على فترة I. فإن التكامل غير المحدد للدالة f هو الدالة الأصلية العامة للدالة f على الفترة I، ويرمز لهذه الدالة عادة بالرمز:

$$\int f(x)\,dx$$

ملاحظات:

① إذا كانت F هي دالة أصلية للدالة f فإنه:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

② من تعريف الدالة الأصلية والتكامل غير المحدد نستنتج أن:

$$\text{(i)}\quad \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = F'(x) = f(x)$$

$$\text{(ii)}\quad \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

مما يبرر القول أن عمليتي التفاضل والتكامل عمليتان متعاكستان.

خواص التكامل غير المحدد

① $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, (k ثابت)

② $\int (f(x) \mp g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \mp \int g(x)\,dx$

③ $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = \left[F(x)\right]_a^b$

$$= F(b) - F(a)$$

أكتوبر 9-10:00 ص

باستعمال العلاقة : $\int F'(x)dx = F(x)+C$

ومعرفتنا بمشتقات كثير من الدوال يمكننا أن نضع

قائمة بالتكاملات الأساسية التالية :

① $\int k\,dx = kx + C$, حيث k أي عدد ثابت

② $\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1.$

③ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

④ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

⑤ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

⑥ $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

⑦ $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

⑧ $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

⑨ $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$

⑩ $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C, \quad |x|<1.$

⑪ $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + C, \quad |x|>1.$

مثال احسب التكاملات التالية :

① $\int \left(5x^2 - \sqrt{x} + \frac{8}{x^4} - 9\right) dx$

$= \int \left(5x^2 - x^{\frac{1}{2}} + 8x^{-4} - 9\right) dx$

$= 5\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 8\frac{x^{-3}}{-3} - 9x + C$

② $\int x(2x+3)^2\, dx = \int x(4x^2+12x+9)\, dx$

$= \int (4x^3+12x^2+9x)\, dx$

$= 4\frac{x^4}{4} + 12\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} + C$

③ $\int (3+\tan^2 x)\, dx = \int (3+\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \int \left[2 + \sec^2 x\right] dx$

$= 2x + \tan x + C$

④ $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x \cos x}\, dx$

$= \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \sec x \tan x\, dx$

$= \sec x + C$

⑤ $\int \frac{\boxed{1} + \boxed{x + x^3}}{1+x^2}\, dx = \int \left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{x+x^3}{1+x^2}\right] dx$

$= \int \left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{x\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{1+x^2}}\right] dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + x\right) dx$

$= \tan^{-1} x + \frac{x^2}{2} + C$.

⑥ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left[\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\sin^{-1} x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \sin^{-1}(0)$

$= \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$

⑦ $\int^{2} x\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$, (واجب)

التكامل بالتعويض:

مبرهنة لتكن $u=g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على $[a,b]$
ومشتقتها g' متصلة. ولتكن f دالة متصلة على
فترة تحتوي مدى الدالة g. اذا كانت F دالة
أصلية للدالة f فإن:

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)dx}_{du}=\int f(u)\,du=F(u)+C$$

$$=F(g(x))+C$$

$$u=g(x)\Rightarrow\frac{du}{dx}=g'(x)\longrightarrow du=g'(x)dx$$

$$\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{du}=\Big[F(g(x))\Big]_a^b$$

$$=F(g(b))-F(g(a))$$

$$=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

ص 10:39-9 أكتوبر

مثال ١ احسب التكامل التالي:

$$\int 2x\sqrt[5]{x^2+7}\,dx = \int \left(x^2+7\right)^{\frac{1}{5}} 2x\,dx$$

$x^2+7 \rightarrow g(x)$, $2x \rightarrow g'(x)$

لذلك نفرض أن:

$u = x^2+7$

$\Rightarrow du = 2x\,dx$

$$\therefore \int 2x\sqrt[5]{x^2+7}\,dx = \int u^{\frac{1}{5}}\,du = \frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C$$

$$= \frac{5}{6}\left(x^2+7\right)^{\frac{6}{5}} + C.$$

ص 10:47-9 أكتوبر