الباب الثاني

الدالة الاصلية.

تعريف: نقول إن الدالة F دالة أصلية للدالة f على الفترة I اذا كان:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

<u>مثال</u>: الدالة $F(x) = \sin x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \cos x$ على R لأنه

$$F'(x) = \cos x = f(x)$$

كذلك $F(x) = \sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ على الفترة $(0, \infty)$ لأنه:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$$

أيضاً $F(x)=x^3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=3x^2$ على R لأن

$$F'(x)=3x^2=f(x)$$

وكذلك جميع الدوال التالية هي دوال أصلية للدالة $f(x)=3x^2$:

$$(1)\ F(x)=x^3+20$$

$$(2)\ F(x)=x^3-17$$

$$(3)\ F(x)=x^3+\frac{3}{8}$$

$$\vdots$$

$F(x)=x^3+C$ (تسمى الدالة الأصلية العامة)

بشكل عام اذا كانت F و G دوال أصلية لنفس الدالة f
فإن الفرق بينهما يساوي عدد ثابت. أي أنه يوجد C (ثابت)
بحيث أن:

$$G(x) = F(x) + C$$

المبرهنة الاساسية لحساب التفاضل والتكامل

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، ولنعرف الدالة G
على النحو التالي:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in [a,b]$$

فإن:

① الدالة G قابلة للاشتقاق وأن مشتقتها: $G'(x) = f(x)$

أي أن G دالة أصلية للدالة f.

② اذا كانت F أي دالة أصلية للدالة f فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ملاحظة: العدد $F(b)-F(a)$ يمكن التعبير عنه بطرق أخرى مثل

$$\left[F(x)\right]_a^b \quad \text{أو} \quad F(x)\Big|_a^b$$

مثال احسب التكاملات التالية:

① $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx$

بما أن $F(x)=\sin x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=\cos x$ إذن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

② $$\int_{-1}^{3} 4x^3 \, dx = \left[x^4\right]_{-1}^{3}$$

$$= (3)^4 - (-1)^4$$

$$= 81 - 1 = 80$$

③ $$\int_0^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \left[\sqrt{x}\right]_0^9$$

$$= \sqrt{9} - \sqrt{0} = 3$$

مثال إذا كانت $G(x) = x^3 \int_1^x \sqrt{8+t}\, dt$ احسب $G'(1)$

الحل الدالة G عبارة عن حاصل ضرب دالتين.

$$\therefore G'(x) = 3x^2 \cdot \int_1^x \sqrt{8+t}\, dt + x^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \sqrt{8+t}\, dt\right)$$

$$= 3x^2 \int_1^x \sqrt{8+t}\, dt + x^3 \sqrt{8+x}$$

$$\therefore G'(1) = 3(1)^2 \cancelto{0}{\int_1^1 \sqrt{8+t}\, dt} + (1)^3 \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3 .$$

<u>مبرهنة</u> اذا كانت f متصلة على $[a,b]$ وكانت g دالة قابلة للاشتقاق ومداها محتوى في الفترة $[a,b]$ فإن

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

وأن:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{a} f(t)\,dt\right) = -\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$= -f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

<u>مثال</u> اذا كانت $G(x) = \int_1^{\sin(5x)} \frac{3t}{1+t^2}\,dt$ أوجد $G'(x)$.

<u>الحل</u>

$$G'(x) = \frac{3\sin(5x)}{1+(\sin 5x)^2}\cdot\cos(5x)\cdot 5$$

مبرهنة: اذا كانت f دالة متصلة وكانت g و h دالتين قابلتين للاشتقاق ومداهما محتوى في مجال f فإن الدالة:

$$G(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

قابلة للاشتقاق وأن مشتقتها:

$$G'(x)=f(h(x))\cdot h'(x)-f(g(x))\cdot g'(x)$$

مثال: جد المشتقة للدالة:

$$G(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$$

الحل

$$G'(x)=\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^4}}\cdot 2x-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^4}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: جد مشتقات الدوال التالية:

$$① \; G(x)=\int_{3x}^{\cos x} x\sqrt{1+t^2}\,dt$$

الحل

$$G(x)=x\int_{3x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt \quad .\;(\text{حاصل ضرب دالتين})$$

$$\therefore G'(x)=1\cdot\int_{3x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt+x\left[\sqrt{1+\cos^2 x}\cdot(-\sin x)-\sqrt{1+(3x)^2}\cdot 3\right]$$

$$② \; F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{2x}\left(x^2+\sqrt[3]{t+t^3}\right)dt$$

$$=\int_{\frac{1}{x}}^{2x} x^2\,dt+\int_{\frac{1}{x}}^{2x}\sqrt[3]{t+t^3}\,dt$$

$$=x^2\int_{\frac{1}{x}}^{2x} 1\,dt+\int_{\frac{1}{x}}^{2x}\sqrt[3]{t+t^3}\,dt$$

$$\therefore F'(x)=2x\int_{\frac{1}{x}}^{2x} 1\,dt+x^2\left[1*2-1*\frac{-1}{x^2}\right]+$$

$$\sqrt[3]{2x+(2x)^3}*2-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^3}*\frac{-1}{x^2}$$

مثال: اذا كانت $F(x)=\int_{2}^{x}\sqrt{3t^2+1}$

احسب مايلي: $F(2)$ ، $F'(2)$ ، $F''(2)$

الحل

① $F(2) = \int_2^2 \sqrt{3t^2+1}\, dt = 0$

② $F'(x) = \sqrt{3x^2+1} \Rightarrow F'(2) = \sqrt{12+1} = \sqrt{13}$

③ $F''(x) = \frac{d}{dx}(F'(x)) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$

$\therefore F''(2) = \frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\sqrt{12+1}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$