مثال بين بدون حساب قيمة التكامل أن

$$① \int_1^2 (3x^2+4)\,dx \geq \int_1^2 (2x^2+5)\,dx$$

الحل نفرض أن

$$f(x) = 3x^2+4 \;,\; g(x) = 2x^2+5 \;,\; x \in [1,2]$$

فيكون:

$$\int_1^2 f(x)\,dx \geq \int_1^2 g(x)\,dx$$

اذا بينا أن:

$$f(x) \geq g(x) \;,\; \forall x \in [1,2]$$

أو بينا أنه

$f(x) - g(x) \geq 0$ لكل x في $[1,2]$

لكن:

$$f(x) - g(x) = 3x^2+4 - (2x^2+5)$$
$$= 3x^2+4-2x^2-5$$
$$= x^2-1$$

لكن

$$x^2 \geq 1 \Longleftarrow x \geq 1$$

$$\Rightarrow x^2-1 \geq 0$$

$$\therefore f(x) - g(x) \geq 0$$

② $\int_4^6 \frac{1}{4}\,dx \le \int_4^6 \frac{1}{8-x}\,dx$

الحل نرى أن :

$f(x) = \frac{1}{4}$, $g(x) = \frac{1}{8-x}$, $x \in [4,6]$

لكن

$f(x) - g(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8-x} = \frac{8-x-4}{4(8-x)}$

$= \frac{4-x}{4(8-x)}$, $x \in [4,6]$

4		6	
	$-\ -\ -\ -\ -$		$4-x$
	$+\ +\ +\ +\ +$		$4(8-x)$
	$-\ -\ -\ -\ -$		$\frac{4-x}{4(8-x)}$

$\therefore f(x) - g(x) = \frac{4-x}{4(8-x)} \le 0$, $\forall x \in [4,6]$

$\Rightarrow f(x) \le g(x)$, $x \in [4,6]$

$\Rightarrow \int_4^6 f(x)\,dx \le \int_4^6 g(x)\,dx$

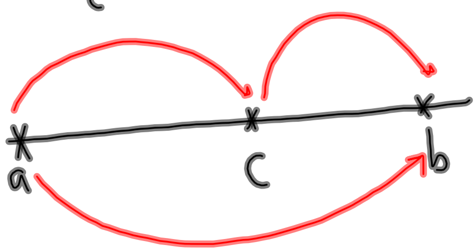
واجب: بين من دون حساب قيمة التكامل (باستعمال خصائص التكامل) أن

① $\int_1^2 x\,dx \le \int_1^2 x^2\,dx$

② $\int_1^2 \sqrt{5-x}\,dx \ge \int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$

④ إذا كانت f قابلة للتكامل على كل من الفترتين $[a,c]$ و $[c,b]$، فإن f قابلة للتكامل على $[a,b]$ وأن:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$



مثال احسب $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 , & x \geq 0 \\ 5x^2 , & x < 0 \end{cases}$$

الحل بما أن $x = 0 \in [-1,2]$

إذن:

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 6x^2\, dx + \int_{0}^{2} (2x-3)\, dx$$

$$= 6 * \frac{1}{3}\left[(0)^3 - (-1)^3\right] + 2 * \frac{1}{2}\left[(2)^2 - (0)^2\right] - 3\left[2-0\right]$$

$$= 2\left[0+1\right] + \left[4-0\right] - 6$$

$$= 2+4-6 = 0$$

$$\int_a^b k\, dx = k(b-a), \quad \int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}\left[b^2 - a^2\right]$$

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}\left[b^3 - a^3\right]$$

مثال ١ احسب قيمة

$$\int_1^5 |x-2|\,dx$$

الحل $x-2=0 \Rightarrow x=2 \in [1,5]$

	2	
$- \; -$	$+ \; +$	$x-2$
$-(x-2) = -x+2$	$x-2$	$\lvert x-2 \rvert$

$$\therefore |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x<2 \end{cases}$$

$$\therefore \int_1^5 |x-2|\,dx = \int_1^2 (-x+2)\,dx + \int_2^5 (x-2)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[4-1\right] + 2\left[2-1\right] + \frac{1}{2}\left[25-4\right] - 2\left[5-2\right]$$

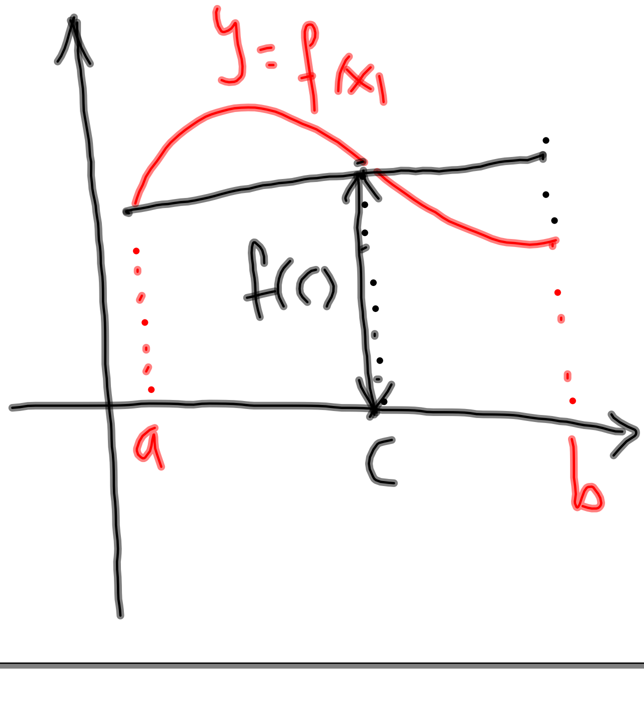
$$= -\frac{3}{2} + 2 + \frac{21}{2} - 6 = 5$$

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ ، فإنه يوجد على الأقل عدد c في (a,b) بحيث أن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a).$$

ملاحظة: $f(c)$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a,b]$



مثال: جد العدد c الذي يحقق نظرية (مبرهنة) القيمة المتوسطة في التكامل للدالة: $f(x)=3x^2-2x+3$ على الفترة $[-1,3]$

الحل: الدالة f متصلة على $[-1,3]$ لأنها كثيرة حدود

$\Leftarrow$ f تحقق نظرية القيمة الوسطى في التكامل على $[-1,3]$

$\Leftarrow$ يوجد عدد على الأقل c في $(-1,3)$ بحيث أن

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = f(c)(3-(-1))$$
$$= f(c) * 4 \quad \ldots\ldots \quad \ldots(*)$$

لكن :

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} (3x^2 - 2x + 3)\,dx = 3 * \frac{1}{3}[27+1] - 2 * \frac{1}{2}[9-1] + 3[3+1]$$

$$= 28 - 8 + 12 = 32$$

و

$$f(c) = 3c^2 - 2c + 3$$

وبالرجوع الى $(*)$ والتعويض بهذه القيم نحصل :

$$32 = (3c^2 - 2c + 3) * 4$$

$$\therefore 3c^2 - 2c + 3 = 8$$

$$\Rightarrow 3c^2 - 2c - 5 = 0$$

$$(3c-5)(c+1)=0$$

$\Rightarrow 3c-5=0$ أو $c+1=0$

$\Rightarrow c=\frac{5}{3}$ ✓ أو $\cancel{c=-1}$,

لأن $-1 \notin (-1,3)$

لو طلب منا حساب القيمة المتوسطة للدالة f على $[-1,3]$ فهي:

$$f(c)=\frac{\int_{-1}^{3} f(x)\,dx}{3-(-1)}=\frac{32}{4}=8$$