خصائص الجمع :

1. $$\sum_{k=1}^{n} c\,a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

2. $$\sum_{k=1}^{n}(a_k \mp b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mp \sum_{k=1}^{n} b_k$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5. $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

6. $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

مثال جد قيمة كل مما يلي :

① $$\sum_{k=1}^{n} 2k(k-3) = \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 6k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k^2 - \sum_{k=1}^{n} 6k$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 6\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= 2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \dots$$

$$\text{①} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}+1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} + n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\frac{2n^2+3n+1}{6n} + n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2} + 3\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} + 3\right]$$

$\frac{3}{2n} \to 0$, $\frac{1}{2n^2} \to 0$

$$= 1 + 3 = 4$$

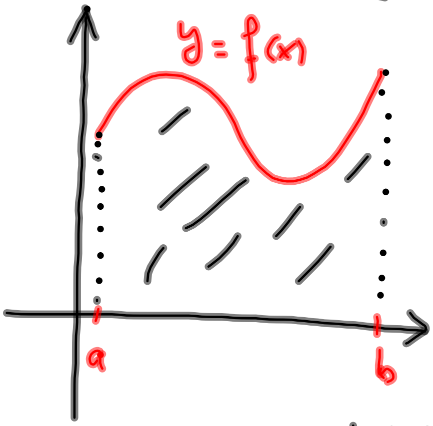
اذا كانت f دالة مرنة ومحدودة على $[a,b]$

وكانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$

فإن مساحة المنطقة المحصورة

بين منحنى الدالة f ومحور x على

الفترة $[a,b]$ هي:



$$\text{المساحة} = A = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

مجموع ريمان للدالة f بالنسبة للتجزئة المنتظمة للفترة $[a,b]$ إلى n من الأجزاء.

حيث $x_k = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)k \quad , k = 0, 1, \ldots, n$

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة

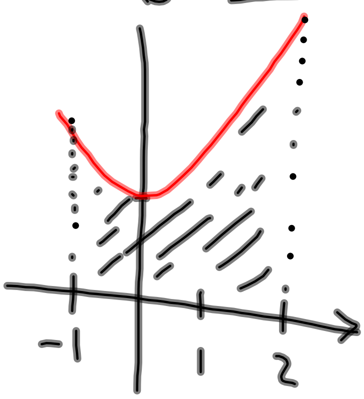
$f(x) = x^2 + 1$

ومحور x (محور السينات) على الفترة $[-1,2]$

الحل: هنا:

$a = -1, \; b = 2$

$$\Rightarrow x_k = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)k$$
$$= -1 + \left(\frac{2+1}{n}\right)k$$
$$= -1 + \frac{3k}{n}$$



ص 10:19-27 رباط تبس

$$\therefore A = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad , \quad f(x) = x^2+1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{3k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(-1+\frac{3k}{n}\right)^2 + 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[1 - 6\frac{k}{n} + \frac{9k^2}{n^2} + 1\right]$$

c c

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \left[\sum_{k=1}^{n} 2 - \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \left[2n - \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}_{1}} + \frac{\cancel{9}^{3}}{n^2} \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}_{2}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[6 - \frac{9(n+1)}{n} + \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[6 - 9\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{9(2n^2+3n+1)}{2n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[6 - 9\left(1+\cancel{\frac{1}{n}}\right) + 9\left(1 + \cancel{\frac{3}{2n}} + \cancel{\frac{1}{2n^2}}\right)\right]$$

0 0 0

$$= 6 - 9 + 9 = 6$$

الصيغة السابقة لحساب المساحة هي حالة خاصة
من تعريف التكامل المحدد

<u>تعريف</u> لتكن f دالة معرفة ومحدودة على فترة $[a,b]$.
نقول إن f قابلة للتكامل على $[a,b]$
إذا كانت

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,\omega) = \underset{(A)}{\text{عدد ثابت}}$$

مهما كانت اختيارنا لعناصر العينة ω من الفترات
الجزئية للتجزئة P

وعندئذٍ نرمز للعدد (A) (قيمة هذه النهاية) بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{أو} \quad \int_a^b f$$

الرمز x في $\int_a^b f(x)\,dx$ يمكن استبداله بأي رمز آخر مثلاً

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt \equiv A \equiv \text{عدد ثابت}$$