

الباب الثاني

الدالة الأصلية.
تعريف: نقول بأن الدالة f دالة أصلية للدالة f على الفترة I إذا كان:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I$$

مثال: الدالة $F(x) = \sin x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \cos x$ على \mathbb{R} لأنه

$$F'(x) = \cos x = f(x)$$

كذلك $F(x) = \sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ على الفترة $(0, \infty)$ لأنه:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$$

أيضاً $F(x) = x^3$ متبادلة أولية لـ $f(x) = 3x^2$ مع R لأن

وذلك. جميع الـ $f(x) = 3x^2$ متبادلة لـ $f(x) = 3x^2$ لأن $F'(x) = 3x^2 = f(x)$

$$(1) F(x) = x^3 + 20$$

$$(2) F(x) = x^3 - 17$$

$$(3) F(x) = x^3 + \frac{3}{8}$$

$$F(x) = x^3 + C$$

(نستمر الـ $f(x) = 3x^2$ العام)

بشكل عام إذا كانت F حُر G دالة أصله لنفس الدالة f
 فإنه لنزق بينهما يادياً ثابتاً. أي أنه يوجد C (ثابت) بحيث أنه

$$G(x) = F(x) + C$$

المبرهنة الأساسية لتفاضل والتكامل

لكل دالة f مضد مع الفزء $[a, b]$ ، ولتكون الدالة G
 على النحو التالي:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, \forall x \in [a, b]$$

فإن:
 ① الدالة G قابلة للاشتقاق وأن مشتقها: $G'(x) = f(x)$

أي أن G دالة أصله للدالة f .

② إذا كانت F أي دالة أصله للدالة f فإن

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ملاحظة: العدد $F(b) - F(a)$ يمكن التعبير عنه بلفظ آخر من

$$[F(x)]_a^b \quad \text{أو} \quad F(x) \Big|_a^b$$

مثال احب، لنفعلنا مثالاً:

$$\textcircled{1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx$$

بما أن $F(x) = \sin x$ ، والـ $f(x) = \cos x$ ، إذن:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_{-1}^3 4x^3 \, dx &= [x^4]_{-1}^3 \\ &= (3)^4 - (-1)^4 \\ &= 81 - 1 = 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \int_0^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx &= [\sqrt{x}]_0^9 \\ &= \sqrt{9} - \sqrt{0} = 3 \end{aligned}$$

مثال، إذا كانت $G(x) = x^3 \int_1^x \sqrt{8+t} \, dt$ احب $G'(1)$

الحل: لنأخذ G عبارة x^3 مضروباً بالنتيجة.

$$\therefore G'(x) = 3x^2 \cdot \int_1^x \sqrt{8+t} \, dt + x^3 \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_1^x \sqrt{8+t} \, dt \right)$$

$$= 3x^2 \int_1^x \sqrt{8+t} \, dt + x^3 \sqrt{8+x}$$

$$\therefore G'(1) = 3(1)^2 \int_1^1 \sqrt{8+t} \, dt + (1)^3 \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3.$$

مبرهنه اذا كانت f متصلة مع $[a, b]$ وكانت g دالة متزايدة
 للاسقاطه دوماها مكتوب في القتره $[a, b]$ فان

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

وأن:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{g(x)}^a f(t) dt \right) = - \frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$= - f(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال اذا كانت $G(x) = \int_1^{\sin(5x)} \frac{3t}{1+t^2} dt$ الكل

الكل

$$G'(x) = \frac{3 \sin(5x)}{1 + (\sin 5x)^2} \cdot \cos(5x) \cdot 5$$

برای این که از تابع f و مشتق f' و g و g' داشته باشیم
 تابع G را می‌توانیم به روش زیر پیدا کنیم:

$$G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

تابع G را می‌توانیم به روش زیر پیدا کنیم:

$$G'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال: $\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$G(x) = \int_{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

$$G'(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} \cdot 2x - \frac{\sin(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{\sqrt{1+(\frac{1}{2\sqrt{x}})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $\int \frac{\cos(x)}{x\sqrt{1+t^2}} dt$

$$G(x) = \int_{\frac{1}{3x}}^{\cos x} \frac{\cos(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt$$

$$G'(x) = \frac{\cos(\cos x)}{\cos x \sqrt{1+(\cos x)^2}} \cdot (-\sin x) - \frac{\cos(\frac{1}{3x})}{\frac{1}{3x} \sqrt{1+(\frac{1}{3x})^2}} \cdot (-\frac{1}{3x^2})$$

$$G'(x) = 1 \cdot \int_{\frac{1}{3x}}^{\cos x} \frac{\cos(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt + x \left[\frac{\cos(\cos x)}{\cos x \sqrt{1+(\cos x)^2}} \cdot (-\sin x) - \frac{\cos(\frac{1}{3x})}{\frac{1}{3x} \sqrt{1+(\frac{1}{3x})^2}} \cdot (-\frac{1}{3x^2}) \right]$$

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{2x} (x^2 + \sqrt[3]{t+t^3}) dt$$

$$= \int_{\frac{1}{x}}^{2x} x^2 dt + \int_{\frac{1}{x}}^{2x} \sqrt[3]{t+t^3} dt$$

$$= x^2 \int_{\frac{1}{x}}^{2x} 1 dt + \int_{\frac{1}{x}}^{2x} \sqrt[3]{t+t^3} dt$$

$$F'(x) = 2x \int_{\frac{1}{x}}^{2x} 1 dt + x^2 \left[1 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{1}{x^2} \right] +$$

$$\sqrt[3]{2x+(2x)^3} \cdot 2 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^3} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{2x} \sqrt[3]{t^3+1} dt$$

مثال: $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{2x} \sqrt[3]{t^3+1} dt$

$$\textcircled{1} F(2) = \int_2^2 \sqrt{3t^2+1} dt = 0$$

الحل

$$\textcircled{2} F'(x) = \sqrt{3x^2+1} \Rightarrow F'(2) = \sqrt{12+1} = \sqrt{13}$$

$$\textcircled{3} F''(x) = \frac{d}{dx}(F'(x)) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$$

$$\therefore F''(2) = \frac{\cancel{6} \cancel{12}}{\cancel{2} \sqrt{12+1}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$