مثال: باستخدام التعريف (مجموع ريمان) بين أن

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

الحل: نفرض أن $f(x) = x$

وهي متصلة على $[a,b]$ لأنها كثيرة حدود

$\Leftarrow$ f قابلة للتكامل على $[a,b]$ ولحساب هذا التكامل

نفرض أن: $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئة نونية

منتظمة للفترة $[a,b]$ $\Leftarrow$ $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$

ونأخذ

$$w_k = x_k = a + k(\Delta x_k)$$
$$= a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\therefore S(f,P,w) = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)$$
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[a + \frac{k(b-a)}{n}\right]$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right]$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[na + \frac{b-a}{\cancel{n}}\,\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right]$$
$$= (b-a)\left[a + \frac{(b-a)}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]$$
$$= (b-a)\left[a + \frac{(b-a)}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f,P,\omega)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b-a)\left[a + \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(1 + \underset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}\right)\right]$$

$$= (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\right] = (b-a)\left[\frac{2a+b-a}{2}\right]$$

$$= (b-a)\frac{(b+a)}{2} = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

مثال

1. $\int_{-1}^{2} x\,dx = \frac{1}{2}\left[(2)^2 - (-1)^2\right] = \frac{1}{2}\left[4-1\right] = \frac{3}{2}$

2. $\int_{2}^{5} x\,dx = \frac{1}{2}\left[(5)^2 - (2)^2\right] = \frac{1}{2}\left[25-4\right] = \frac{21}{2}$

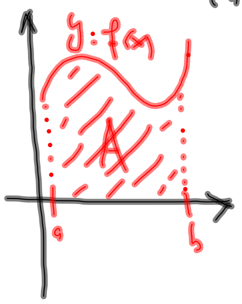
3. $\int_{0}^{6} x\,dx = \frac{1}{2}\left[(6)^2 - (0)^2\right] = \frac{1}{2}\left[36-0\right] = 18$

أيضاً يوجد دوال معرفة ومحدودة على $[a,b]$
وغير قابلة للتكامل، مثل:

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & [0,1] \text{ عدد نسبي في } x \\ -1 , & [0,1] \text{ عدد غير نسبي في } x \end{cases}$$

فإن f معرفة ومحدودة على $[0,1]$ لكنها غير قابلة
للتكامل على هذه الفترة.

ملاحظة: اذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل x في $[a,b]$ ،
وبالرجوع الى كيفية حساب مساحة المنطقة تحت منحنى
الدالة f وفوق محور x على الفترة $[a,b]$
ومقارنة ذلك بتعريف $\int_a^b f(x)\,dx$
نجد أنه:

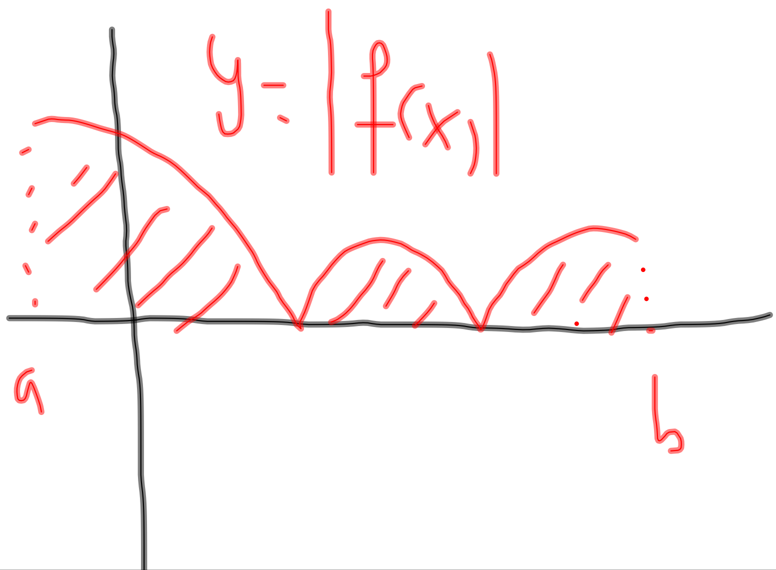


المساحة تحت منحنى f على الفترة $[a,b]$ $= A = \int_a^b f(x)\,dx$

أما إذا كانت f تغير اشارتها في الفترة $[a,b]$

في هذه الحالة
تكون المساحة A مساوية لـ:

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$



أكتوبر 2-10:24 ص

خواص التكامل المحدد

① اذا كانت f قابلة للتكامل على $[a,b]$ فإن

أ) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ب) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثلاً:

$$\int_2^2 \sqrt{x^2+8}\,dx = 0$$

② الخاصية الخطية:

اذا كانت f ، g دالتين قابلتين للتكامل على $[a,b]$ فإن:

أ) $f \mp g$ قابلة للتكامل على $[a,b]$ وأن

$$\int_a^b f \mp g = \int_a^b f \mp \int_a^b g$$

ب) اذا كانت k عدد ثابت فإنه kf قابلة للتكامل وأن:

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f$$

ملاحظة بما أن:

1. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

2. $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

3. $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$

مثال احسب قيمة التكامل التالي:

$$\int_{-1}^{3}(x^2+4x)\,dx = \int_{-1}^{3} x^2\,dx + \int_{-1}^{3} 4x\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} x^2\,dx + 4\int_{-1}^{3} x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[(3)^3-(-1)^3\right] +$$

$$4\times\frac{1}{2}\left[(3)^2-(-1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}[27+1]+2[9-1]$$

$$= \frac{28}{3}+16$$

③ خاصية الاطراد:

(أ) اذا كانت f ، g قابلة للتكامل على $[a,b]$

و كانت $f(x) \geq g(x)$ لكل x في $[a,b]$

فإنه:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

(ب) اذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل x في $[a,b]$ فإنه

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$