

Exercises 11.3:

Ex 5:

Prove that: $\int_0^{\infty} \sin x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

Soln: Let

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\left| S_n(x) - \sin x \right| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} - \sin x \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right|$$

Ex 8:

Prove that $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$

$$\cos \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} e^{-x} x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \Gamma(2n+1)$$

$$\Gamma(2n+1) = (2n)!$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(2n)!}{(2n)!}$$

Justification of the interchanging between the integral and the sum

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} e^{-x} x^{2n} \right| dx$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} x^{2n}}{(2n)!} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! 6}{(2n)!} < \infty$$