مثال جد المشتقة للدوال التالية:

① $y = x^3 \longrightarrow y' = 3x^2$ (دالة جبرية عادية)

② $y = 3^x \longrightarrow y' = 3^x \cdot 1 \cdot \ln 3$ (دالة أسية عادية)

③ $y = x^x$?? (دالة أسها دالة)

لكن:

$$y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\therefore y' = e^{x\ln x} \cdot \left\{ 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right\}$$

$$= x^x \left[\ln x + 1 \right]$$

أو: كما أن: $y = x^x$ بأخذ ln الطرفين:

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

وباشتقاق الطرفين اشتقاقاً ضمنياً ينتج أن:

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = y \left[\ln x + 1 \right]$$

$$= x^x \left[\ln x + 1 \right]$$

وبشكل عام فإن:

$$y = \left(f(x) \right)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$\Rightarrow y' = e^{g(x)\ln f(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

مثال جد المشتقة للدوال التالية :

① $y=(x^3+1)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x^3+1)}$

$\therefore y' = e^{\frac{1}{x}\ln(x^3+1)}\left[\frac{-1}{x^2}\ln(x^3+1)+\frac{1}{x}\cdot\frac{3x^2}{x^3+1}\right]$

② $y=(\sin x)^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(\sin x)}$

$\therefore y' = e^{\sqrt{x}\ln(\sin x)}\cdot\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sin x)+\sqrt{x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right]$

③ $y=\pi^x+(x+1)^{x^2}$

$=\pi^x+e^{x^2\ln(x+1)}$

$\therefore y' = \pi^x\cdot 1\cdot\ln\pi + e^{x^2\ln(x+1)}\left[2x\ln(x+1)+x^2\cdot\frac{1}{x+1}\right].$

واجب احسب المشتقة لما يلي :

① $y=e^x+x^e-x^{2x}$

② $y^x+x^y=1$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c \quad , a>0, a\neq 1$$

مثال احسب التكاملات التالية:

① $\displaystyle\int \frac{2^x}{1+2^x}\,dx$

نفرض أن:

$u = 1+2^x$

$\Rightarrow du = 2^x \ln 2\,dx$

$\frac{du}{\ln 2} = 2^x\,dx$

$$= \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{\ln 2}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\ln\left|1+2^x\right| + c$$

② $\displaystyle\int 3^x\sqrt{1-3^x}\,dx = \int 3^x\left(1-3^x\right)^{\frac{1}{2}}dx$

$$= \frac{-1}{\ln 3}\int \left(-3^x \ln 3\right)\left(1-3^x\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{-1}{\ln 3}\,\frac{\left(1-3^x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

أو نستخدم التعويض:

$u = 1-3^x$

⋮

③ $\displaystyle\int \frac{\sec^2(2^{-x})}{2^x}\,dx = \int 2^{-x}\sec^2(2^{-x})\,dx$

نفرض أن:

$u = 2^{-x} \Rightarrow du = 2^{-x}\cdot(-1)\ln 2\,dx$

$\therefore 2^{-x}\,dx = -\frac{du}{\ln 2}$

$$= \int \sec^2 u \; \frac{-du}{\ln 2}$$

$$= \frac{-1}{\ln 2}\int \sec^2 u\,du$$

$$= \frac{-1}{\ln 2}\tan u + c = \frac{-1}{\ln 2}\tan(2^{-x}) + c.$$

④ $\displaystyle\int \frac{5^x}{1+25^x}\,dx = \int \frac{5^x}{1+(5^2)^x}\,dx = \int \frac{5^x}{1+5^{2x}}\,dx$

$$= \int \frac{5^x}{1+(5^x)^2}\,dx \quad ,$$

نفرض أن

$u = 5^x$

$\Rightarrow du = 5^x \ln 5\,dx$

$\therefore \frac{du}{\ln 5} = 5^x\,dx$

$$= \int \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{\ln 5}$$

$$= \frac{1}{\ln 5}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{\ln 5}\tan^{-1}u + c$$

$$= \frac{1}{\ln 5}\tan^{-1}(5^x) + c$$

⑤ $\displaystyle\int 2^{x+1}e^{2x-1}\,dx = \int 2^x\cdot 2\cdot e^{2x}\cdot e^{-1}\,dx$

$$= 2e^{-1}\int 2^x\cdot e^{2x}\,dx = \frac{2}{e}\int 2^x\left(e^2\right)^x dx$$

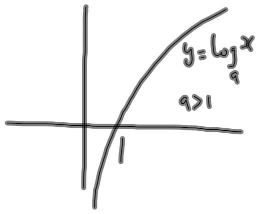
$$= \frac{2}{e}\int \left(2e^2\right)^x dx = \frac{2}{e}\,\frac{\left(2e^2\right)^x}{\ln(2e^2)} + c.$$

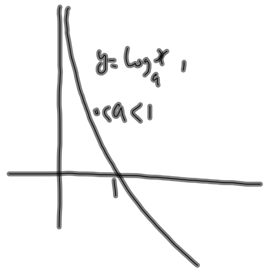
عدد ثابت

الدالة اللوغاريتمية العامة :

اذا كانت $a>0$ ، $a\neq 1$ فإن الدالة الأسية العامة a^x
دالة أحادية وشاملة ، وبالتالي لها دالة عكسية
(معكوس) يسمى الدالة اللوغاريتمية العامة ويرمز
لها بـ $\log_a(x)$ ومجالها $(0,\infty)$ ومداها R وتحقق:

$$y=\log_a x \iff x=a^y$$





ملاحظة

(1) $\ln x=\log_e x$

(2) $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

(3) اذا كانت $a,b>0$ وَ $a,b\neq 1$ فإن:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(4) $\log_{10} x=\log x$

مبرهنة

(1) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

(2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

(3) $\log_a(x^r)=r\log_a x$

ملاحظة

(1) $\log_a 1=0$ (2) $\log_a a=1$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$ ، $\log_7 7=1$, $\log_{10} 10=1$

$\log_3 1=0$, $\log_{20} 1=0$

بما أن:

$$\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

اذن:

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a^x\right) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

وبشكل عام فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a^{f(x)}\right) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال:

$$\frac{d}{dx}\left(\log_3(x^2-5x+1)\right) = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{2x-5}{x^2-5x+1}$$

مثال جد مشتقة الدوال التالية:

① $y = \log\sqrt{x^2+\sin x} = \log\left(x^2+\sin x\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log(x^2+\sin x)$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{2x+\cos x}{x^2+\sin x}$

② $y = \tan^{-1}\left(\log_2^x\right)$

$$y' = \frac{1}{1+\left[\log_2^x\right]^2} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x}$$

③ $y = 5^{\log_7^{(\sin x)}}$

$$y' = 5^{\log_7^{(\sin x)}}\left(\frac{1}{\ln 7} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) \cdot \ln 5$$

مثال احسب التكاملات التالية:

① $\int \frac{dx}{x\log^x}$

نفرض أن:

$u = \log x$

$\Rightarrow du = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}dx$

$\therefore \frac{1}{x}dx = (\ln 10)\,du$

$= \int \frac{1}{u}\ln 10\,du$

$= \ln 10 \int \frac{1}{u}du$

$= \ln 10 \cdot \ln|u| + C = \ln 10 \ln|\log x| + C$

② $\int \frac{\sqrt{1+\log_3^x}}{x}dx = \int\left(1+\log_3^x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}dx$

نفرض أن:

$u = 1+\log_3^x$

$\Rightarrow du = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{x}dx$

$\ln 3\,du = \frac{1}{x}dx$

$= \int u^{\frac{1}{2}}\ln 3\,du$

$= \ln 3 \int u^{\frac{1}{2}}du$

$= \ln 3\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2\ln 3}{3}\left(1+\log_3^x\right)^{\frac{3}{2}} + C$

واجب احسب:

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$$

مثال احسب النهايات التالية:

① $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}} \to \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{e^{3x}}\left(1-e^{-6x}\right)}{\cancel{e^{3x}}\left(1+e^{-6x}\right)} = \frac{1-0}{1-0} = 0$

② $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x} \to \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$