مثال احسب التكاملات التالية:

① $\int \frac{\tan\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$

نفرض أن:
$u=\sqrt{x+1} \Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$
$\therefore 2du=\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

$=\int \tan u \cdot 2du$
$=2\int \tan u\, du = 2\ln|\sec u|+C$
$=2\ln|\sec\sqrt{x+1}|+C$

② $\int \frac{\csc(\ln x)}{x}dx$,

نفرض أن:
$u=\ln x$
$\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$=\int \csc u\, du$
$=\ln|\csc u-\cot u|+C$
$=\ln|\csc(\ln x)-\cot(\ln x)|+C$

③ $\int \frac{\sec\frac{1}{x}}{x^2}dx$,

نفرض أن:
$u=\frac{1}{x} \Rightarrow du=\frac{-1}{x^2}dx$
$\therefore \frac{1}{x^2}dx=-du$

$=\int \sec u\cdot(-du)$
$=-\int \sec u\, du=-\ln|\sec u+\tan u|+C$
$=-\ln|\sec\frac{1}{x}+\tan\frac{1}{x}|+C$

④ $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx=\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx$
$=\int\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx$
$=\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$

⑤ $\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$
$=\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$

⑥ $\int\frac{4+x-\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$ واجب

.

أكتوبر 18-10:00 ص

الدالة الأسية الطبيعية

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية دالة أحادية وشاملة وبالتالي لها دالة عكسية تسمى الدالة الأسية الطبيعية نرمز لها بـ $exp(\cdot)$ ومجالها هو R ومداها هو $(0,\infty)$ وعليه فإن:

$y = exp(x) \iff \ln y = x$ (يكافئ)

ملاحظات:

① $exp(x) > 0, \forall x \in R$

② $exp(x) > 1, \forall x > 0$

$0 < exp(x) < 1, \forall x < 0$

$exp(0) = 1$

③ قيمة هذه الدالة عند $x = 1$ عدد نيبيري يرمز له بالرمز: e أي أن:

$e = exp(1)$

$\Rightarrow \ln e = 1$

وإذا كانت r أي عدد نسبي فإنه من خصائص ln نستنتج أن:

$\ln e^r = r \ln e = r$

$\Rightarrow exp(r) = e^r$

$\boxed{y = exp(x) \iff \ln y = x}$

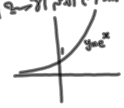
وهذه العلاقة صحيحة لأي عدد حقيقي x، لذلك نكتب:

$exp(x) = e^x, \forall x \in R.$

وبالتالي سوف نستخدم e^x بدلاً من $exp(x)$ للتعبير عن الدالة الأسية الطبيعية

④ $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$



⑤ بما أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية والدالة الأسية الطبيعية عكسيتان فإن:

(i) $\ln(e^x) = x, \forall x \in R$

(ii) $e^{\ln x} = x, \forall x > 0$

مبرهنة لأي أعداد حقيقية x, y ولأي عدد نسبي r فإن:

① $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

② $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

③ $(e^x)^r = e^{rx}$

مثال بسط ما يلي:

① $e^{x - \ln x} = \frac{e^x}{e^{\ln x}} = \frac{e^x}{x}$

② $\ln e^{x - \sqrt{x}} = x - \sqrt{x}$

أو $= \ln\left[\frac{e^x}{e^{\sqrt{x}}}\right] = \ln e^x - \ln e^{\sqrt{x}} = x - \sqrt{x}$

③ $(x+1)e^{-2\ln(x^2-1)} = (x+1)e^{\ln[x^2-1]^{-2}}$

$= (x+1)[x^2-1]^{-2} = \frac{x+1}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{x+1}{[(x-1)(x+1)]^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$

مثال أوجد قيمة x في ما يلي:

① $\ln(\ln x) = 0$

$\Rightarrow e^{\ln(\ln x)} = e^0 = 1$

$\therefore \ln x = 1 \Rightarrow e^{\ln x} = e^1$

$\therefore x = e$

② $(x-3)e^{-\ln(\frac{1}{x})} = 4$

$\Rightarrow (x-3)e^{\ln(\frac{1}{x})^{-1}} = 4$

$\Rightarrow (x-3)e^{\ln x} = 4 \Rightarrow (x-3)\cdot x = 4$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 4$ ✓ $, \cancel{-1}$

③ $\ln(x+5) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$\therefore e^{\ln(x+5)} = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} \Rightarrow x+5 = \frac{x-1}{x+1}$

$(x+5)(x+1) = x-1 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = x - 1$

$\Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$

$\therefore (x+3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \cancel{-2}, \cancel{-3}$

④ $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

$\Rightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0 \rightsquigarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

$(y-2)(y-1) = 0$

$\Rightarrow y = 2 ، y = 1$

ص 18-10:10 ربوتكأ

$\Rightarrow e^{x} = 2 \longrightarrow \ln e^{x} = \ln 2 \Rightarrow x = \ln 2$

أو   أو

$e^{x} = 1 \longrightarrow \ln e^{x} = \ln 1 \Rightarrow x = 0$

اشتقاق الدالة الأسية الطبيعية

لنعرف أن: $y = e^{x}$

$\Rightarrow \ln y = \ln e^{x} = x$

وباشتقاق الطرفين ضمنياً ينتج أن:

$\frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \Rightarrow \frac{d}{dx}(y) = y$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x}\right) = e^{x}$

وبشكل عام فإن:

$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

مثال: جد المشتقة لما يلي:

(1) $y = e^{\sin x} \rightarrow y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

(2) $y = e^{\tan^{-1} x} \rightarrow y' = e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{1+x^{2}}$

(3) $y = \sin^{-1}(e^{x}) \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^{x})^{2}}} \cdot e^{x} = \frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(4) $y = (1+e^{3x})^{5} \rightarrow y' = 5(1+e^{3x})^{4} \cdot e^{3x} \cdot 3$

$= 15e^{3x}(1+e^{3x})^{4}$

(5) $y = \ln(e^{x}+e^{-x}) \Rightarrow y' = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

(6) $ye^{x} + xe^{y} = 4$. (دالة ضمنية)

$\Rightarrow \underline{y'e^{x}} + ye^{x} + e^{y} + \underline{xe^{y}y'} = 0$

$y'\left[e^{x} + xe^{y}\right] = -ye^{x} + e^{y}$