مثال أثبت أن : $y = xe^{-x}$ تحقق المعادلة

$$xy' = (1-x)y$$

الحل بما أن :

$$y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} + xe^{-x}\cdot(-1)$$

$$= e^{-x} - xe^{-x}$$

$$= (1-x)e^{-x}$$

وبضرب الطرفين بـ x نجد أن :

$$xy' = (1-x)xe^{-x}$$

$$\therefore\ xy' = (1-x)y .$$

بما أن:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

إذن:

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + c}$$

وبتعميم ذلك فإن:

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

ومنها ينتج أن:

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c, \quad a \neq 0.$$

مثال: احسب التكاملات التالية:

① $\int e^{3x-2}dx = \frac{1}{3}e^{3x-2}+C$

② $\int e^{x}\sqrt{1+e^{x}}\,dx$

$= \int e^{x}(1+e^{x})^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(1+e^{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$

$f'(x)$ $f(x)$

أو بالتعويض

نفرض أن

$u = 1+e^{x}$

$\Rightarrow du = e^{x}dx$

$\therefore \int = \int (1+e^{x})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{x}dx = \int u^{\frac{1}{2}}du$

$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{(1+e^{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$

③ $\int \frac{(1+e^{2x})^{2}}{e^{3x}}dx = \int e^{-3x}(1+e^{2x})^{2}dx$

$= \int e^{-3x}\left[1+2e^{2x}+e^{4x}\right]dx$ $\boxed{(e^{2x})^{2} = e^{2(2x)} = e^{4x}}$

$= \int (e^{-3x}+2e^{-x}+e^{x})dx$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{2}{-1}e^{-x}+e^{x}+C$

④ $\int \frac{e^{x}}{4+e^{x}}dx = \ln|4+e^{x}|+C$

$f'(x)$ $f(x)$

⑤ $\int e^{2x}\sqrt{1+e^{x}}\,dx = \int e^{2x}(1+e^{x})^{\frac{1}{2}}dx$

$= \int e^{x}(1+e^{x})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{x}dx$

نفرض أن:

$u = 1+e^{x}$

$\Rightarrow du = e^{x}dx$

$= \int ?\, u^{\frac{1}{2}}du$

$e^{x} = u-1$

$= \int (u-1)u^{\frac{1}{2}}du = \int (u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}})du$

$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{5}(1+e^{x})^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+e^{x})^{\frac{3}{2}}+C$

⑥ $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx$ ،

نفرض أن

$u = \sqrt{x+1}$

$\Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$

$\therefore 2du = \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

$= \int e^{u}\,2du$

$= 2\int e^{u}du = 2e^{u}+C$

$= 2e^{\sqrt{x+1}}+C$

⑦ $\int_{0}^{\ln 2} \frac{1}{e^{-x}+e^{x}}dx$

$e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$

$= \int_{0}^{\ln 2} \frac{1}{\frac{1}{e^{x}}+e^{x}}dx = \int_{0}^{\ln 2} \frac{e^{x}}{1+(e^{x})^{2}}dx$ ،

نفرض أن

$u = e^{x} \Rightarrow du = e^{x}dx$

$x = 0 \rightarrow u = e^{0} = 1$

$x = \ln 2 \rightarrow u = e^{\ln 2} = 2$

$= \int_{1}^{2} \frac{1}{1+u^{2}}du$

$= \left[\tan^{-1}u\right]_{1}^{2}$

$= \tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(1)$

$= \tan^{-1}(2) - \frac{\pi}{4}$.

⑧ $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-9}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(e^{x})^{2}-9}}dx$

نفرض أن:

$u = e^{x} \rightarrow du = e^{x}dx$

$= \int \frac{e^{x}dx}{e^{x}\sqrt{(e^{x})^{2}-9}}$

$= \int \frac{1}{u\sqrt{u^{2}-9}}du = \frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{u}{3}\right)+C$

$= \frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{e^{x}}{3}\right)+C$

⑨ $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^{2}x}dx$ ،

نفرض أن

$u = \tan x$

$\Rightarrow du = \sec^{2}x\,dx$

$= \int e^{\tan x}\sec^{2}x\,dx$

$= \int e^{u}du = e^{u}+c = e^{\tan x}+C$

واجب: احسب التكاملات التالية:

① $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}dx$ ② $\int \frac{\cot e^{-x}}{e^{x}}dx$

③ $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{2}}dx$ ④ $\int \frac{e}{\sqrt{4-e^{4x}}}dx$

مثال: احسب التكامل التالي:

$\int e^{x^{3}+2\ln x-8}dx = \int e^{x^{3}} \cdot e^{2\ln x} \cdot e^{-8}dx$

$= \int e^{x^{3}} \cdot \cancel{e^{\ln x^{2}}} \cdot e^{-8}dx$

$= e^{-8}\int e^{x^{3}} \cdot x^{2}dx = \frac{e^{-8}}{3}\int e^{x^{3}} \cdot 3x^{2}dx$

$= \frac{e^{-8}}{3}e^{x^{3}}+C$.

أكتوبر 20-10:04 ص

نعلم أن: $e^0=1$

ما هي قيمة العدد e؟

وبشكل عام ما هي قيمة e^x لكل x في R؟

<u>مبرهنة:</u> لكل $x\in R$ فإن:

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$e^x\approx\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

عندما تكون قيمة n كبيرة.

فمثلاً عند $x=1$ وأخذنا $n=1000$ فإن:

$$e\approx\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=(1.001)^{1000}$$

$$\approx 2.716923932\ldots$$

وكلما أخذنا n أكبر كلما اقتربنا أكثر من القيمة الفعلية للعدد e.

الدالة الأسية العامة

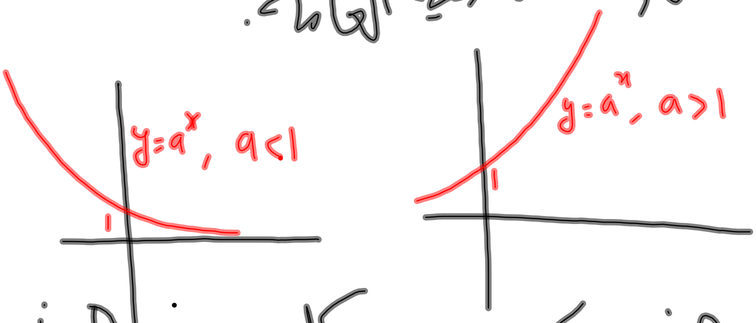
تعريف: لتكن $a>0$ و x أي عدد حقيقي، فإننا نعرف a^x على النحو التالي:

$$a^x = e^{x\ln a}$$

الدالة f المعرفة بـ:

$$f(x) = a^x \,, \quad a>0$$

تسمى الدالة الأسية العامة.



مبرهنة: لكل $a,b>0$، ولكل x,y في R فإن:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
5. $a^0 = 1$

من التعريف:

$$3^x = e^{x\ln 3}$$

اشتقاق وتكامل الدالة الأسية العامة:

بما أن: $a^x = e^{x\ln a}$

فإن:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a$$

وبشكل عام فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(a^{f(x)}\right) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

وأيضاً:

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + C$$

مثال أوجد المشتقة لما يلي:

1. $y = 3^{\sin x} \Rightarrow y' = 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 3$

2. $y = 2^{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = 2^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln 2$

3. $y = \tan^{-1}(5^x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+(5^x)^2} \cdot 5^x \cdot 1 \cdot \ln 5$

4. $y = 3^{\frac{1}{x^2+1}}$

$$\Rightarrow y' = 3^{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \frac{(-1)2x}{(x^2+1)^2} \cdot \ln 3$$

5. $y = x^2 \cdot 7^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = 2x\, 7^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot 7^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \ln 7$

6. $y = x^x$??