تصميم التجارب

(Design of Experiments)

الجزء الثالث

مقارنة المجموعات

Comparisons between Groups

مقدمة:

تهدف كثير من الأبحاث العلمية إلى:

(1) اكتشاف الفرق بين مجموعتين (أو بين تأثير معالجتين).
(2) تقدير ذلك الفرق إن وجد.

وتعتبر دراسة الفروق بين المتوسطات وتقدير قيمة تلك الفروق لدى الباحثين أهم من تقدير متوسطات المجموعات نفسها (أو تأثير المعالجات).

فعلى سبيل المثال، فإن الفرق بين متوسطي محصولي صنفين من السماد يحظى باهتمام الباحث أكثر من اهتمامه بتقدير متوسط المحصول لكل صنف.

أولاً: التحقق من وجود فرق بين مجموعتين (أو بين تأثير معالجتين).

الهدف الأول لكثير من التجارب العلمية هو التحقق من وجود فروق معنوية (مهمة / جوهرية / إحصائية) (Significant Differences) بين المتوسطات.

ومن أهم الأساليب الإحصائية لمقارنة المجموعات لاكتشاف الفروق بين المتوسطات هو أسلوب اختبار الفروض (Testing of Hypotheses).

اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ للعينات المستقلة:

Comparison of Two Population Means (Independent Samples)

لنفرض أن لدينا مجتمعين:

المجتمع الأول: متوسطه $= \mu_1$ ، وتبيانه $= \sigma_1^2$.

المجتمع الثاني: متوسطه $= \mu_2$ ، وتبيانه $= \sigma_2^2$.

ونريد اختبار تساوي متوسطي هذين المجتمعين.
أي نرغب في اختبار فرض العدم (H_o) والفرض البديل (H_1) التاليين:

$$H_o: \ \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

ويمكن صياغة الفروض السابقة كما يلي:

$$H_o: \ \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

لاحظ أن:

فرض العدم ($H_o: \ \mu_1 = \mu_2$) يعني عدم وجود فرق معنوي أو فرق مهم (Significant Difference) بين متوسطي المجتمعين.
الفرض البديل ($H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$) يعني وجود فرق معنوي أو فرق مهم بين متوسـطي المجتمعين.

نقوم بأخذ عينة عشوائية حجمها (n_1) من المجتمع الأول:

$$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$$

وبشكل مستقل، نقوم بأخذ عينة عشوائية حجمها (n_2) من المجتمع الثاني:

$$X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$$

نقوم ببعض الحسابات، كما سنرى لاحقًا، ثم نقرر هل نرفض فرض العدم $H_o: \ \mu_1 = \mu_2$ (ونقبل الفرض البديل $H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$)، أم نقبل فرض العدم (ونرفض الفرض البديل).

كما نلاحظ أنه لا يمكن أن يكون الفرضان صائبين معًا ولا خاطئين معًا.
فإذا كان فرض العدم صائبًا فإن الفرض البديل لابد أن يكون خاطئًا، والعكس بالعكس.
وعند اتخاذ قرار حول رفض أو عدم رفض فرض العدم ($H_o: \mu_1 = \mu_2$)، نجد أنفسنا أمام أربع حالات نصيب في اثنتين منها ونخطئ في اثنتين.
ونلخص هذه الحالات الأربع في الجدول التالي:

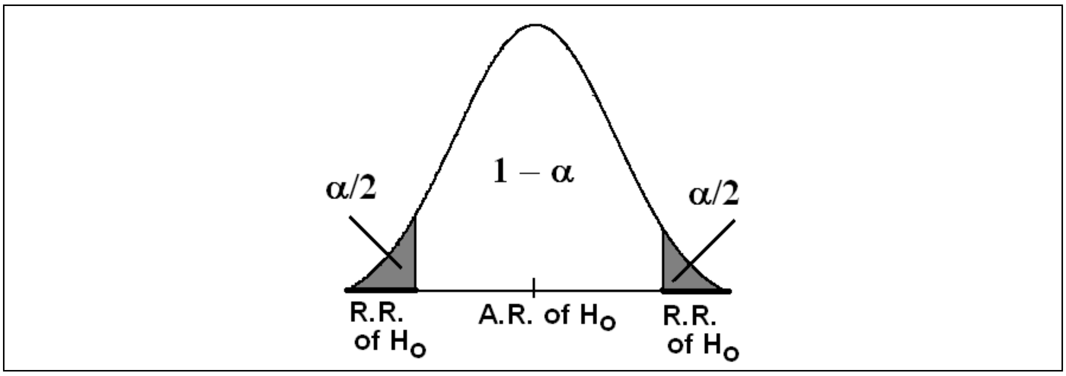
<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2"></td><td colspan="2">حقيقة فرض العدم ($H_o: \mu_1 = \mu_2$)
(لا نعلمها)</td></tr>
<tr><td>H_o صحيحة</td><td>H_o خاطئة</td></tr>
<tr><td rowspan="2">القرار</td><td>رفض H_o</td><td>خطأ من النوع الأول
(رفض H_o عندما تكون صحيحة)
(الاحتمال =α)</td><td>قرار سليم</td></tr>
<tr><td>قبول H_o</td><td>قرار سليم</td><td>خطأ من النوع الثاني
(قبول H_o عندما تكون خاطئة)
(الاحتمال =β)</td></tr>
</table>

نرتكب الخطأ من النوع الأول (Type I Error) عندما نرفض فرض العدم الصحيح.
ونرتكب الخطأ من النوع الثاني (Type II Error) عندما نقبل فرض العدم الخاطئ.
يرمز لاحتمال الخطأ من النوع الأول بالرمز α
ويرمز لاحتمال الخطأ من النوع الثاني بالرمز β.
ونعرف قوة الاختبار (Power of the Test) كما يلي:

قوة الاختبار = احتمال رفض فرض العدم عندما يكون خاطئًا = $1-\beta$

وعند اختبار الفروض، فإننا نرغب أن تكون احتمالات الخطأ من النوعين α و β أصغر ما يمكن.
وتكمن المشكلة في أن تقليل أحدهما يؤدي إلى زيادة الآخر.
لذا، فإن إجراءات اختبار الفروض تتم بتثبيت احتمال الخطأ من النوع الأول α عند مستوى معين، ومن ثم البحث عن قاعدة لرفض أو قبول فرض العدم تجعل احتمال الخطأ من النوع الثاني β أقل ما يمكن.
يسمى احتمال الخطأ من النوع الأول α بمستوى دلالة الاختبار أو مستوى المعنوية أو مستوى الأهمية (Significance Level).
وتتم إجراءات اختبار الفروض وفق خطوات أساسية هي:

1. تحديد فرض العدم H_o والفرض البديل H_1.
2. تحديد مستوى دلالة الاختبار α.
   وقد جرت العادة باختيار إحدى القيم الصغيرة التالية:
   $$\alpha = 0.01, 0.025, 0.05, 0.10$$
3. تحديد إحصاءة مناسبة تسمى إحصاءة الاختبار (T.S.)؛
   ويحدد توزيع المعاينة لها،
   وتحسب قيمتها من العينة.
4. تحديد منطقتين لتوزيع معاينة إحصاءة الاختبار.
   المنطقة الأولى هي منطقة رفض فرض العدم $\mathrm{H_o}$ ونرمز لها بالرمز RR،
   والمنطقة الثانية (متممة المنطقة الأولى) وهي منطقة قبول فرض العدم $\mathrm{H_o}$ ونرمز لها بالرمز AR.
   ويتم تحديد هاتين المنطقتين بناءً على الفرض البديل ومستوى الدلالة α وفقًا لما يأتي:
   أ- يحدد الفرض البديل $\mathrm{H_1}$ اتجاه منطقة رفض $\mathrm{H_o}$ إلى اليمين أو إلى الشمال أو على الجهتين.
   (نحن سنتناول حالة الجهتين فقط – الاختبار ذو الجهتين: $H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$)
   ب- يحدد مستوى الدلالة α المساحة فوق منطقة رفض $\mathrm{H_o}$.
   فالمساحة فوق منطقة رفض $\mathrm{H_o}$ (مساحة RR) تساوي α
   والمساحة فوق منطقة قبول $\mathrm{H_o}$ (مساحة AR) تساوي $1-\alpha$.
   والشكل التالي يوضح منطقة رفض فرض العدم $\mathrm{H_o}$ (المنطقة تحت المساحة المظللة) ومنطقة قبول $\mathrm{H_o}$ (المنطقة تحت المساحة غير المظللة).



5. تحديد قاعدة القرار على النحو التالي:

أ- نرفض فرض العدم $(H_o: \mu_1 = \mu_2)$ (ونقبل الفرض البديل $(H_1: \mu_1 \neq \mu_2)$) عند مستوى الدلالة α إذا وقعت قيمة إحصاءة الاختبار في منطقة رفض فرض العدم (RR) وهي المنطقة المظللة في الشكل أعلاه؛
أي إذا كان: $T.S. \in RR$

ب- نقبل فرض العدم H_o (ونرفض الفرض البديل H_1) عند مستوى الدلالة α إذا وقعت قيمة إحصاءة الاختبار في منطقة قبول فرض العدم (AR) وهي المنطقة غير المظللة في الشكل أعلاه،
أي إذا كان: $T.S. \in AR$

ملاحظة:
إذا كنا نستخدم ما يسمى بقيمة الاحتمال (P-Value) ، وهي قيمة شائعة الاستخدام في البرامج الإحصائية، فإن قاعدة القرار هي:

نرفض فرض العدم عندما تكون $\mathrm{P - Value} < \alpha$

نقبل فرض العدم عندما تكون $\mathrm{P - Value} \geq \alpha$

إجراءات اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين للعينات المستقلة:

(1) كما ذكرنا سابقًا، سيكون لدينا عينتان عشوائيتان مستقلتان، حيث تسحب كل عينة من مجتمعها بشكل مستقل عن الأخرى:

عينة المجتمع الأول: $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ (حجمها $= n_1$)

عينة المجتمع الثاني: $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_1}$ (حجمها $= n_2$)

لاحظ أنه يفضل أن تتساوى حجوم العينات، أي أن يكون $n_1 = n_2$ ، ولكنه ليس شرطًا.
ومن كل عينة من العينتين نحسب المتوسط والتباين كما يلي:

العينة	العينة الأولى	العينة الثانية
حجم العينة	n_1	n_2
متوسط العينة	$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}}{n_1}$	$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}}{n_2}$

$S_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$ $=\frac{\sum_{i=1}^{n_2}X_{2i}^2-n_2(\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$	$S_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}$ $=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}X_{1i}^2-n_1(\bar{X}_1)^2}{n_1-1}$	تباين العينة

ملاحظة:

يعتبر متوسط العينة الأولى $\bar{X}_1$ تقديرًا جيدًا لمتوسط المجتمع الأول μ_1.

يعتبر متوسط العينة الثانية $\bar{X}_2$ تقديرًا جيدًا لمتوسط المجتمع الثاني μ_2.

يعتبر تباين العينة الأولى S_1^2 تقديرًا جيدًا لتباين المجتمع الأول σ_1^2.

يعتبر تباين العينة الثانية S_2^2 تقديرًا جيدًا لتباين المجتمع الثاني σ_2^2.

(2) افتراضات إجراء الاختبار:

لإجراء اختبار الفرق بين متوسطي المجتمعين فإننا نضع الافتراضات الآتية:

1. المجتمعان طبيعيان:
   المجتمع الأول مجتمع طبيعي بمتوسط μ_1 وتباين σ_1^2، أي $N(\mu_1,\sigma_1^2)$.
   المجتمع الثاني مجتمع طبيعي بمتوسط μ_2 وتباين σ_2^2، أي $N(\mu_2,\sigma_2^2)$.
2. تباينا المجتمعين متساويان، أي أن: $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$.
3. العينتان مستقلتان.

(3) نحسب التقدير التجميعي (S_p^2) (Pooled Variance) من العينتين.

وهو تقدير جيد للتباين المشترك (σ^2)، كما يلي:

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

ودرجات الحرية المصاحبة لهذا التقدير هي القيمة التي في المقام، أي أن:

$$df=\nu=n_1+n_2-2$$

(4) نحسب إحصاءة الاختبار (T.S.) بالصيغة الآتية:

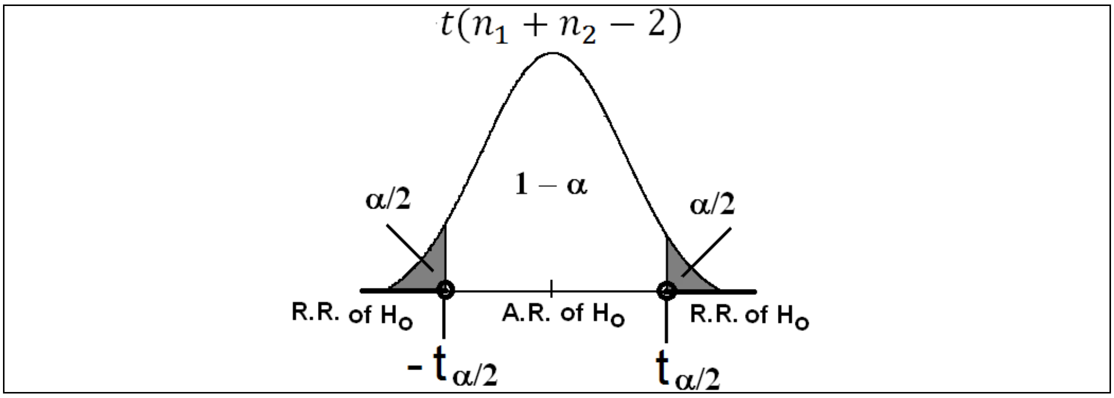
$$t^* = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث أن $S_p = \sqrt{S_p^2}$.

عندما يكون فرض العدم صحيحًا (أي تحت فرض العدم)، فإن الإحصاءة (t^*) تتوزع وفق توزيع تي بدرجات حرية مقدارها $(df = \nu = n_1 + n_2 - 2)$، أي أن:

$$t^* \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

(5) نحدد منطقة رفض فرض العدم H_o (RR) ومنطقة قبول فرض العدم H_o (AR) كما يلي:



حيث أن القيمة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الجدولية التي يتم اســتخراجها من جدول توزيع تي بدرجات حرية مقدارها $(df = \nu = n_1 + n_2 - 2)$ كما مر معنا سابقًا.

(6) القرار:

نرفض فرض العدم $(H_o: \mu_1 = \mu_2)$، (ونقبل الفرض البديل $(H_1: \mu_1 \neq \mu_2)$ عند مستوى الدلالة α إذا كان $t^* \in RR$، أي عندما يكون:

$$t^* < -t_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad t^* > t_{\frac{\alpha}{2}}$$

أي عندما يكون:

$$|t^*| > t_{\frac{\alpha}{2}}$$

ونقبل فرض العدم (ونرفض الفرض البديل)، إذا كان $t^* \in AR$ ، أي عندما يكون:

$$-t_{\frac{\alpha}{2}} < t^* < t_{\frac{\alpha}{2}}$$

ملاحظة:

(أ) تسمى القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ والقيمة الجدولية $-t_{\frac{\alpha}{2}}$ بالقيم الحرجة (Critical Values).
وتجدر الإشارة إلى أن:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = -t_{\frac{\alpha}{2}} .$$

(ب) منطقة الرفض (RR) مكونة من جزأين على اليمين وعلى اليسار (اختبار ذو جهتين).

الخطأ المعياري (Standard Error) للفرق بين متوسطي العينتين:
يُعرف الخطأ المعياري (Standard Error) للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ بالصيغة التالية:

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

وهو تقدير للانحراف المعياري للفرق بين متوسطي العينتين $(\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2})$.
لذا، فإنه يمكن كتابة إحصاءة الاختبار السابقة كما يلي:

$$t^* = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

ثانيًا: تقدير الفرق بين مجموعتين (أو بين تأثير معالجتين).

الهدف الثاني للتجارب العلمية هو تقدير الفروق بين المتوسطات (إن وجد).

إذا وجدنا أن هناك فرق معنوي بين متوسط المجتمع الأول (μ_1) ومتوسط المجتمع الثاني (μ_2)، فإننا نرغب في تقدير الفرق بينهما $(\mu_1 - \mu_2)$.

ومن أهم الأساليب الإحصائية لتقدير الفروق بين المتوسطات أسلوبان، هما:

- أسلوب التقدير بنقطة (Point Estimation). (التقدير النقطي)
- وأسلوب التقدير باستخدام فترات الثقة (Confidence Intervals)، (التقدير الفتري).

(1) التقدير النقطي للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$:

يُعتبر الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ تقديرًا نقطيًا جيدًا للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$.

(2) التقدير النقطي للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$:

تُعَرَّف فترة الثقة للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\%$ بالصيغة الآتية:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_p \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

أو

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$$

أو

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} < \ \mu_1 - \mu_2 \ < \ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$$

أو

$$(\mu_1 - \mu_2) \in \left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\ ,\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \right)$$

حيث أن القيمة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الجدولية التي يتم اســتخراجها من جدول توزيع تي بدرجات حرية مقدارها $(df = \nu = n_1 + n_2 - 2)$ كما مر معنا سابقًا.

ملاحظات:

(1) سنكون واثقين، بثقة مقدارها $100(1-\alpha)\%$، أن الفرق الحقيقي بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ يقع في الفترة :

$$\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\ ,\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \right)$$

(2) يسمى الحد $\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$ بالحد الأعلى لفترة الثقة.

ويسمى الحد $\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$ بالحد الأدنى لفترة الثقة.

(3) يتم تحديد قيمة (α) من خلال معرفة مقدار الثقة المطلوبة.

فعلى سبيل المثال: إذا كنا نرغب في إنشاء فترة ثقة بثقة مقدارها (95%)، فإن $(\alpha = 0.05)$.

ويمكن إيجاد ذلك من خلال المساواة الآتية:

$$100(1-\alpha)\% = 95\%$$

العلاقة بين اختبار الفروض وفترات الثقة:

يمكن اختبار الفروض:

$$\begin{array}{lcl} H_o:\ \mu_1 = \mu_2 & \Leftrightarrow & H_o:\ \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1:\ \mu_1 \neq \mu_2 & & H_1:\ \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{array}$$

عند مستوى المعنوية α من خلال فترة الثقة للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ بثقة

مقدارها $100(1-\alpha)\%$:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

وفق القاعدة الآتية:

نرفض فرض العدم $(H_o: \mu_1 = \mu_2)$ إذا كانت فترة الثقة لا تحتوي على الصفر (0). إي إذا كان:

$$0 \notin (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

نقبل فرض العدم $(H_o: \mu_1 = \mu_2)$ إذا كانت فترة الثقة تحتوي على الصفر (0). إي إذا كان:

$$0\ \in\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\ S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

مثال:

في دراسة لمقارنة العناصر المعدنية لنوعين من العصائر، عصير التفاح وعصير البرتقال، أخذت عينتان عشوائيتان بشكل مستقل من العلب المعروضة في الأسواق لكل من النوعين، وكانت بيانات كمية الصوديوم كما في الجدول أدناه:

العينة	العينة الأولى (التفاح)	العينة الثانية (البرتقال)
المشاهدات (كمية الصوديوم)	4.86	4.72
	5.11	4.81
	5.23	5.22
	5.19	5.67
	5.61	5.52
	5.32	4.96
	5.20	5.35
	4.95	5.34
	4.98	-
حجم العينة (n_i)	9	8
متوسط العينة $(\bar{X}_i)$	5.16	5.20
تباين العينة (S_i^2)	0.0506	0.115
الانحراف المعياري (S_i)	0.2249	0.339

نرغب في التحقق من وجود (أو عدم وجود) فرق معنوي بين متوسط كمية الصوديوم للتفاح ومتوسط كمية الصوديوم للبرتقال عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.05)$.

الحل:

نحن نرغب في اختبار الفروض الآتية عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.05)$:

$$H_o: \ \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

حيث أن:

$\mu_1 =$ متوسط كمية الصوديوم للتفاح

$\mu_2 =$ متوسط كمية الصوديوم للبرتقال

أولاً: الحسابات:

(1) التباين التجميعي (S_p^2)

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(9-1)(0.0506)+(8-1)(0.115)}{9+8-2} = 0.0807$$

ومنها نجد أن:

$$S_p = \sqrt{S_p^2} = \sqrt{0.0807} = 0.284$$

(2) الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي العينتين ($S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$):

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} = 0.284\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{8}} = 0.138$$

(3) قيمة إحصاءة الاختبار (t^*):

$$t^* = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{5.16-5.20}{0.138} = -0.290$$

(4) إيجاد القيمة الجدولية ($t_{\frac{\alpha}{2}}$):

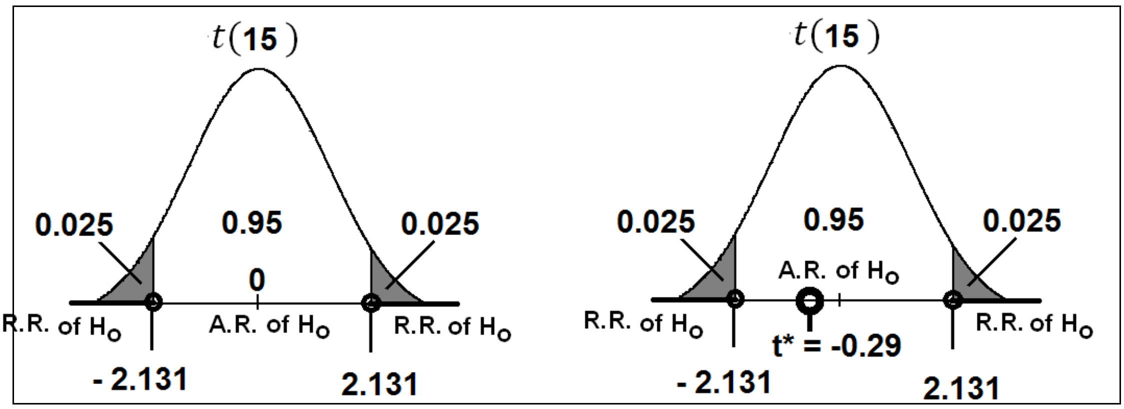
بما أن $\alpha = 0.05$، فإن المراد هو إيجاد القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025}$ بدرجات حرية مقدارها:

$$df = \nu = n_1+n_2-2 = 9+8-2 = 15$$

ومن جدول توزيع تي بدرجات حرية مقدارها (15)، نجد أن:

$$t_{0.025} = 2.131$$

(5) تحديد منطقة رفض فرض العدم (RR) ومنطقة قبول فرض العدم (AR):



ثانيًا: القرار:

بما أن قيمة إحصاءة الاختبار تقع في منطقة قبول فرض العدم (AR)، أي أن:

$$-2.131 < t^* < 2.131 \quad \Leftrightarrow \quad t^* \in AR$$

فإننا نقبل (لا نرفض) فرض العدم $H_o : \mu_1 = \mu_2$.

لذا، فإننا نستنتج أنه لا يوجد فرق معنوي بين متوسط كمية الصوديوم للتفاح ومتوسط كمية الصوديوم للبرتقال، وذلك عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.05)$.

ويمكن أيضًا إيجاد تقدير للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ كما يلي:

- التقدير النقطي للفرق ين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ هو:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 5.16 - 5.20 = -0.04$$

- وأما فترة الثقة للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ بمستوى ثقة 95% فهي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \; S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

$$-0.04 \pm t_{0.025}\ (0.138)$$

$$-0.04 \pm (2.131)(0.138)$$

$$-0.04 \pm 0.294$$

$$(\,-0.334\,,0.254\,)$$

لذلك فنحن واثقون، بثقة مقدارها 95%، أن الفرق الحقيقي بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ يقع في الفترة $(-0.334\,,\,0.254)$، أي أن:

$$-0.334 \; < \; \mu_1 - \mu_2 \; < 0.254$$

لاحظ أن فترة الثقة تحتوي على الصفر (0).

لذلك فإننا نقبل (لا نرفض) فرض العدم القائل بعدم وجود فرق بين المتوسطين ($H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0$) .

وبالتالي فإننا نقبل فرض العدم القائل بتساوي المتوسطين ($H_o: \mu_1 = \mu_2$).

وهذا يتطابق مع قرارنا السابق.

مثال آخر:

في دراسة لمقارنة تأثير صنفين من السماد (A, B) على كمية إنتاج نوع معين من القمح، أخذت عينتان عشوائيتان بشكل مستقل من إنتاج كل صنف، ولخصت بيانات التجربة في الجدول أدناه:

العينة	مشاهدات صنف السماد الأول (A) (العينة الأولى)	مشاهدات صنف السماد الثاني (B) (العينة الثانية)

2.55	3.27	المشاهدات
2.36	3.68	
2.92	3.52	
2.15	3.72	
3.06	2.89	
5	5	حجم العينة (n_i)
$\bar{X}_2 = 2.608$	$\bar{X}_1 = 3.416$	متوسط العينة $(\bar{X}_i)$
$S_2^2 = 0.144$	$S_1^2 = 0.118$	تباين العينة (S_i^2)
$S_2 = 0.380$	$S_1 = 0.343$	الانحراف المعياري (S_i)

نرغب في التحقق من وجود (أو عدم وجود) فرق معنوي بين متوسط كمية إنتاج الصنف الأول ومتوسط كمية إنتاج الصنف الثاني عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.01)$.

الحل:

نحن نرغب في اختبار الفروض الآتية عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.01)$:

$$H_o: \ \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

حيث أن:

$\mu_1 =$ متوسط كمية إنتاج الصنف الأول (A)

$\mu_2 =$ متوسط كمية إنتاج الصنف الثاني (B)

أولاً: الحسابات:

(1) التباين التجميعي (S_p^2)

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(5-1)(0.118)+(5-1)(0.144)}{5+5-2} = 0.131$$

ومنها نجد أن:

$$S_p = \sqrt{S_p^2} = \sqrt{0.131} = 0.3619$$

(2) الخطأ المعياري للفرق بين متوسطي العينتين $(S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2})$:

$$S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} = 0.3619\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = 0.2289$$

(3) قيمة إحصاءة الاختبار (t^*):

$$t^* = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{S_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{3.416-2.608}{0.2289} = 3.53$$

(4) إيجاد القيمة الجدولية $(t_{\frac{\alpha}{2}})$:

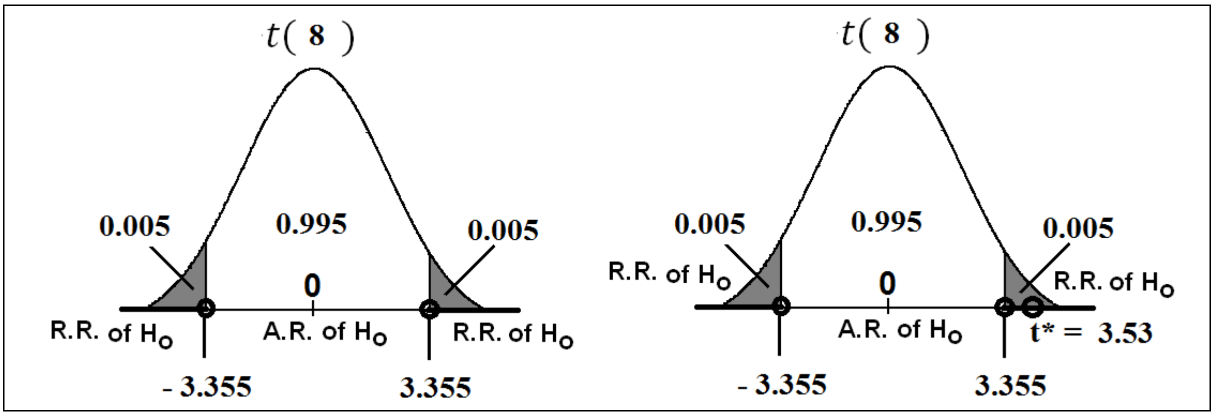
بما أن $\alpha = 0.01$، فإن المراد هو إيجاد القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.005}$ بدرجات حرية مقدارها:

$$df = \nu = n_1 + n_2 - 2 = 5 + 5 - 2 = 8$$

ومن جدول توزيع تي بدرجات حرية مقدارها (8)، نجد أن:

$$t_{0.005} = 3.355$$

(5) تحديد منطقة رفض فرض العدم (RR) ومنطقة قبول فرض العدم (AR):



ثانيًا: القرار:

بما أن قيمة إحصاءة الاختبار تقع في منطقة رفض فرض العدم (RR)، حيث أن:

$$t^* = 3.53 > 3.355 \quad \Rightarrow \quad t^* \in RR$$

فإننا نرفض فرض العدم ($H_o: \mu_1 = \mu_2$).

لذا، فإننا نستنتج أنه يوجد فرق معنوي بين متوسط كمية إنتاج الصنف الأول (μ_1) ومتوسط كمية إنتاج الصنف الثاني (μ_2)، وذلك عند مستوى الدلالة ($\alpha = 0.01$).

ونظرًا لأنه يوجد فرق معنوي بين متوسط كمية إنتاج الصنف الأول (μ_1) ومتوسط كمية إنتاج الصنف الثاني (μ_2)، فإننا نرغب الآن في تقدير الفرق بينهما ($\mu_1 - \mu_2$).

- التقدير النقطي للفرق ين المتوسطين ($\mu_1 - \mu_2$) هو:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 3.416 - 2.608 = 0.808$$

- وأما فترة الثقة للفرق بين المتوسطين ($\mu_1 - \mu_2$) بمستوى ثقة 99% فهي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \; S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

$$0.808 \pm t_{0.005}\ (0.2289)$$

$$0.808 \pm (3.355)(0.2289)$$

$$0.808 \pm 0.768$$

$$(\ 0.040\ ,\ 1.576\ )$$

لذلك فنحن واثقون، بثقة مقدارها 99%، أن الفرق الحقيقي بين متوسطي المجتمعين ($\mu_1 - \mu_2$) يقع في الفترة (0.040 , 1.576)، أي أن:

$$0.040 < \mu_1 - \mu_2 < 1.576$$

لاحظ أن فترة الثقة لا تحتوي على الصفر (0)، لذلك فإننا نرفض أن يكون

$$\mu_1 - \mu_2 = 0$$

أي نرفض تساوي المتوسطين. وهذا يتطابق مع قرارنا السابق.

اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ للعينات المزدوجة (العينات غير المستقلة):

Comparison of Two Population Means for Paired Observations (Dependent Samples)

(t -Test for Paired Samples)

في كثير من الأحيان يمكن للباحث زيادة دقة التجربة التي تقارن بين معالجتين باستخدام أسلوب القطاعات.
يتم في هذا الأسلوب تقسيم الوحدات التجريبية إلى أزواج متجانسة أومتشابهة (تسمى قطاعات)، ومن ثم تطبيق كلا المعالجتين داخل كل زوج (قطاع) بشكل عشوائي، وذلك لمقارنة المعالجتين.
وبالتالي يكون الفرق في الاستجابة (إن وجد) راجعًا بدرجة كبيرة إلى الفرق بين المعالجتين المراد مقارنة تأثيرهما.
ويُراعى عند تكوين الأزواج (القطاعات) أن تكون الوحدتين التجريبيتين لكل زوج (داخل كل قطاع) أكثر تشابهًا فيما بينهما وأكثر اختلافًا عن الوحدات التجريبية في الأزواج (القطاعات) الأخرى.
وتحدث العينات المزدوجة في كثير من التجارب.

(1) ففي التجارب الطبية، على سبيل المثال، عندما يعطى دواء لمجموعة من المرضى، وتقاس ظاهرة معينة قبل تعاطي الدواء وبعده، ففي هذه الحالة نكون قد استخدمنا نفس الوحدات التجريبية للمعالجتين (قبل الدواء، بعد الدواء).
ويلاحظ في هذه الحالة أن قيمتي المعالجتين غير مستقلتين لأنهما تقاسان على نفس الوحدة التجريبية (نفس المريض).

(2) كما تحصل هذه العينات المزدوجة في تجارب تغذية الحيوان عند مقارنة عليقتين (معالجتين)، حيث يتم تصنيف الحيوانات إلى أزواج متجانسة (متشابهة)، ويستلم أحد أفراد كل زوج العليقة الأولى ويستلم الآخر العليقة الثانية.
وبالتالي فإن مقارنة العليقتين تتم داخل أزواج متجانسة.
في هذه الحالة، نرى أنه تم تقسيم الوحدات التجريبية (الحيوانات) إلى قطاعات (كل زوج من الحيوانات المتجانسة يشكل قطاعًا) ويتم مقارنة المعالجتين داخل كل قطاع، وهذا يؤدي إلى زيادة الدقة في مقارنة المعالجتين.

(3) كما تحصل هذه العينات المزدوجة في تجارب مقارنة مستوى أداء الطالب في مقررين.
حيث يتم اختيار عينة عشوائية مكونة من (n) طالبًا، ثم تقاس درجة الطالب في لمقرر الأول (X) وتقاس درجته في المقرر الثاني (Y)، فيكون لدينا عينة عشوائية حجمها (n) من الأزواج المرتبة:

$$(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1), (\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2), \dots, (\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)$$

لاحظ أن درجة الطالب في المقرر الأول غير مستقلة عن درجته في المقرر الثاني، وذلك لأن الدرجتين لنفس الطالب. أي أن مجتمع درجات المقرر الأول غير مستقل عن مجتمع درجات المقرر الثاني.
والآن، لنفرض أن لدينا مجتمعين غير مستقلين:

المجتمع الأول: مجتمع طبيعي متوسطه = μ_1 ، وتبيانه = σ_1^2.

المجتمع الثاني: مجتمع طبيعي متوسطه = μ_2 ، وتبيانه = σ_2^2.

ونريد اختبار تساوي متوسطي هذين المجتمعين.

أي نرغب في اختبار فرض العدم والفرض البديل الآتيين:

$$\begin{matrix} H_o: \ \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} H_o: \ \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{matrix}$$

لإجراء الاختبار،فإننا نعرف متغير جديد، نسميه متغير الفرق (D) كما يلي:

$$D = X - Y$$

ويكون متوسط هذا المتغير هو:

$$\mu_D = \mu_1 - \mu_2$$

وبناءً على ذلك فإن الفروض السابقة تكافئ الفروض التالية:

$$H_o: \mu_D = 0$$
$$H_1: \mu_D \neq 0$$

افتراضات الاختبار:

لإجراء الاختبار، فإننا نفرض أن عينة الفروق هي عينة عشوائية من توزيع طبيعي متوسطه (μ_D) وتباينه (σ_D^2)، أي أن $D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$.

الحسابات:

نحسب عينة الفروق وذلك بطرح القيمة الثانية (Y) من القيمة الأولى (X) لكل زوج (X,Y)، أي نوجد الفروق:

$$D_i = X_i - Y_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

فنحصل على عينة عشوائية مكونة من الفروق:

$$\mathrm{D_1, D_2, \dots, D_n}$$

نوجد متوسط عينة الفروق:

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$$

نوجد تباين عينة الفروق:

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n(\overline{D})^2}{n-1}$$

نوجد الانحراف المعياري لعينة الفروق:

$$S_D = \sqrt{S_D^2}$$

نوجد الخطأ المعياري لمتوسط عينة الفروق:

$$S_{\overline{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

والجدول التالي يلخص هذه الحسابات:

الفروق $D_i = X_i - Y_i$	القيمة الثانية Y_i	القيمة الأولى X_i	المشاهدة (الزوج) i
$D_1 = X_1 - Y_1$	Y_1	X_1	1
$D_2 = X_2 - Y_2$	Y_2	X_2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$D_n = X_n - Y_n$	Y_n	X_n	n
$\sum_{i=1}^{n} D_i$	مجموع قيم عينة الفروق		
$\overline{D}$	متوسط عينة الفروق		
S_D^2	تباين عينة الفروق		
S_D	الانحراف المعياري لعينة الفروق		
$S_{\overline{D}}$	الخطأ المعياري لمتوسط عينة الفروق		

نحسب إحصاءة الاختبار كما يلي:

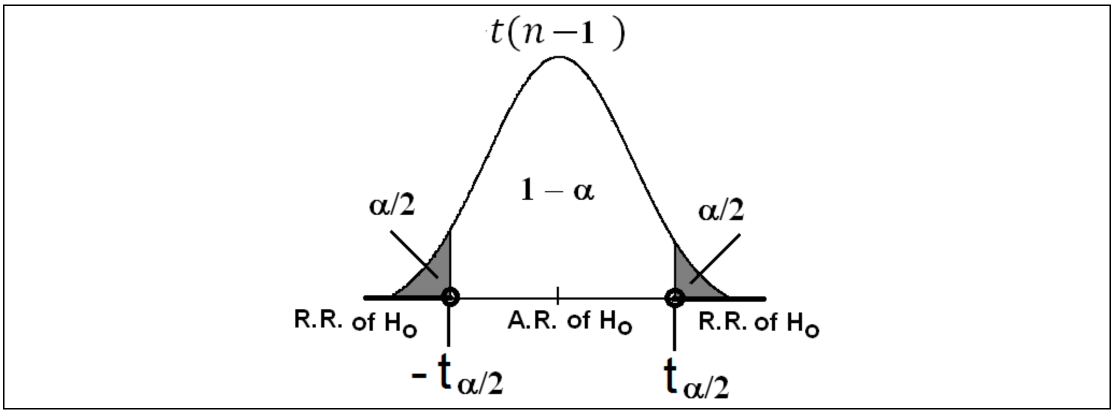
$$t^* = \frac{\overline{D}}{S_{\overline{D}}} = \frac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}}$$

عندما يكون فرض العدم صحيحًا (أي تحت فرض العدم)، فإن الإحصاءة (t^*) تتوزع وفق توزيع تي بدرجات حرية مقدارها ($df = \nu = n - 1$)، أي أن:

$$t^* \sim t(n-1)$$

منطقة الرفض ومنطقة القبول:

نحدد منطقة رفض فرض العدم H_o (RR) ومنطقة قبول فرض العدم H_o (AR) كما يلي:



حيث أن القيمة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الجدولية التي يتم اســتخراجها من جدول توزيع تي بدرجات حرية مقدارها ($df = \nu = n - 1$) كما مر معنا سابقًا.

القرار:

نرفض فرض العدم $H_o: \mu_D = 0$ (ونقبل الفرض البديل $H_1: \mu_D \neq 0$) عند مستوى الدلالة α إذا كان $t^* \in RR$، أي عندما يكون:

$$t^* < -t_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad t^* > t_{\frac{\alpha}{2}}$$

أي عندما يكون:

$$|t^*| > t_{\frac{\alpha}{2}}$$

ونقبل فرض العدم (ونرفض الفرض البديل)، إذا كان $t^* \in AR$، أي عندما يكون:

$$-t_{\frac{\alpha}{2}} < t^* < t_{\frac{\alpha}{2}}$$

تقدير متوسط مجتمع الفروق ($\mu_D = \mu_1 - \mu_2$):

يُعتبر متوسط عينة الفروق ($\overline{D}$) تقديرًا نقطيًا جيدًا لمتوسط مجتمع الفروق (μ_D).

وأما فترة الثقة لمتوسط مجتمع الفروق (μ_D) بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\%$ فيمكن حسابها من خلال الصيغة التالية:

$$\overline{D} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \ \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

أو

$$\overline{D} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \ S_{\overline{D}}$$

أو

$$\overline{D} - t_{\frac{\alpha}{2}} \ S_{\overline{D}} < \ \mu_D \ < \ \overline{D} + t_{\frac{\alpha}{2}} \ S_{\overline{D}}$$

أو

$$\mu_D = (\mu_1 - \mu_2) \in \left(\overline{D} - t_{\frac{\alpha}{2}} \ S_{\overline{D}} \, , \overline{D} + t_{\frac{\alpha}{2}} \ S_{\overline{D}}\right)$$

حيث أن القيمة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الجدولية التي يتم اســتخراجها من جدول توزيع تي بدرجات حرية مقدارها $(df = \nu = n - 1)$ كما مر معنا سابقًا.

مثال:

أُجريت تجربة لدراســة تأثير عليقية معينة على نمو العجول خلال شــهر من التغذية، وسُــجلت

أوزان (كلغم) ســـبعة من العجول قبل برنامج التغذية (Y)، وسُـــجلت أوزانها بعد إنتهاء برنامج التغذية (X). والجدول التالي يحوي عينة التجربة وكذلك عينة الفروق.

يرغب الباحث في هذه التجربة التحقق من فعالية برنامج التغذية في زيادة الوزن. أو بعبارة أخرى، يرغب في:

(1) مقارنة متوسط أوزان العجول بعد البرنامج (μ_1) ومتوسط أوزان العجول قبل البرنامج (μ_2)، عند مستوى الدلالة ($\alpha = 0.05$).

(2) تقدير الفرق بين المتوسطين ($\mu_D = \mu_1 - \mu_2$) في حال كان هناك فرق معنوي بينهما (تقدير نقطي وفترة ثقة 95%).

العجل i	الوزن بعد البرنامج X_i	الوزن قبل البرنامج Y_i	الفروق $D_i = X_i - Y_i$
1	136.32	130.51	5.81
2	137.51	129.37	8.14
3	135.47	128.72	6.75
4	138.20	131.33	6.87
5	136.52	131.56	4.96
6	137.22	129.80	7.42
7	138.95	130.50	8.45
حجم العينة	7	7	7
مجموع العينة	960.19	911.79	$\sum_{i=1}^{n} D_i = 48.4$
متوسط العينة	$\bar{X}$ =137.17	$\bar{Y}$ =130.26	$\bar{D}$=6.91
		تباين عينة الفروق	S_D^2=1.5307
		الانحراف المعياري لعينة الفروق	S_D =1.2372
		الخطأ المعياري لمتوسط عينة الفروق	$S_{\bar{D}} = 0.4676$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} = \frac{48.4}{7} = 6.91$$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n(\bar{D})^2}{n-1} = \frac{343.836 - (7)(6.91^2)}{7-1} = 1.5307$$

الخطأ المعياري لمتوسط عينة الفروق:

$$S_{\bar{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}} = \frac{1.2372}{\sqrt{7}} = 0.4676$$

أولاً: نرغب في التحقق من وجود فرق بين متوســط الأوزان قبل البرنامج ومتوســط الأوزان بعد البرنامج عند مستوى الدلالة ($\alpha = 0.05$)،

أي نرغب في اختبار فرض العدم والفرض البديل الآتيين:

$$H_o: \mu_D = 0$$
$$H_1: \mu_D \neq 0$$

حيث أن:

$$\mu_D = \mu_1 - \mu_2$$

نحسب إحصاءة الاختبار كما يلي:

$$t^* = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}} = \frac{6.91}{0.4676} = 14.786$$

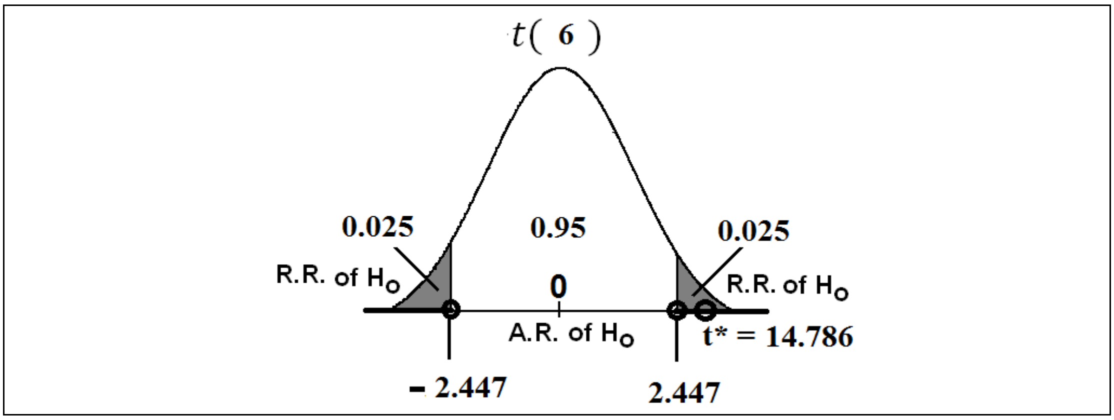
ودرجات الحرية المصاحبة تساوي:

$$df = \nu = n - 1 = 7 - 1 = 6$$

نوجد القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول توزيع تي بدرجات حرية مقدارها $(df = \nu = 6)$:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.447$$

نحدد منطقة رفض فرض العدم H_o (RR) ومنطقة قبول فرض العدم H_o (AR) كما يلي:



القرار:

نظرًا لأن $t^* \in RR$ (حيث أن $t^* > t_{\frac{\alpha}{2}}$) فإننا نرفض فرض العدم $H_o: \mu_D = 0$ (ونقبل الفرض البديل $H_1: \mu_D \neq 0$) عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$.

لذا، فإننا نستنتج ان هناك فرق معنوي بين متوسط أوزان العجول بعد البرنامج (μ_1) ومتوسط أوزان العجول قبل البرنامج (μ_2).

ونظرًا لأن متوسط عينة الأوزان بعد البرنامج ($\bar{X}$ =137.17) أكبر من متوسط عينة الأوزان قبل البرنامج ($\bar{Y}$ =130.26)، فإننا نستنتج أن برنامج التغذية فعَّال في زيادة أوزان العجول.

(ملاحظة: يمكن اختبار فعالية البرنامج الغذائي من خلال اختبار الفرضيات ذات الجهة الواحدة الآتية:

$$H_o: \mu_D \leq 0$$
$$H_1: \mu_D > 0$$

ولكننا لن نتطرق لهذه الطريقة (أنظر الكتاب لمزيد من المعلومات حول اختبار هذا النوع من الفرضيات).

ونظرًا لوجود فرق معنوي بين المتوسطين، فسنحب فيما يأتي تقديرات لهذا الفرق.

- التقدير النقطي للفرق بين المتوسطين $(\mu_D = \mu_1 - \mu_2)$ هو:

$\bar{D}$=6.91

وأما فترة الثقة 95% فهي:

$$\bar{D} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \ S_{\bar{D}}$$

$$6.91 \pm t_{0.025} \ 0.4676$$

$$6.91 \pm (2.447)(0.4676)$$

$$6.91 \pm 1.144$$

$$5.766 < \ \mu_D \ < \ 8.054$$

نحن واثقون بثقة مقدارها 95% بأن:

$$\mu_D = (\ \mu_1 - \mu_2) \in (5.766 \ \ , 8.054)$$

ونظرًا لأن هذه الفترة لا تحتوي على الصـــفر (0)، فإننا نرفص فرضـــية العدم القائلة بتســـاوي المتوسطين $(H_o : \mu_D = 0)$. وهذا يتوافق مع قرارنا السابق.

اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين $(\mu_1 - \mu_2)$ في حالة اختلاف التباينات:

Comparison of Two Population Means with Unequal Variances

واجب قراءة.
(أنظر كتاب "تصميم وتحليل التجارب"، الدكتور محمد محمد الطاهر الإمام، ص 38).

مقارنة تبايني مجتمعين:
Comparison of Two Population Variances

لنفرض أن لدينا مجتمعين:

المجتمع الأول: مجتمع طبيعي متوسطه = μ_1 ، وتبيانه = σ_1^2. (أي: $N(\mu_1, \sigma_1^2)$)

المجتمع الثاني: مجتمع طبيعي متوسطه = μ_2 ، وتبيانه = σ_2^2. (أي: $N(\mu_2, \sigma_2^2)$)

عندما أردنا اختبار تساوي متوسطي المجتمعين، فقد فرضنا عدة افتراضات. وكان أحد هذه الافتراضات اشتراط أن يكونا تباينا المجتمعين متساويين ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$).
لذلك فإن من المهم قبل إجراء اختبار تساوي المتوسطين أن نتحقق من تساوي التباينين.
لذلك فنحن نرغب في اختبار الفروض الآتية:

$$H_o: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

ولإجراء هذا الاختبار، نقوم بما يأتي:
(1) نقوم بأخذ عينة عشوائية حجمها (n_1) من المجتمع الأول:

$$X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$$

وبشكل مستقل، نقوم بأخذ عينة عشوائية حجمها (n_2) من المجتمع الثاني:

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$$

(2) نحسب تباين العينة الأولى (S_1^2)، ونحسب تباين العينة الثانية (S_2^2).
(3) نحسب إحصاءة الاختبار المعطاة بالصيغة الآتية:

$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

عندما يكون فرض العدم صحيحًا (أي تحت فرض العدم)، فإن الإحصاءة (F^*) تتوزع وفق توزيع إف (F-Distribution) بدرجات الحرية:

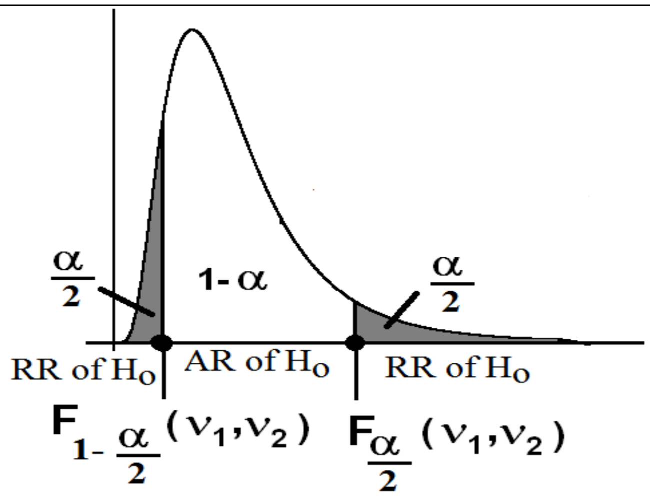
$$df_1 = \nu_1 = n_1 - 1$$

$$df_2 = \nu_2 = n_2 - 1$$

أي أن:

$$F^* \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

(4) نحدد منطقة رفض فرض العدم H_o (RR) ومنطقة قبول فرض العدم H_o (AR) كما يلي:



حيث أن القيمة $F_{\frac{\alpha}{2}}$ والقيمة $F_{1-\frac{\alpha}{2}}$ هما القيمتان الجدوليتان اللتان يتم استخراجهما من جدول توزيع توزيع إف بدرجات الحرية ($\nu_1 = n_1 - 1$) و ($\nu_2 = n_2 - 1$).

ويمكن استخدام النتيجة الآتية لاستخراج القيمة الجدولية التي لا يمكن استخراجها مباشرة من الجدول:

$$F_{1-A}(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_A(\nu_2, \nu_1)}$$

(5) القرار:

نرفض فرض العدم H_o (ونقبل الفرض البديل H_1) عند مستوى الدلالة α إذا كان $F^* \in RR$، أي عندما يكون:

$$F^* < F_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad F^* > F_{\frac{\alpha}{2}}$$

ونقبل فرض العدم (ونرفض الفرض البديل)، إذا كان $F^* \in AR$ ، أي عندما يكون:

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}} < F^* < F_{\frac{\alpha}{2}}$$

ملاحظة:

(أ) تسمى القيمة الجدولية $F_{\frac{\alpha}{2}}$ والقيمة الجدولية $F_{1-\frac{\alpha}{2}}$ بالقيم الحرجة (Critical Values).

(ب) منطقة الرفض (RR) مكونة من جزأين، أحدهما على اليمين والآخر على اليسار (اختبار ذو جهتين).

مثال: (مثال سابق)

في دراسة لمقارنة العناصر المعدنية لنوعين من العصائر، عصير التفاح وعصير البرتقال، أخذت عينتان عشوائيتان بشكل مستقل من العلب المعروضة في الأسواق لكل من النوعين، وكانت بيانات كمية الصوديوم كما في الجدول أدناه:

العينة	العينة الأولى (التفاح)	العينة الثانية (البرتقال)
المشاهدات	4.86	4.72
	5.11	4.81
	5.23	5.22
	5.19	5.67
	5.61	5.52
	5.32	4.96
	5.20	5.35
	4.95	5.34
	4.98	-
حجم العينة (n_i)	9	8
متوسط العينة ($\bar{X}_i$)	5.16	5.20
تباين العينة (S_i^2)	0.0506	0.115

نرغب في التحقق من وجود (أو عدم وجود) فرق معنوي بين تبايني المجتمعين اللذين سـحبت

منهما العينتان عند مستوى الدلالة ($\alpha = 0.05$).

الحل:

نحن نرغب في اختبار الفروض الآتية عند مستوى الدلالة ($\alpha = 0.05$):

$$H_o: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

حيث أن:

$\sigma_1^2 =$ تباين كمية الصوديوم للتفاح (تباين المجتمع الأول)

$\sigma_2^2 =$ تباين كمية الصوديوم للبرتقال (تباين المجتمع الثاني)

أولاً: الحسابات:

(1) نحسب قيمة إحصاءة الاختبار (F^*):

$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.0506}{0.115} = 0.44$$

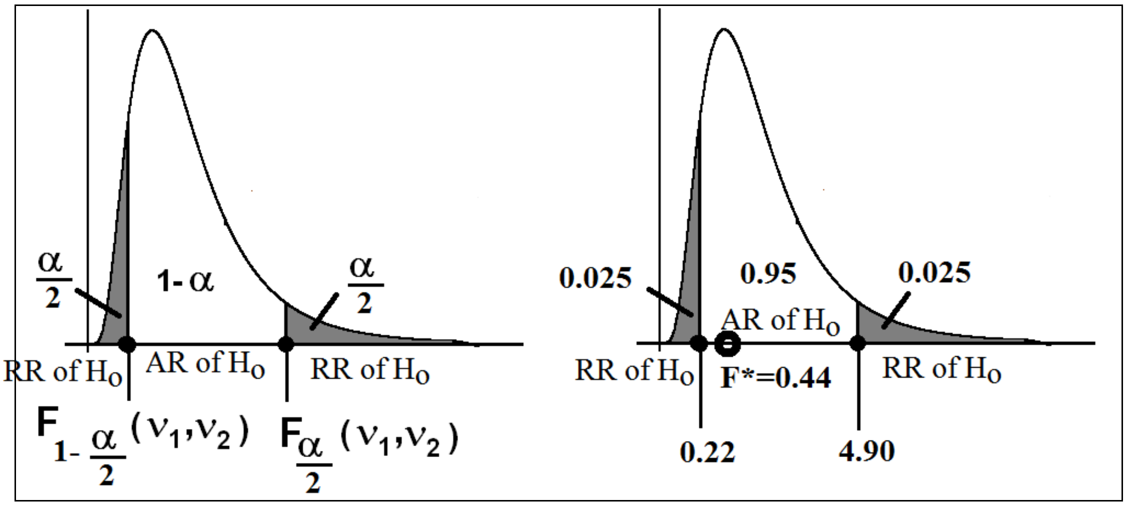
(2) إيجاد القيم الجدولية ($F_{\frac{\alpha}{2}}$ و $F_{1-\frac{\alpha}{2}}$):

بما أن $\alpha = 0.05$، فإن المراد هو إيجاد القيمة الجدولية $F_{0.025}$ و $F_{0.975}$ بدرجات الحرية ($\nu_1 = 8$) و ($\nu_2 = 7$). ومن جدول توزيع إف نجد أن:

$$F_{\frac{\alpha}{2}} = F_{0.025}(8,7) = 4.90$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}} = F_{0.975}(8,7) = \frac{1}{F_{0.025}(7,8)} = \frac{1}{4.53} = 0.22$$

(3) تحديد منطقة رفض فرض العدم (RR) ومنطقة قبول فرض العدم (AR):



ثانيًا: القرار:

بما أن قيمة إحصاءة الاختبار تقع في منطقة قبول فرض العدم (AR)، أي أن:

$$0.22 < F^* < 4.90 \quad \Leftrightarrow \quad t^* \in AR$$

فإننا نقبل (لا نرفض) فرض العدم $H_o: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

لذا، فإننا نستنتج أنه لا يوجد فرق معنوي بين تباين كمية الصوديوم للتفاح وتباين كمية الصوديوم للبرتقال، وذلك عند مستوى الدلالة ($\alpha = 0.05$).
وهذا يدعم صحة استخدامنا لاختبار تي (t-test) لاختبار تساوي المتوسطين في ذلك المثال.

تمارين:
(أنظر كتاب "تصميم وتحليل التجارب"، الدكتور محمد محمد الطاهر الإمام، ص 42 - 44).