تصميم التجارب

(Design of Experiments)

الجزء الأول

تعريف ومصطلحات أساسية

مقدمة: مصطلحات وتعاريف:

- فيما يأتي نستعرض بعض التعاريف والمصطلحات الإحصائية.

المجتمع (Population):

- المجتمع عبارة عن مجموعة من العناصر. ولابد أن يكون المجتمع محددًا تحديدًا دقيقًا.

المتغير (Variable):

- هو خاصية (أو قيمة) متغيرة (كمية أو وصفية) تتغير قيمتها بتغير العناصر في المجتمع.

أنواع المتغيرات (Type of Variables):

- متغيرات وصفية أو نوعية (Qualitative)، وقيمها عبارة عن مسميات أو صفات (فئات)، وهي نوعين:
  - متغيرات وصفية اسمية (Nominal) وهو متغيرات غير قابلة للترتيب.
    - مثال: الجنس، الجنسية، لون البشرة، فصيلة الدم.
  - متغيرات وصفية ترتيبية (Ordinal) وهو متغيرات قابلة للترتيب بطريقة ما.
    - مثال: الدرجة العلمية، الرتبة العسكرية، تقدير الطالب (ليس الدرجة).

- متغيرات كمية (Quantitative)، وقيمها عبارة عن قيم عددية أو كمية، وهي نوعين:
  - متغيرات كمية منفصلة (Discrete) وهو متغيرات تأخذ قيم في مجموعة متقطعة.

- مثال:عدد الحوادث، عدد المرضى، عدد الخلايا.
  - متغيرات كمية متصلة (Continuous) وهو متغيرات تأخذ قيم في مجموعة متصلة.
    - مثال: الوزن، الطول، درجة الحرارة، الضغط.

المجتمع الإحصائي تحت الدراسة (Statistical Population):

- المجتمع الإحصائي تحت الدراسة هو عبارة عن مجموعة قيم المتغير الذي نهتم به لجميع عناصر المجتمع الذي نهتم به.
- ويسمى عدد عناصر المجتمع بحجم المجتمع (Population Size) ونرمز له بالرمز (N).

المعلمة (Parameter):

- المعلمة هي خاصية ذات قيمة نوعية أو كمية ويتميز بها المجتمع. وتكون المعلمة في الغالب مجهولة.
- نكون مهتمين بمعرفة قيمة المعلمة (تقدير = Estimation)، أو التحقق من بعض المزاعم حولها (اختبار فرضيات = Hypotheses Testing).
- مثال 1: نسبة الإناث في مجتمع معين (p).
  - المتغير هو الجنس / متغير نوعي / نهتم بالنسبة (p = Proportion) وهي معلمة للمجتمع.
- مثال 2: متوسط المجتمع (μ) وتباين المجتمع (σ^2) لأوزان نوع معين من الخراف.
  - المتغير هو الوزن / متغير كمي / نهتم بالمتوسط (μ = Mean) ونهتم بالتباين ($\sigma^2 = \text{Variance}$) وهما معلمتان للمجتمع.

ملاحظة:

المتوسط: هو مقياس لموضع القيم (أو مكان تمركز أو تجمع القيم). (مقياس للنزعة المركزية).

التباين: هو مقياس لتفرق القيم (تباعد أو تقارب أو تذبذب القيم) عن متوسطها. (مقياس للاختلاف أو التشتت).

العينة (Sample):

- العينة هي جزء من المجتمع تؤخذ بطريقة إحصائية مناسبة ويتم قياس المتغير على عناصر العينة للحصول على بيانات العينة.
- ويسمى عدد عناصر العينة بحجم العينة (Sample Size) ويرمز له بالرمز (n).
- ويجب مراعاة ما يلي في العينة:
  - كفاية بيانات العينة (حجم العينة لابد أن يكون كبيرًا بما فيه الكفاية).
  - دقة بيانات العينة (يجب أن تمثل العينة المجتمع تمثيلاً جيدًا.)

الإحصاءة (Statistic):

- الإحصاءة عبارة عن قيمة محسوبة من بيانات العينة، وتستخدم للاستدلال حول المعلمة المجهولة في المجتمع.

- مثال 1: (نسبة العينة = Sample Proportion)
  - لنفرض أن نسبة الإناث في أحد المجتمعات هي (p) وقيمتها مجهولة.
  - والبيانات التالية عبارة عن بيانات الجنس لعينة مكونة من عشرة أشخاص مأخوذة من هذا المجتمع:

M , M , F , F , M , F , F , M , F , F

  - نلاحظ أن:
    - المتغير = الجنس (متغير نوعي/وصفي)
    - حجم العينة هو: $n = 10$
    - عدد الإناث في العينة هو: $x = 6$
    - نسبة الإناث في العينة هي:

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{6}{10} = 0.6$$

  - وتعتبر نسبة العينة ($\hat{p}$) تقديرًا جيدًا لنسبة المجتمع (p) الذي سُحبت منه العينة.
  - لاحظ أن نسبة العينة هي إحصاءة لأنها محسوبة من قيم العينة.

- مثال2: (الإحصاءة: متوسط العينة = Sample Mean)
  - لنفرض أن متوسط أوزان الأشخاص في أحد المجتمعات هو (μ) وقيمته مجهولة.

- والبيانات التالية عبارة عن أوزان (بالكيلوغرام) عينة مكونة من خمسة أشخاص مأخوذة من هذا المجتمع:

48, 55, 62, 53, 60

- نلاحظ أن:
  - المتغير = الوزن (متغير كمي)
  - حجم العينة هو: $n = 5$
  - مجموع قيم العينة هو: $\sum_{i=1}^{n} \quad {}_{i} = 278$
  - متوسط العينة هو:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{278}{5} = 55.6 \quad \text{(kg)}$$

- ويعتبر متوسط العينة ($\bar{X}$) تقديرًا جيدًا لمتوسط المجتمع الذي سُحبت منه العينة (μ).
- لاحظ أن متوسط العينة هو إحصاءة لأنه محسوب من قيم العينة.
- وحدة المتوسط هي نفس وحدة البيانات الأصلية.

- مثال3: (الإحصاءة: تباين العينة = Sample Variance)
  - لنفرض أن تباين أوزان الأشخاص في أحد المجتمعات هو (σ^2) وقيمته مجهولة.
  - والبيانات التالية عبارة عن أوزان (بالكيلوغرام) عينة مكونة من خمسة أشخاص مأخوذة من هذا المجتمع:

48, 55, 62, 53, 60

- من المثال السابق وجدنا أن:
  - حجم العينة هو: $n = 5$
  - متوسط أوزان العينة هو: $\bar{X} = 55.6$
  - تباين العينة (S^2) هو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$
$$= \frac{(48-55.6)^2 + (55-55.6)^2 + (62-55.6)^2 + (53-55.6)^2 + (60-55.6)^2}{5-1}$$
$$= \frac{125.2}{4} = 31.3 \quad (kg^2)$$

- كما يمكن حساب تباين العينة بالصيغة الحسابية التالية:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n-1}$$

- أو بالصيغة:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

حيث أن $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ هو مجموع مربعات القيم هو:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 48^2 + 55^2 + 62^2 + 53^2 + 60^2 = 15582$$

(نُربع كل قيمة أولاً، ثم نجمع مربعات القيم)

وعليه فإن:

$$S^2 = \frac{15582 - (5)(55.6^2)}{5-1} = 31.3 \quad kg^2$$

- ويعتبر تباين العينة (S^2) تقديرًا جيدًا لتباين المجتمع الذي سُحبت منه العينة (σ^2).
- لاحظ أن تباين العينة هو إحصاءة لأنه محسوب من قيم العينة.
- وحدة التباين هي وحدة مربعة.

ملاحظة:

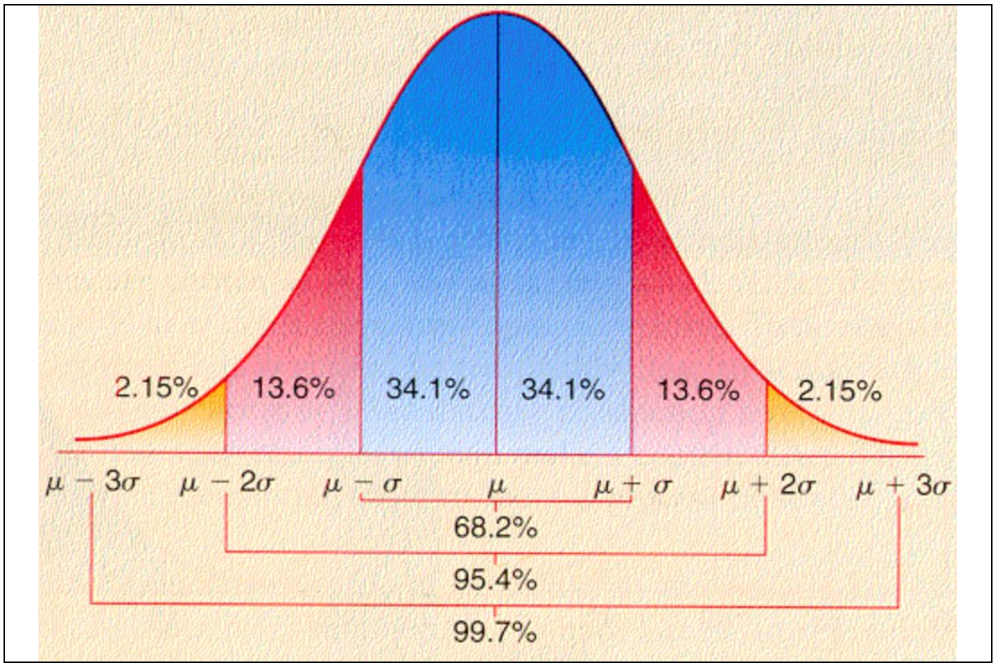
- القيمة التي في مقام تباين العينة ($n - 1$) تسمى درجات الحرية ويرمز لها بالرمز (df) أو (ν).
- الجذر التربيعي للتباين (Variance) يسمى بالانحراف المعياري (Standard Deviation).
  - الانحراف المعياري للمجتمع هو: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
  - الانحراف المعياري للعينة هو: $S = \sqrt{S^2}$
- وحدة الانحراف المعياري هي نفس وحدة البيانات الأصلية.

التوزيع الطبيعي (Normal Distribution):

- هو توزيع متغير عشوائي متصل أو مستمر (Continuous Random Variable) وهو يصف توزيع ظاهرة معينة، مثل: الأطوال، الأوزان، درجات الحرارة، المسافة، الزمن، وغيرها.
- يعتمد التوزيع الطبيعي على معلمتين هما:
  - المتوسط (μ) = Mean
  وهو يحدد موضع التوزيع (موضع تركز قيم التوزيع على خط الأعداد الحقيقية).
  - التباين (σ^2) = Variance
  وهو يقيس مدى تباعد أو تقارب (تذبذب) قيم التوزيع حول المتوسط.
  فكلما كانت قيمة التباين كبيرة، كلما كانت قيم التوزيع متباعدة عن المتوسط، والعكس بالعكس.
- الجذر التربيعي للتباين يسمى بالانحراف المعياري (Standard Deviation) ويرمز له بالرمز (σ).
- يرمز للتوزيع الطبيعي الذي متوسطه (μ) وتباينه (σ^2) بالرمز $N(\mu, \sigma^2)$.
- إذا كان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط (μ) وتباين (σ^2)، فإننا نكتب:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- شكل منحنى التوزيع الطبيعي يأخذ شكل الجرس المقلوب.
وهو متماثل حول المتوسط (μ)، كما في الشكل التالي:



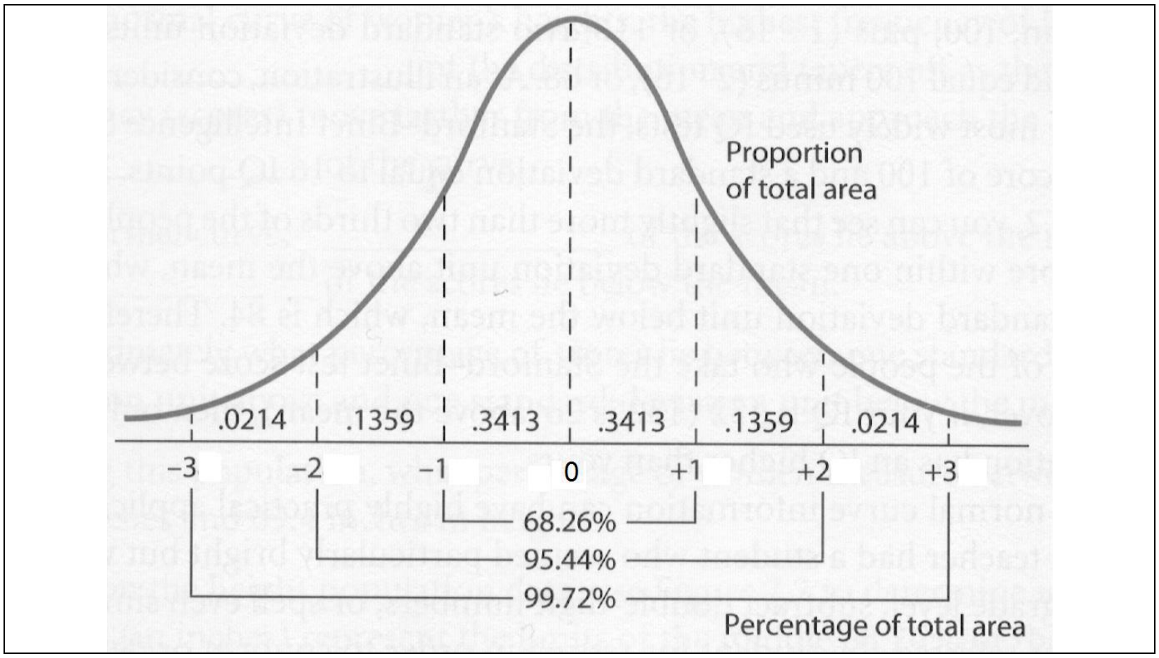
- ويلاحظ ما يأتي:
  - 68.2% من قيم التوزيع تتراوح بين $\mu + \sigma$ و $\mu - \sigma$.
  - 95.4% من قيم التوزيع تتراوح بين $\mu + 2\sigma$ و $\mu - 2\sigma$.
  - 99.7% من قيم التوزيع تتراوح بين $\mu + 3\sigma$ و $\mu - 3\sigma$.
  - المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع = 1.

التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution):

- هو توزيع طبيعي متوسطه يساوي الصفر ($\mu = 0$) وتباينة يساوي الواحد ($\sigma^2 = 1$).
- يرمز للتوزيع الطبيعي المعياري بالرمز $N(0,1)$.
- يرمز للمتغير العشوائي الذي يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري بالرمز (Z)، ونكتب:

$$Z \sim N(0,1)$$

- شكل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري يأخذ شكل الجرس المقلوب.
  وهو متماثل حول الصفر.



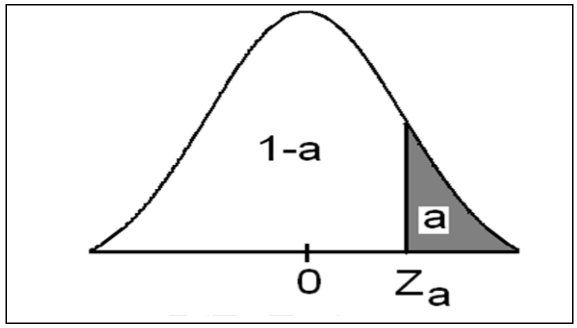
- ويلاحظ ما يأتي:
  - 68.2% من قيم التوزيع تتراوح بين 1+ و 1- .
  - 95.4% من قيم التوزيع تتراوح بين 2+ و 2- .
  - 99.7% من قيم التوزيع تتراوح بين 3+ و 3- .
  - المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع = 1.

القيم الجدولية للتوزيع الطبيعي المعياري (Z - Tabulated Value):

- نرمز لقيمة المتغير العشوائي (Z) الذي يتوزع وفق الطبيعي المعياري والتي يليها (على يمينها) مساحة مقدارها (a) ويسبقها (على يسارها) مساحة مقدارها (1-a) بالرمز:

$$Z_a$$

والشكل التالي يوضح هذا الترميز.



- بسبب تماثل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري حول الصفر فإن:

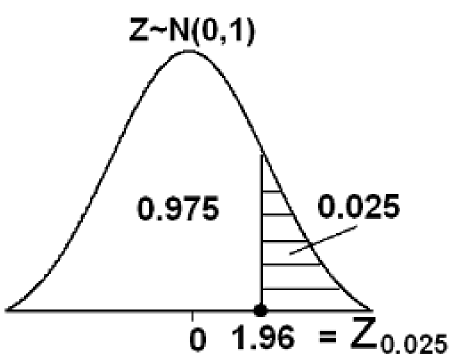
$$Z_{1\text{-}a} = -Z_a$$

فعلى سبيل المثال: $Z_{0.65} = Z_{0.35}$

- لاحظ أن القيمة Z_a هي القيمة التي يكون على يمينها مساحة مقدارها (a) وعلى يسارها مساحة مقدارها (1–a).
- والأمثلة الآتية توضح طريقة استخراج القيمة الجدولية (Z_a) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

مع ملاحظة أننا في بحثنا في الجدول، نحدد المساحة التي علي اليسار (كما هو واضح من المساحة المظللة في الشكل في أعلى الجدول – مفتاح الشكل)

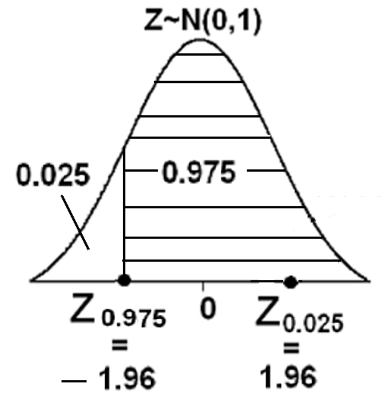
- مثال 1: $Z_{0.025} = 1.96$



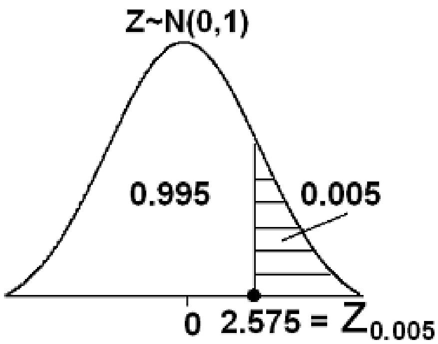
z	…	0.06	…
⋮	⋮	↑ ↑	⋮
1.9	← ←	0.975	…
⋮	⋮	⋮	⋮

لاحظ أن:

$$Z_{0.975} = -Z_{1-0.975} = -Z_{0.025} = -1.96$$



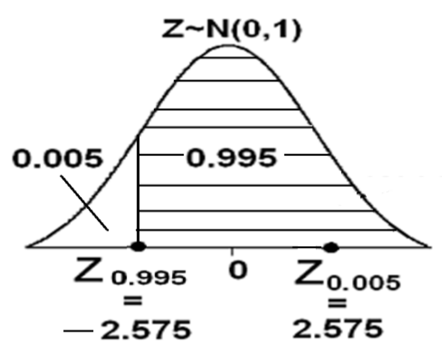
- مثال 2: $Z_{0.005} = 2.575$



z	…	0.07	0.08	…
⋮	⋮	↑ ↑	↑ ↑	⋮
2.5	← ←	0.9949	0.9951	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

لاحظ أن:

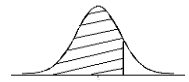
$$Z_{0.995} = -Z_{1-0.995} = -Z_{0.005} = -2.575$$



- مثال 3:

بالمثل نجد أن: (تمرين للقارئ)

$Z_{0.1} = 1.285$	$Z_{0.05} = 1.645$	$Z_{0.01} = 2.325$
$Z_{0.9} = -1.285$	$Z_{0.95} = -1.645$	$Z_{0.99} = -2.325$



جدول التوزيع الطبيعي المعياري

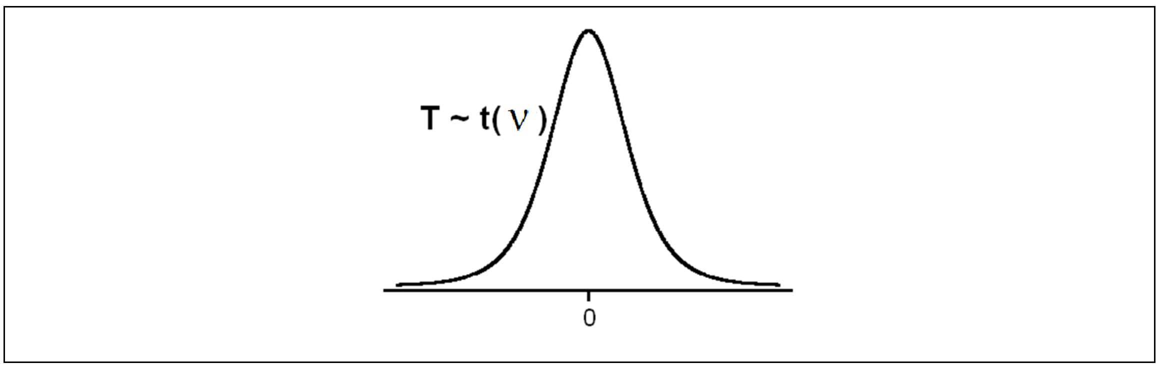
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

توزيع تي (t- Distribution):

- هو توزيع متغير عشوائي متصل أو مستمر.
- يعتمد على معلمة واحدة تسمى درجات الحرية (Degrees of Freedom) ويرمز لها بالرمز (df) أو (ν).
- شكل منحنى توزيع تي يشبه إلى حد ما منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.
- حيث يأخذ شكل الجرس المقلوب.
- وهو متماثل حول الصفر.
- ويتطابق منحنى توزيع تي مع منحنى التوزيع الطبيعي المعياري (تقريبًا) عندما تكون درجات الحرية كبيرة ($df=\nu > 30$).
- يرمز لتوزيع تي ذي درجات الحرية ($df=\nu$) بالرمز $t(\nu)$.
- إذا كان المتغير العشوائي (T) يتوزع وفق توزيع تي بدرجات حرية ($df=\nu$) فإننا نكتب:

$$T \sim t(\nu)$$

- الشكل التالي يبين شكل منحنى توزيع تي بدرجات حرية (ν).



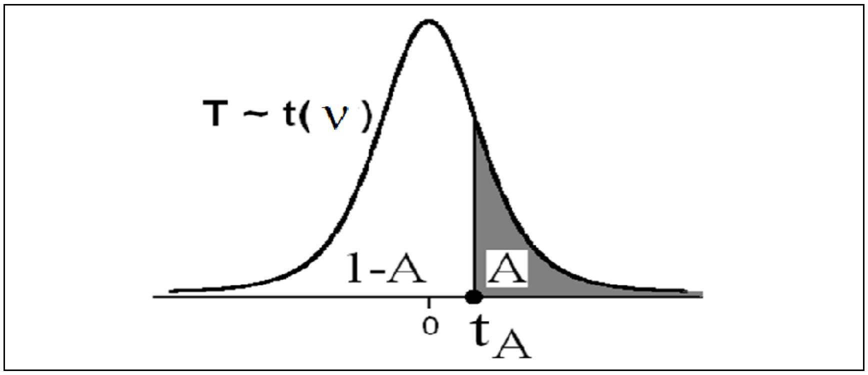
- المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع = 1.

القيم الجدولية لتوزيع تي (t - Tabulated Value):

- نرمز لقيمة المتغير العشوائي (T) الذي يتوزع وفق توزيع تي بدرجات حرية (ν) والتي يليها (على يمينها) مساحة مقدارها (A) ويسبقها (على يسارها) مساحة مقدارها (1-A) بالرمز:

$$t_A$$

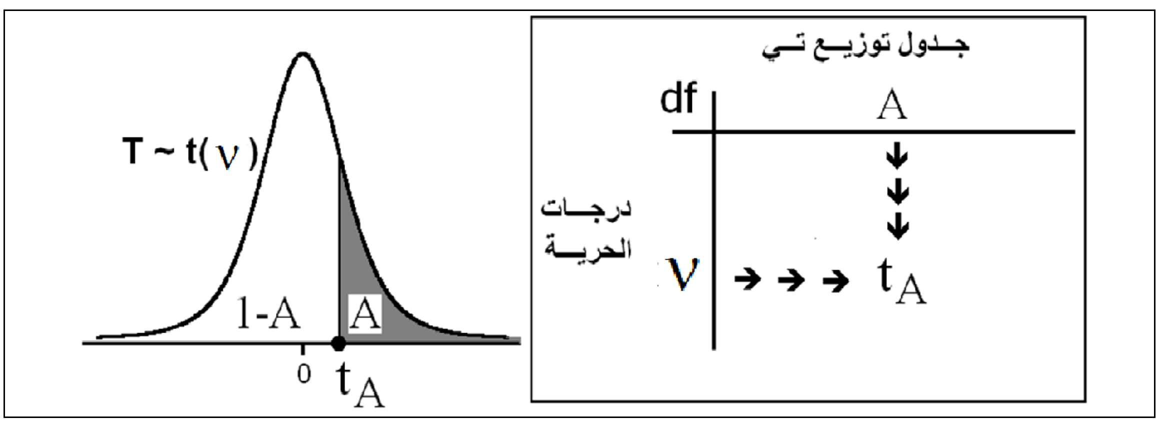
والشكل التالي يوضح هذا الترميز.



- بسبب تماثل منحنى توزيع تي حول الصفر فإن:

$$t_{1\text{-}A} = -t_A$$

- لاحظ أن القيمة $_A$ هي القيمة التي يكون على يمينها مساحة مقدارها (A) وعلى يسارها مساحة مقدارها (A–1).
- الشكل التالي يوضح طريقة إيجاد القيمة الجدولية t_A من جدول توزيع تي بدرجات حرية عددها (df=ν):

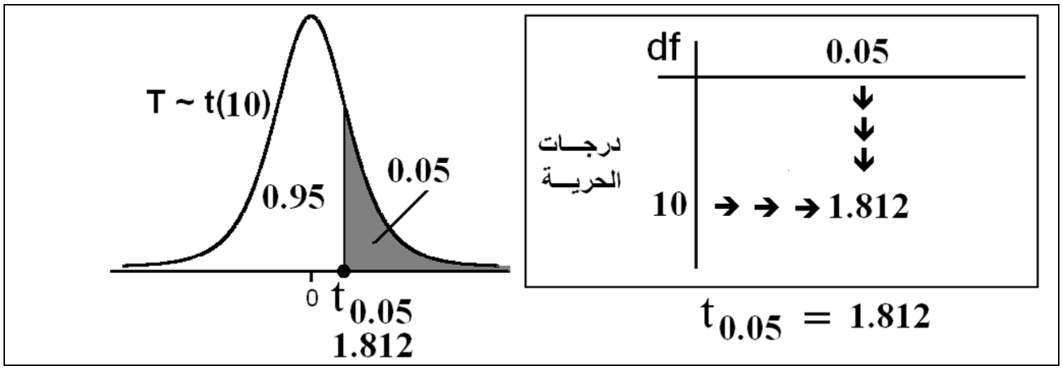


- والأمثلة الآتية توضح طريقة استخراج القيمة الجدولية (t_A) من جدول توزيع تي.
- مثال 1:

القيمة الجدولية $t_{0.05}$ لتوزيع تي بدرجات حرية عددها (df=ν=10)، هي القيمة التي يقع على يمينها مساحة مقدارها 0.05 وعلى يسارها مساحة مقدارها 0.95.
ومن الجدول نجد أن:

$$t_{0.05} = 1.812$$

والشكل التالي يبين كيفية إيجاد هذه القيمة.



- مثال 2:

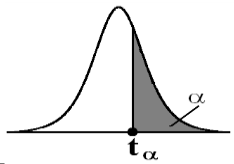
القيمة الجدولية $t_{0.95}$ لتوزيع تي بدرجات حرية عددها (df=ν=10)، هي القيمة التي يقع على يمينها مساحة مقدارها 0.95 وعلى يسارها مساحة مقدارها 0.05.

هذه القيمة ليست موجودة في الجدول.

وبسبب تماثل منحنى توزيع تي حول الصفر، فإن:

$$t_{0.95} = -t_{0.05} = -1.812$$

جدول توزيع تي:



df (ν)	α						
	0.40	**0.30**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

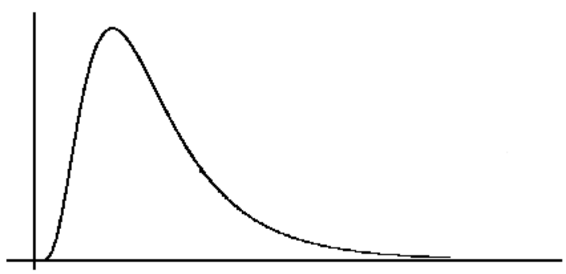
df	α						
(ν)	**0.02**	**0.015**	**0.01**	**0.0075**	**0.005**	**0.0025**	**0.0005**
1	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.850
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.125	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

توزيع إف (F- Distribution):

- هو توزيع متغير عشوائي متصل أو مستمر.
- يعتمد على معلمتين هما:
  المعلمة الأولى: درجات حرية البسط (Numerator Degrees of Freedom)
  ويرمز لها بالرمز (df_1) أو (ν_1).
  المعلمة الثانية: درجات حرية المقام (Denominator Degrees of Freedom)
  ويرمز لها بالرمز (df_2) أو (ν_2).
- يرمز لتوزيع إف بدرجات الحرية (ν_1) و (ν_2) بالرمز $F(\nu_1, \nu_2)$.
- إذا كان المتغير العشوائي (F) يتوزع وفق توزيع إف بدرجات الحرية (ν_1) و (ν_2)، فإننا نكتب:

$$F \sim F(\nu_1, \nu_2).$$

- الشكل التالي يبين أحد أشكال منحنى توزيع إف بدرجات الحرية (ν_1) و (ν_2).



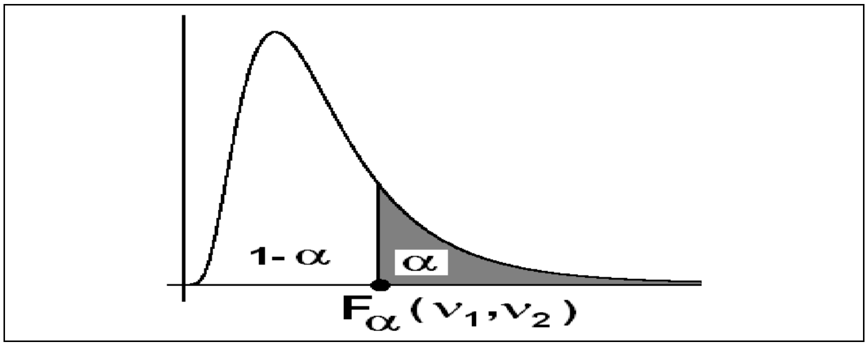
- المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع = 1.

القيم الجدولية لتوزيع إف (F - Tabulated Value):

- نرمز لقيمة المتغير العشوائي (F) الذي يتوزع وفق توزيع إف بدرجات الحرية (ν_1) و (ν_2)، والتي يليها (على يمينها) مساحة مقدارها (α) ويسبقها (على يسارها) مساحة مقدارها $(1-\alpha)$ بالرمز:

$$F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$$

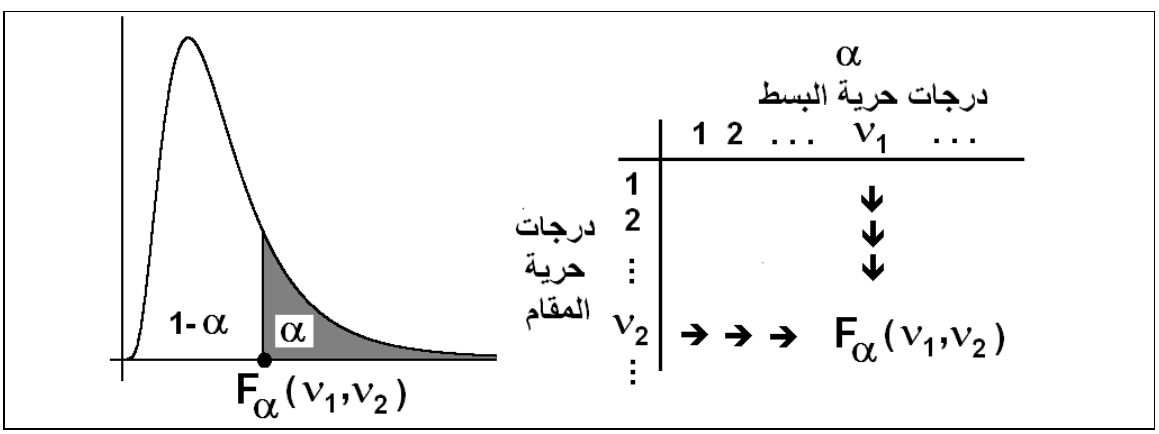
والشكل التالي يوضح هذا الترميز.



- لاحظ أن القيمة $_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)$ هي القيمة التي يكون على يمينها مساحة مقدارها (α) وعلى يسارها مساحة مقدارها $(1-\alpha)$.
- والنتائج التالية مهمة:
  - $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(\nu_2, \nu_1)}$
  (تستخدم هذه العلاقة لإيجاد القيم التي ليست موجودة في الجدول)
  - $\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)\right)^2 = F_{\alpha}(1, \nu)$
- قيم (α) شائعة الاستخدام في جداول إف هي:

$$\alpha = 0.01, 0.025, 0.05, 0.1$$

- الشكل التالي يوضح طريقة إيجاد القيمة الجدولية $F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)$ من جدول توزيع إف:

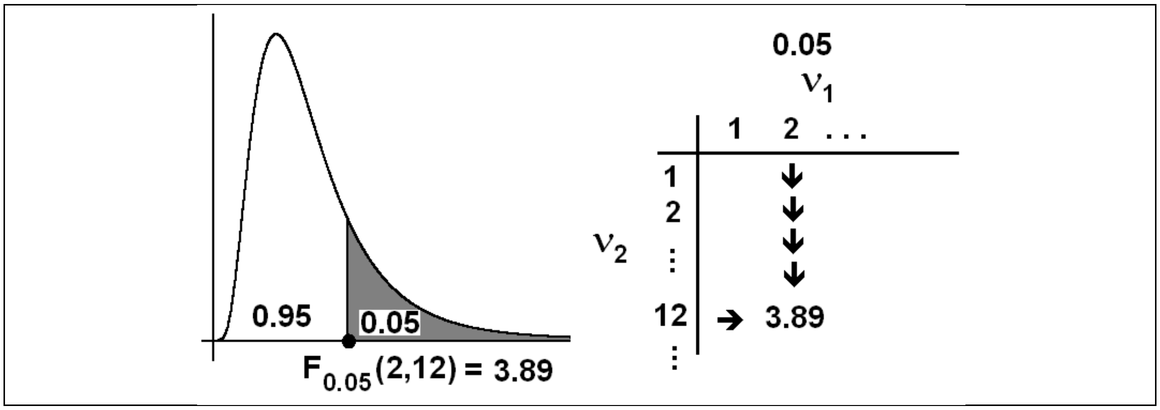


- الأمثلة التالية توضح طريقة استخراج القيمة الجدولية $(F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2))$ من جدول توزيع إف.

مثال 1: نريد إيجاد القيمة الجدولية $(F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2))$ عندما تكون:

$\nu_2 = 12$ و $\nu_1 = 2$ و $\alpha = 0.05$

من الجدول نجد أن $F_{0.05}(2,12) = 3.89$



مثال2: نريد إيجاد القيمة الجدولية ($F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$) عندما تكون:

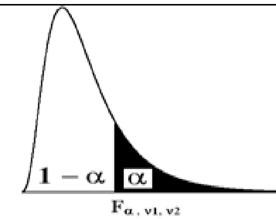
$\nu_2 = 2$ و $\nu_1 = 12$ و $\alpha = 0.95$

لا نستطيع إيجاد هذه القيمة مباشرة. ولكن باستخدام أحد العلاقات السابقة مع استخدام القيمة الجدولية في المثال السابق نجد أن:

$$F_{0.95}(12,2) = \frac{1}{F_{0.05}(2,12)} = \frac{1}{3.89} = 0.257$$

Percentage Points of the *F* Distribution; $F_{0.05, v1, v2}$

$$P(F > F_{\alpha, v_1, v_2}) = \alpha$$



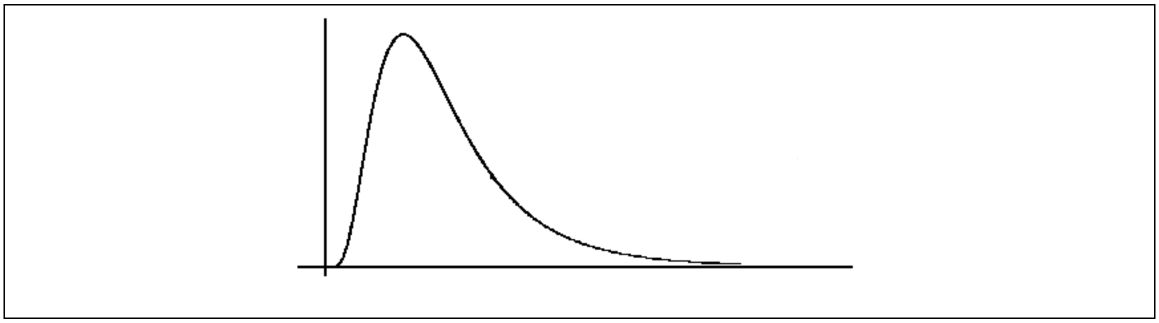
$\alpha = 0.05$	Degrees of Freedom for the Numerator (v_1)																		
Degrees of Freedom for the Denominator (v_2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60	120	∞
1	161.5	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.6	241.9	243.9	246.0	248.0	249.3	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

توزيع مربع كاي (Chi-square Distribution) or (χ^2 Distribution):

- هو توزيع متغير عشوائي متصل أو مستمر.
- يعتمد على معلمة واحدة، هي درجة الحرية (Degrees of Freedom) ويرمز لها بالرمز (df) أو (ν).
- يرمز لتوزيع مربع كاي بدرجة الحرية (ν) بالرمز $\chi^2(\nu)$.
- إذا كان المتغير العشوائي (V) يتوزع وفق توزيع مربع كاي بدرجة الحرية (ν)، فإننا نكتب:

$$V \sim \chi^2(\nu)$$

- الشكل التالي يبين أحد أشكال منحنى توزيع مربع كاي بدرجة الحرية (ν).



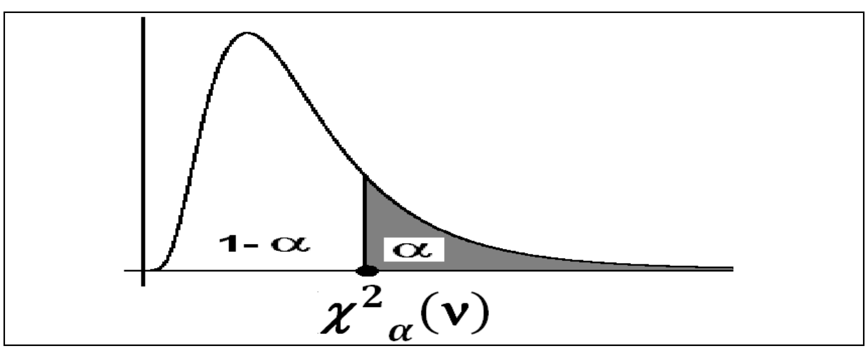
- المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع = 1.

القيم الجدولية لتوزيع مربع كاي (χ^2 - Tabulated Value):

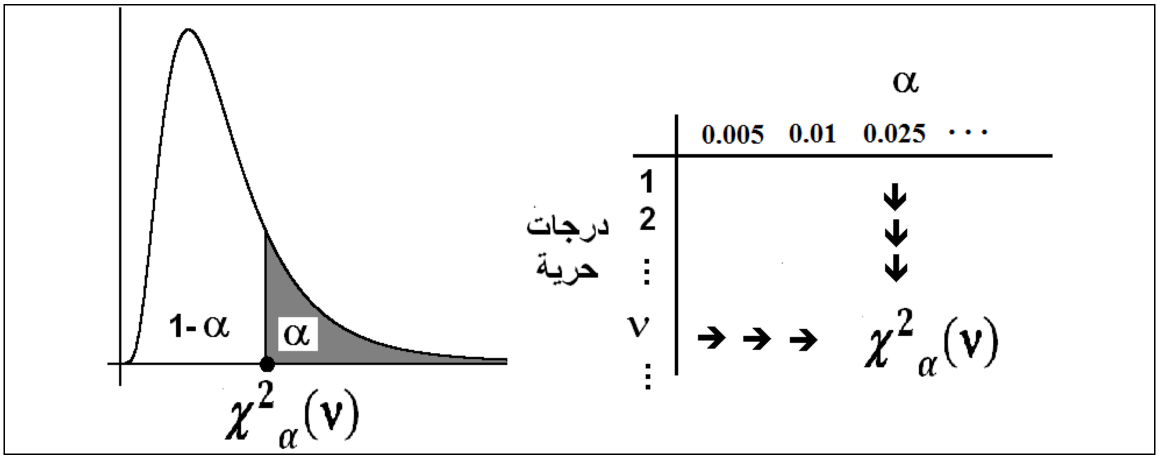
- نرمز لقيمة المتغير العشوائي (V) الذي يتوزع وفق توزيع مربع كاي بدرجة الحرية (ν)، والتي يليها (على يمينها) مساحة مقدارها (α) ويسبقها (على يسارها) مساحة مقدارها ($1-\alpha$) بالرمز:

$$\chi^2{}_{\alpha}(\nu)$$

والشكل التالي يوضح هذا الترميز.



- لاحظ أن القيمة $\chi^2{}_{\alpha}(\nu)$ هي القيمة التي يكون على يمينها مساحة مقدارها (α) وعلى يسارها مساحة مقدارها $(1-\alpha)$.
- الشكل التالي يوضح طريقة إيجاد القيمة الجدولية $\chi^2{}_{\alpha}(\nu)$ من جدول توزيع مربع كاي:



- والمثال التالي يوضح طريقة استخراج القيمة الجدولية $(\chi^2{}_{\alpha}(\nu))$ من جدول توزيع مربع كاي.

مثال: نريد إيجاد القيمة الجدولية $(\chi^2{}_{\alpha}(\nu))$) عندما تكون:

$$\alpha = 0.05 \text{ و } \nu = 7$$

من الجدول نجد أن: $\chi^2{}_{0.05}(7) = 14.07$