الدوال في متغيرين

التعريف:

(1) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} , y \in \mathbb{R}\}$

$\left(A \times B = \{(x,y) : x \in A , y \in B\} \right)$

(2) الدالة f في متغيرين هي الدالة f من $\mathbb{R}^2$ (أو جزء من $\mathbb{R}^2$) إلى $\mathbb{R}$ ونرمز لها :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

(3) ليكن f دالة في متغيرين ،
مجال الدالة f (أو نطاق الدالة f) ونرمز له D_f
هي المجموعة:

$$D_f = \{(x,y) : f(x,y) \text{ معرّفة}\}$$

مثال: (1)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$f(x,y)$ معرفة إذا، فقط إذا كان: $x^2+y^2 \neq 0$

نعلم أن: $x^2+y^2=0$ إذا، فقط إذا كان $x^2=0$, $y^2=0$

$\iff x=0$, $y=0$

وبالتالي: $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

مثال 2

$$f:(x,y)\longmapsto \frac{x^2+y^2-3}{x^2+y^4+1}$$

مجال الدالة f : D_f

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2+y^4+1\neq 0$

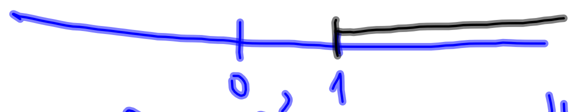
ونعلم أن: $x^2\geq 0$ لكل $x\in\mathbb{R}$

و $y^4\geq 0$ لكل $y\in\mathbb{R}$

فإن: $x^2+y^4\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

فإن: $x^2+y^4+1\geq 1$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

فإن: $x^2+y^4+1\neq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$



وبالتالي: $D_f=\mathbb{R}^2$

المستقيم :

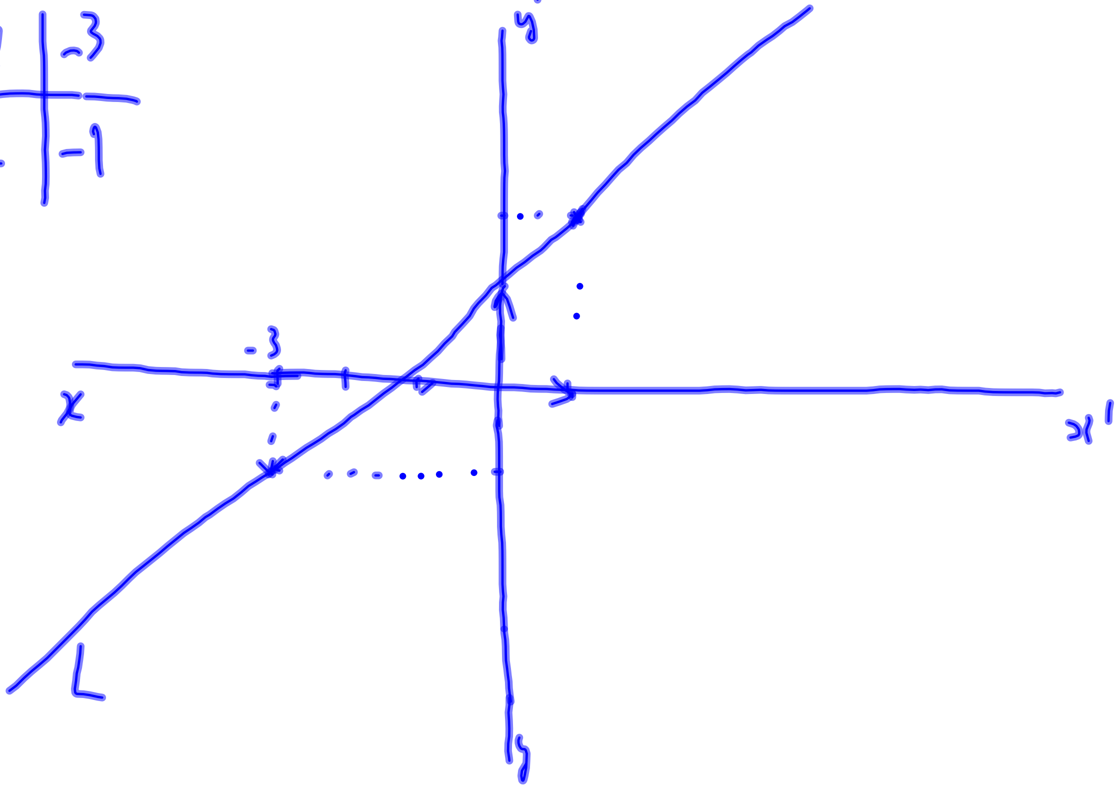
$\Delta : ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$

Δ هو مستقيم .

مثال

$L : 3x-4y+5=0$

x	1	-3
y	2	-1



نصف المستوي

يكون بالكتابات التالية: حيث ام (a,b) ≠ 0

نصف المستوي المغلق

$ax+by+c \geq 0$

أو $ax+by+c \leq 0$

نصف المستوي المفتوح

$ax+by+c > 0$

أو $ax+by+c < 0$

مثال: جد مجال الدالة f حيث

(١) $f(x,y)=\sqrt{3x-4y+1}$

(٢) $f(x,y)=\ln(3x-4y+1)$

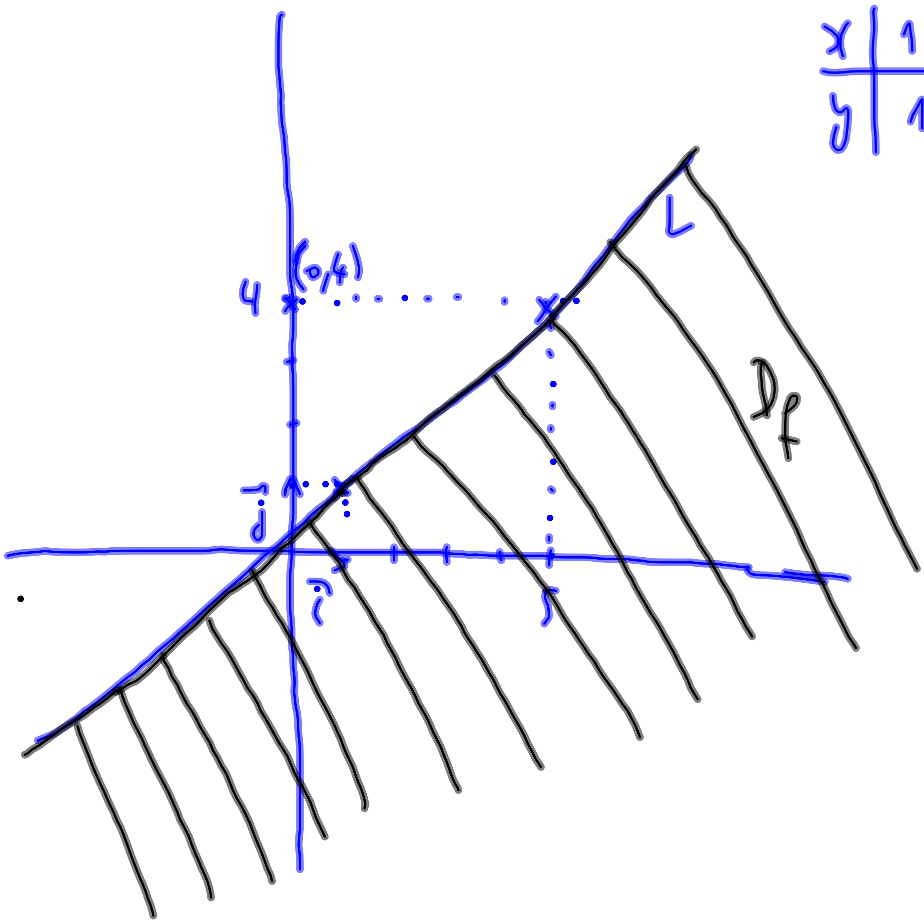
(٣) $f(x,y)=\dfrac{x^2+1}{x-y+1}$

$$f(x,y)=\sqrt{3x-4y+1}$$ (1)

$f(x,y)$ معرفة إذا، فقط إذا كان $3x-4y+1 \geq 0$

لنعتبر: $L: \ 3x-4y+1=0$

x	1	5
y	1	4



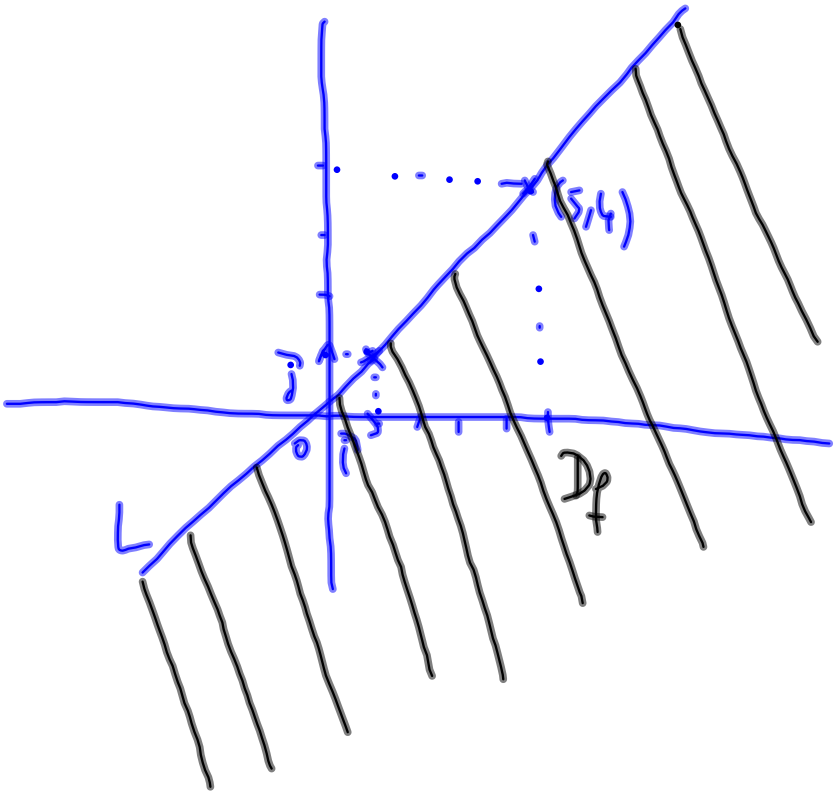
(ح)

$$f(x,y)=\ln(3x-4y+1)$$

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان: $3x-4y+1>0$

لنعتبر: $L: 3x-4y+1=0$

x	1	5
y	1	4



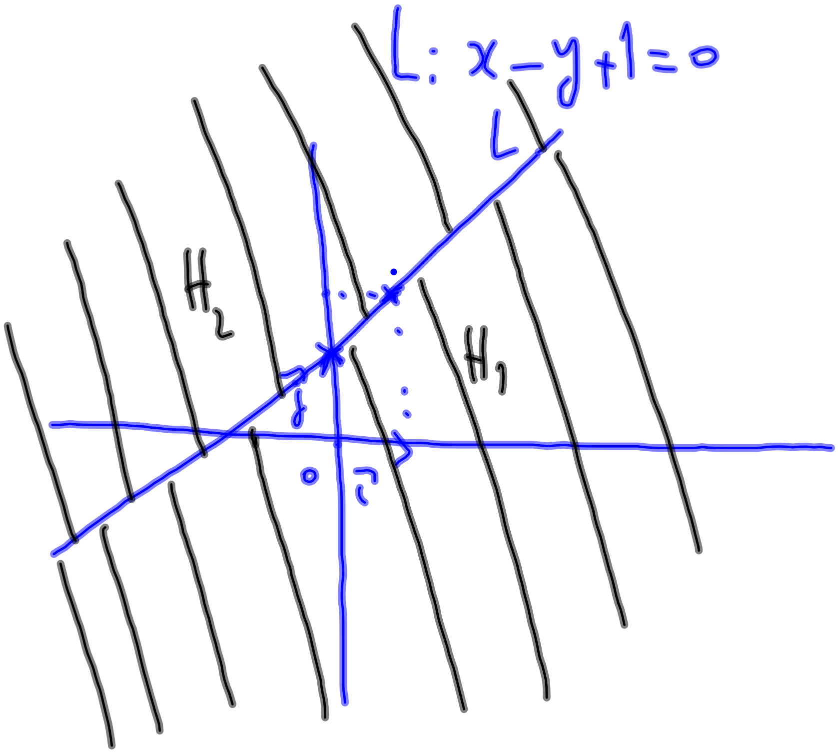
(٣)

$$f(x,y)=\frac{x^2+1}{x-y+1}$$

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $x-y+1\neq 0$

نعتبر: $L:\ x-y+1=0$

x	1	0
y	2	1



$$D_f=\mathbb{R}^2\setminus L$$
$$=H_1\cup H_2$$

الدائرة والقرص

ليكن $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و $r>0$

(1) $\mathcal{C}=\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$

فإن $\mathcal{C}$ هي الدائرة مركزها النقطة $I(a,b)$ ونصف قطرها r. نرمز لها:

$\mathcal{C}=\mathcal{C}(I,r)$ حيث $I(a,b)$

(2) $D=\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2\}$

فإن D هو القرص المغلق المحدود بالدائرة $\mathcal{C}(I,r)$

(3) $\mathring{D}=\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$

فإن $\mathring{D}$ هو القرص المفتوح المحدود بالدائرة $\mathcal{C}(I,r)$

(4) $E=\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2\geq r^2\}$

أو

$\mathring{E}=\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2>r^2\}$

فإن E , $\mathring{E}$ هو خارج القرص المحدود بالدائرة $\mathcal{C}$

مثال: جد مجال الدالة f

(١) $f(x,y) = xy^2 - \sin(xy) + \ln(x^2+y^2-3)$

(٢) $f(x,y) = 4x+5y-4+\sqrt{x^2+y^2-3}$

(٣) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-2x-4y-8)$

(٤) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)+\sqrt{x^2+y^2-4x+2y-15}$

(٥) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{15-2y+4x-y^2-x^2}}$

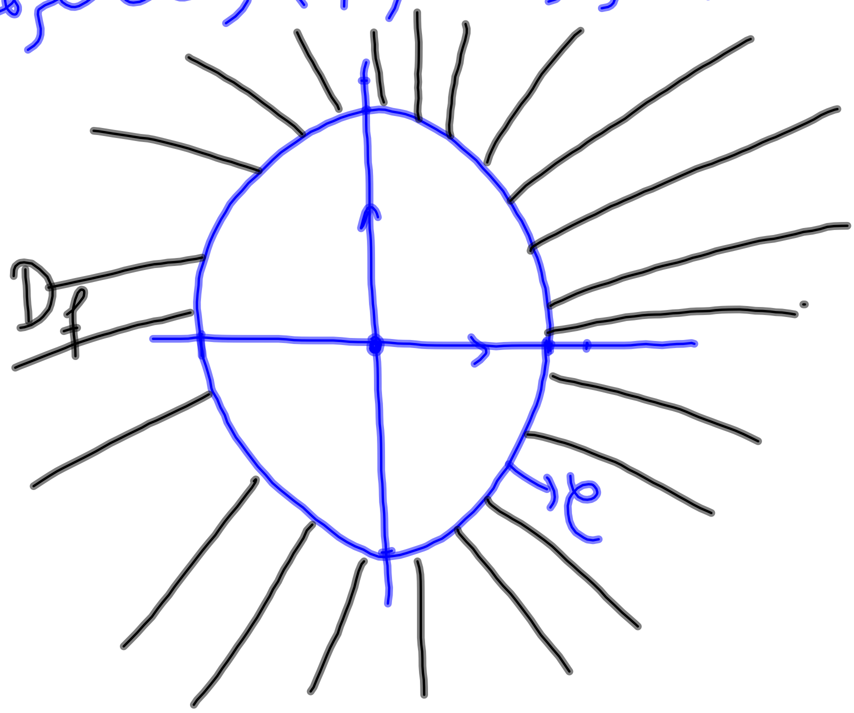
$f(x,y) = xy^2 - \sin(xy) + \ln(x^2+y^2-3)$ (1) الحل

$f(x,y)$ معرفة إذا، فقط إذا كان: $x^2+y^2-3>0$

$\Leftrightarrow$ $x^2+y^2 > \sqrt{3}^2$

ليكن $\mathcal{C}: x^2+y^2 = \sqrt{3}^2$

$\mathcal{C}$ هي الدائرة مركزها $(0,0)$ ، نصف قطرها $\sqrt{3}$



(٢)

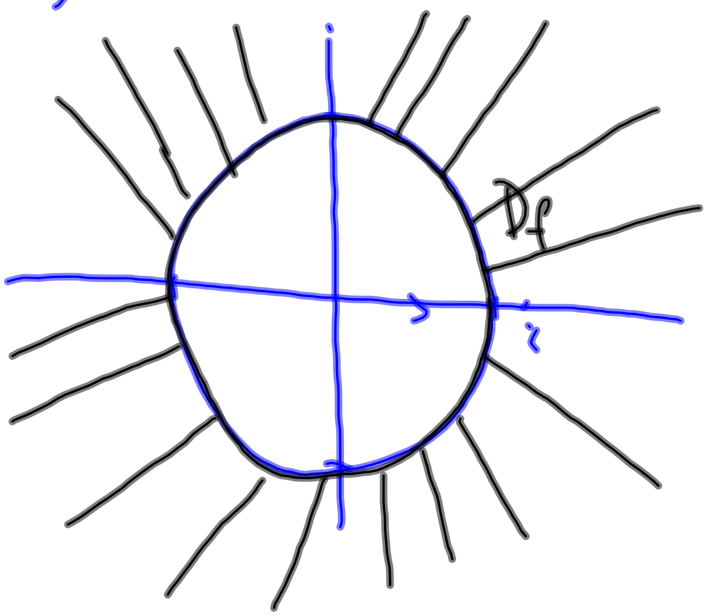
$f(x,y) = 4x + 5y - 4 + \sqrt{x^2+y^2-3}$

$f(x,y)$ معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2+y^2-3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq \sqrt{3}^2$

نعتبر $\mathcal{C}: x^2+y^2 = \sqrt{3}^2$

$\mathcal{C}$ هي الدائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$



D_f خارج القرص مركزه $(0,0)$ ونصف قطره $\sqrt{3}$.

$$f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2-2x-4y-8\right)$$ (٣)

معرفة إذا، فقط إذا كان: $f(x,y)$

$$x^2+y^2-2x-4y-8>0$$

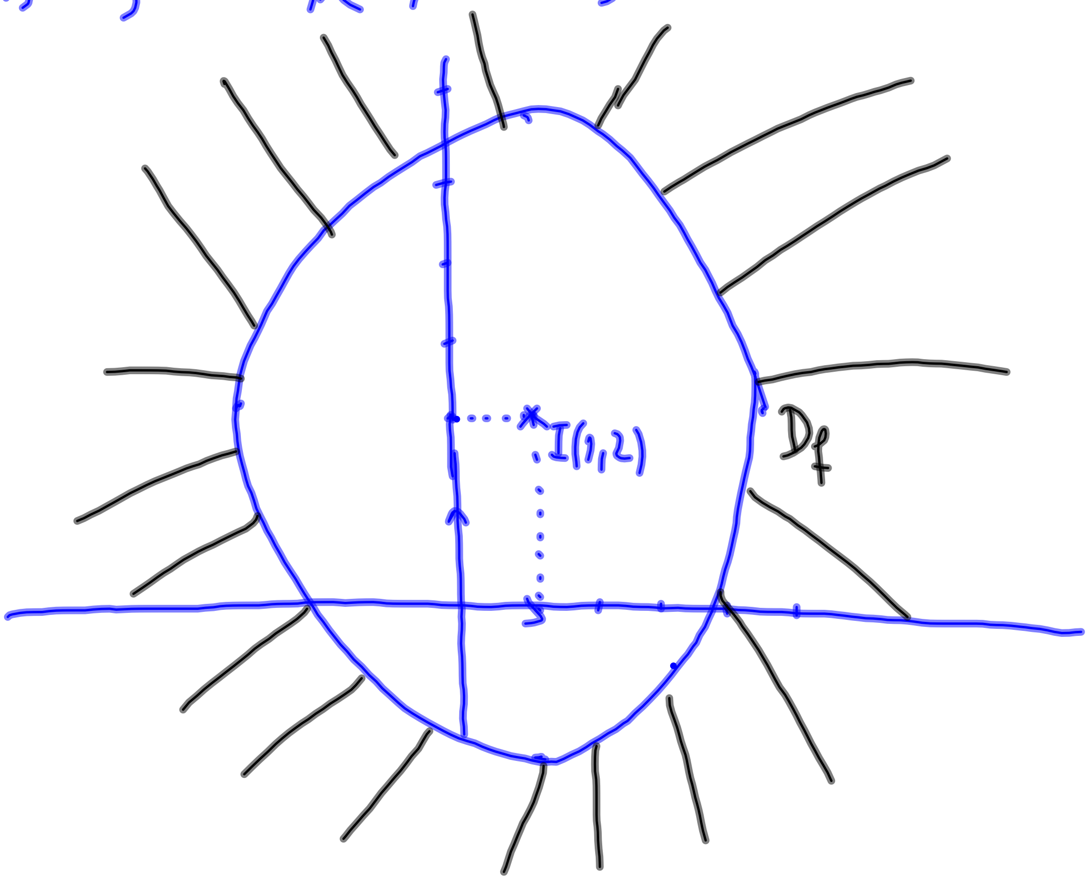
لنعتبر:

$$\mathcal{C}:\ x^2+y^2-2x-4y-8=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(x^2-2x+1^2\right)+\left(y^2-4y+2^2\right)-5-8=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y-2)^2=13=\sqrt{13}^2$$

فإن $\mathcal{C}$ هي الدائرة مركزها $I(1,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{13}$.



تذكير :

$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2 \Leftrightarrow x^2+2ax = (x+a)^2-a^2$$

$$(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$$

$$(x-a)(x+a) = x^2-a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$$

$$(x-a)^2 = x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$$

$$(x-a)(x^2+xa+a^2) = x^3-a^3$$

$$(x+a)(x^2-xa+a^2) = x^3+a^3$$

(٤)

$$f(x,y) = \sin(x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2-4x+2y-15}$$

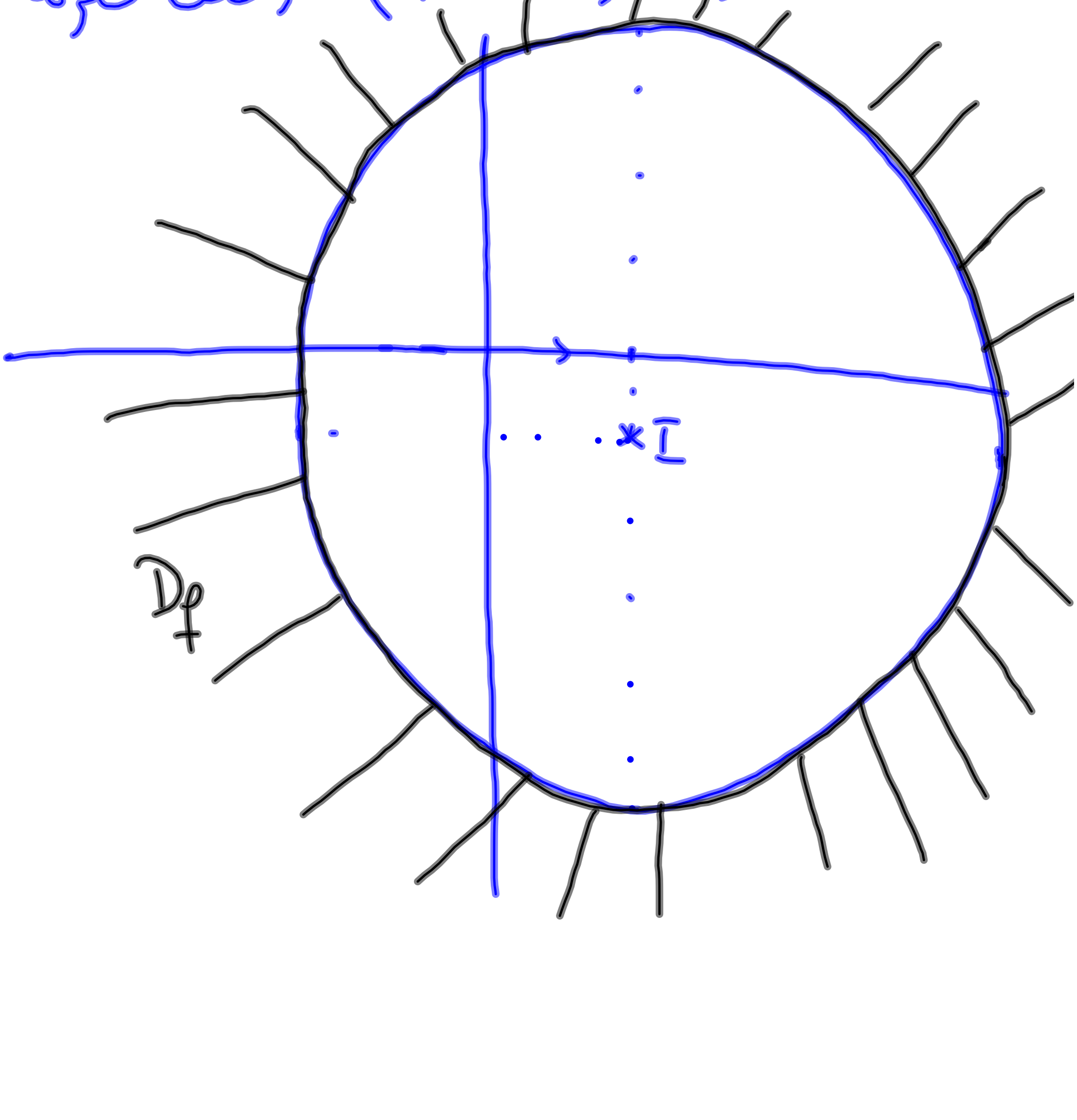
$f(x,y)$ معرفة إذا, فقط إذا كان $x^2+y^2-4x+2y-15 \geq 0$

$$\mathcal{C}: x^2+y^2-4x+2y-15=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+2^2)+(y^2+2y+1^2)-5-15=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 = 20 = (2\sqrt{5})^2$$

فإن $\mathcal{C}$ هي الدائرة مركزها $I(2,-1)$, نصف قطرها $r=2\sqrt{5}$



(٥)

$$f(x,y)=\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{15-2y+4x-x^2-y^2}}$$

$f(x,y)$ معرفة إذا، نشترط إذا كان $15-2y+4x-x^2-y^2>0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-15<0$

لنعتبر:

$\mathcal{C}: x^2+y^2-4x+2y-15=0$

حسب السؤال (٤)

فإن $\mathcal{C}$ هي الدائرة مركزها $I(2,-1)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{5}$

فإن D_f القرص المفتوح مركزه $I(2,-1)$ ونصف قطره $2\sqrt{5}$

النهايات: ليكن $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ، $(a,b)\in\overline{D_f}$ ، $L\in\mathbb{R}$

الرمز: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ أو $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} L$

$\overline{D}$: نقاط D ، ونقاط حدود D

مبرهنة: إذا كان: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$

فإن: (١) لكل مسار C حيث $C: y=g(x)$ ، $b=g(a)$ ، $\lim\limits_{x\to a} f(x,g(x))=L$

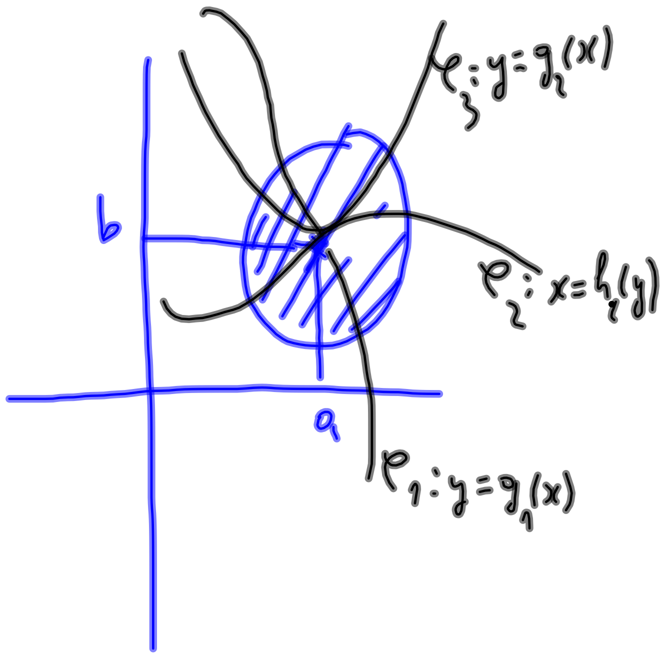
(٢) لكل مسار C حيث $C: x=h(y)$ ، $a=h(b)$ ، $\lim\limits_{y\to b} f(h(y),y)=L$

ملاحظة: إذا وجد مسارين مختلفين C_1 ، C_2 يعبران من (a,b)

حيث $\lim\limits_{(x,y)\in C_1} f(x,y)=L_1$ ، $\lim\limits_{(x,y)\in C_2} f(x,y)=L_2$

و $L_1\neq L_2$

فإن $f(x,y)$ ليس لها نهاية عندما (x,y) تقترب من (a,b)


$C_3 : y = g_2(x)$
b
$C_2 : x = h_2(y)$
a
$C_1 : y = g_1(x)$

مثال 3 ص 34

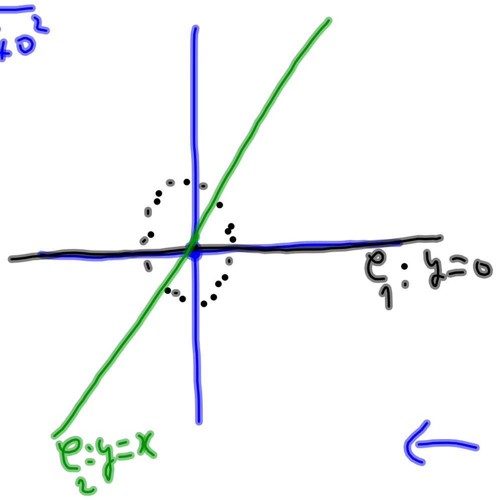
اذا كانت $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. اثبت أن: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة.

الحل:

$D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0} 0=0$$



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

بما أن $\lim_{x\to 0} f(x,0)\neq\lim_{x\to 0} f(x,x)$

وبالتالي $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة.

مثال 8 ص 38

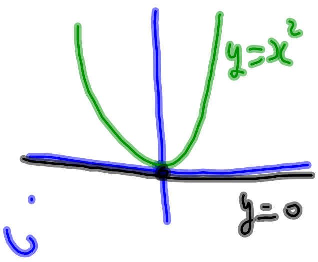
إذا كانت $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ ؛ نختبر وجود النهاية $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y)$

الحل:

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\leftarrow \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot 0}{x^4+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\leftarrow \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



بما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2)$

بما أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة.

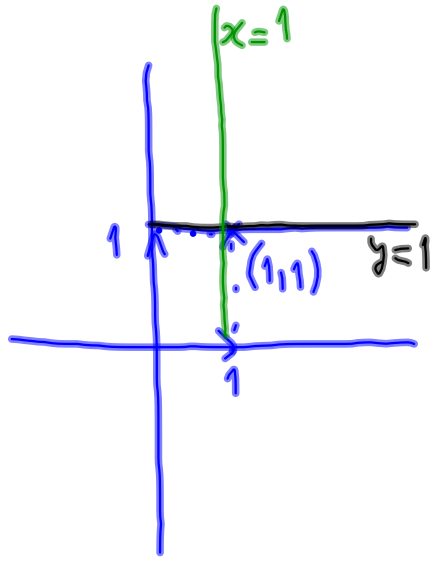
مثال ص 38

أحسب $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4}$ إن وجدت.

الحل: $f(x,y)$ موجودة إذا فقط إذا كان $x^3-y^4 \neq 0$

$$x^3 - y^4 = 0 \iff y^4 = x^3 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y = (x^3)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}} \end{cases}$$

$$D_f = \left\{(x,y): y \neq x^{\frac{3}{4}}, x \geq 0\right\}$$



$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=1}} f(x,y) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-1^3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{\substack{x=1\\ y\to 1}} f(x,y) = \lim_{y\to 1} \frac{1-y^4}{1-y^4} = \lim_{y\to 1} 1 = 1$$

بما أن

$$\lim_{x\to 1} f(x,1) \neq \lim_{y\to 1} f(1,y)$$

فإن $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ غير موجودة.

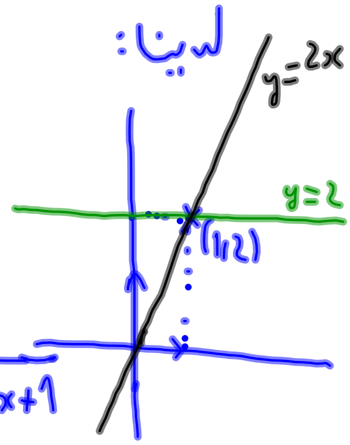
مثال 10 ص 39

احسب $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$ إن وجدت.

الحل: نلاحظ أن

$$\lim_{(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} = \frac{0}{0} \;!!! \ldots$$

لدينا:



$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} \;??\ldots$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 1\\ y=2}} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2x-2+2}{x^2+4-2x-8+5} = \lim_{x\to 1} \frac{0}{x^2-2x+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{0}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} 0 = 0$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 1\\ y=2x}} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} = \lim_{x\to 1} \frac{x\,2x-2x-2x+2}{x^2+(2x)^2-2x-4(2x)+5} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-4x+2}{5x^2-10x+5}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)^2}{5(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

فإن

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=2}} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} \neq \lim_{\substack{x\to 1\\ y=2x}} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$$

فإن $\displaystyle\lim_{(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$ غير موجودة.

مثال 11 ص 39

بين فيما إذا كان النهاية الآتية موجودة:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{3xy}{5x^4+2y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3x\cdot x}{5x^4+2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{7x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{7x^2}$$

$$= +\infty$$

فإن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4}$ غير موجودة.

مثال 12 ص 39, 40

احسب $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2}$ إن وجدت.

الحل:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x(x^2+y^2)-2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(3x-2y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x-2y) = 0$$

إذن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2} = 0$$

مبرهنة: لتكن f دالة بمتغيرين مجالها D ، $(a,b)\in\overline{D}$

حيث $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$

و $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ لكل $(x,y)\in\Delta$

و Δ : قرص مركزه (a,b)، نصف قطره $r>0$:

فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

مبرهنة:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0 \iff \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)| = 0$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)| = |L|$

انتبه:

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجودة $\not\Longleftarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)| = \alpha > 0$

مبرهنة: إذا كان $g(x,y)$ محدودة على $B((a,b),r)$

$\lim\limits_{(a,b)} h(x,y) = 0$

فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)\cdot g(x,y) = 0$

مثال 14 ص 41

أثبت أن: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

تذكر: $\sqrt{x^2} = x$، $x \geq 0$

$\sqrt{x^2} = |x|$ (1)

$0 \leq y^2$ (2)

$x^2 \leq x^2+y^2$

الحل: لدينا: $0 \leq x^2 \leq x^2+y^2$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

إذن $0 \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

إذن $0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

إذن $0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \leq |y|$

وبالتالي $0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |y|$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

بما أن $\lim_{(0,0)} 0 = 0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

فإن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0$

إذن $\lim_{(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

طريقة ثانية:

لدينا: $0 \leq \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

يعني $-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$ لكل $(x,y) \neq (0,0)$

ولدينا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$

اذاً $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot y = 0$

بان $\lim_{(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

مثال: اثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

الحل: ليكن: $(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

بما أن: $0 \le y^2 \le x^2+y^2$

فإن: $0 \le \frac{y^2}{x^2+y^2} \le 1$

فإن: $0 \le |x| \frac{y^2}{x^2+y^2} \le |x|$

ولدينا: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

فإن: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| \frac{y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = 0$

فإن: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

مثال: أثبت أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+6xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

مثال 17 ص 43

برهن أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=0$

الحل:

ملاحظة: نعلم أنه لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\left(|x|-|y|\right)^2\geq 0$

بأن $|x|^2-2|xy|+|y|^2\geq 0$

بأن $x^2+y^2\geq 2|xy|$

بأن $\boxed{x^2+y^2\geq \frac{x^2+y^2}{2}\geq |xy|}$

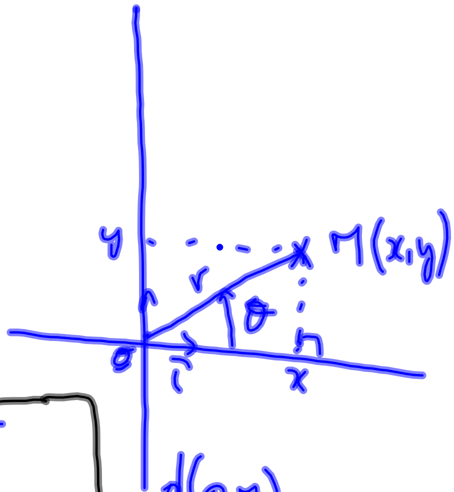
وبالتالي: $0\leq \left|xy\ln(x^2+y^2)\right|\leq\left|\frac{x^2+y^2}{2}\ln(x^2+y^2)\right|$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$

نعلم أن $\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} u\ln u=0$ ، نفرض أن $u=x^2+y^2$

بأن $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=0$

بأن $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|xy\ln(x^2+y^2)\right|=0$ بأن: $\lim_{(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=0$

الاحداثيات القطبية



$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} ; r > 0}$$

$d(O,M) = r$

$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$

- $x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2$
$= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$
$= r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} =$

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0 \end{aligned}}$$

- $\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan(\theta)$, $x \neq 0$

مثال: احسب (١)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

(٢)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

(٣)

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

ملاحظة: $(x,y)\to(0,0)$

إذا كان $(x,y)=(0,0)$ فإن $\begin{cases} x=0=r\cos\theta \\ y=0=r\sin\theta \end{cases}$

فإن $\begin{cases} r=0 \text{ أو } \cos\theta=0 \\ r=0 \text{ أو } \sin\theta=0 \end{cases}$

نفرض أن $r\neq 0$ فإن $\cos\theta=0$, $\sin\theta=0$, هذا غير ممكن

لأن $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ لكل θ

وبالتالي $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ إذا، فقط إذا كان $r=0$ ($\theta\in\mathbb{R}$)

فإن: $\boxed{(x,y)\to(0,0) \iff \underset{\theta\in\mathbb{R}}{r\to 0}}$

الحل: (1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\,(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{r}\; \underbrace{\cos\theta\,\sin^2\theta}_{\text{محدودة}} = 0$$

(2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim \frac{r^3\cos\theta\,\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\,\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{r} \frac{\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$ ← محدودة ؟

بيان:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2\cdot y^2}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

وبيان:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,x^2}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

بان $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ غير موجودة.

ملاحظة: القيمة $\dfrac{\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$ غير محدودة، إذا أن $r\to 0$

(٣)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^3+(r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$$

$$= 0$$

لأن $r\to 0$, $(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$ محدودة

$$\left(\begin{array}{l} -1 \le \cos^3\theta \le 1 \\ -1 \le \sin^3\theta \le 1 \\ -2 \le \cos^3\theta+\sin^3\theta \le 2 \quad \text{إذن} \end{array}\right)$$

الاتصال:

تعريف: ليكن f دالة في متغيرين و $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

1) f متصلة عند النقطة (a,b) إذا كان
$$\begin{cases} (a,b)\in D_f, \\ \lim\limits_{(a,b)} f(x,y)=f(a,b) \end{cases}$$

2) f متصلة على U إذا كان f متصلة عند كل نقطة من U.

مثال:
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}^2$$

• الدالة: $(x,y)\longmapsto\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ هي دالة كسرية متصلة على نطاقها $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ وبالتالي f متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

• عند النقطة $(0,0)$.

لدينا: $(0,0)\in D_f$ لأن $f(0,0)=0$

ولدينا
$$\lim_{(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$
$$=\lim_{r\to 0}r\cos\theta\sin^2\theta=0$$

لأن $\lim_{r\to 0}r=0$ ، $\cos\theta\sin^2\theta$ محدودة لكل θ.

وبالتالي $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$

وبالتالي f متصلة عند النقطة $(0,0)$.

الخلاصة: f متصلة على $\mathbb{R}^2$

مثال 18ص 44, 45

ادرس الاتصال

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل:

$$D_f=\mathbb{R}^2$$

• لدينا: $f(0,0)=0=\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(0,0)}f(x,y)$ و $(0,0)\in D_f$

فإن f متصلة عند النقطة $(0,0)$.

• لدينا $(x,y)\mapsto\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ هي دالة كسرية وبالتالي متصلة عند

كل نقطة من نطاقها $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

فإن f متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

وبالتالي: f متصلة على $\mathbb{R}^2$.

ملاحظة: ليكن:

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 2 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

نعلم أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$$

و لدينا

$$g(0,0)=2$$

فإن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\neq g(0,0)$$

فإن g ليست متصلة عند النقطة $(0,0)$.

(٢) ليكن

$$h(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

لدينا:

$$D_h=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

فإن h ليست متصلة عند $(0,0)$ لأن $(0,0)\notin D_h$.

مثال ١٩ ص ٤٥

ابحث الاتصال عند النقطة $(0,0)$ للدالة f

حيث
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل:

لدينا $(0,0)\in D_f$

ولدينا:
$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

فإن f ليست متصلة عند النقطة $(0,0)$.

ملاحظة: (1) بالنسبة للدالة g حيث
$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \dfrac{1}{2}, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

لدينا:
$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=x^2}}g(x,y)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=0}}g(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot0}{x^4+0^2}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^4}=0$$

فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)$ غير موجودة.

فإن g ليست متصلة عند النقطة $(0,0)$.