تصميم التجارب

Design of Experiments

الجزء السادس

المقارنات المتعددة والمتضادات

Multiple Comparisons and Contrasts

مقدمة:

يمكننا أسلوب تحليل التباين من إجراء اختبارات حول وجود فروق معنوية بين متوسطات المعالجات.

فإذا كانت نتيجة اختبار إف (F-test) في تحليل التباين غير معنوية؛ أي أن بيانات العينة لم تستطع إيجاد فروق معنوية بين متوسطات المعالجات، فإننا لا نرفض فرض العدم القائل بعدم وجود اختلافات بين متوسطات المعالجات:

$$H_o: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_t$$

وفي هذه الحالة، فإن أقصى ما نستطيع استنتاجه هو أن الفروق بين متوسطات المعالجات ليست حقيقة. وقد نكتفي بهذه النتيجة ونتوقف عند هذا الحد، أو قد نقوم بإجراء تجارب أخرى لمحاولة إيجاد الفروق.

وأما إذا وجدت فروق معنوية بين متوسطات المعالجات، فإن اهتمامنا ينصب على إجراء مقارنات متعددة بين المتوسطات (Multiple Comparisons) لمعرفة مكامن الاختلاف. وتكون هذه المقارنات مقترحة بعد إجراء التجربة ومشروطة بمعنوية الاختبار.

وقد يكون الباحث مهتم بمقارنات محددة سلفًا بين المتوسطات أو بين دوال في المتوسطات، بحيث يكون لهذه الدول معنى مفيد، وتكون هذه المقارنات محددة في أهداف البحث قبل إجراء التجربة (مقارنات مخططة سلفًا / Planned in Advance). ولاختبار مثل هذه المقارنات نستخدم طريقة المقارنات المتضادة (Contrasts).

فعلى سبيل المثال، قد يكون الباحث مهتمًا بمقارنة متوسط المعالجة الأولى (μ_1) مع متوسط متوسطات المعالجات الأخرى ($(\mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_t)/(t-1)$).

$$H_o: \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_t}{t-1}$$
$$H_1: \mu_1 \neq \frac{\mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_t}{t-1}$$

إن كثيرًا من إجراءات المقارنات بين المتوسطات ودوالها تعتمد على ما يسمى بالمتضادات (Contrasts) والتي سنتطرق إليها بشيء من التفصيل في هذا الفصل.

المقارنات المتعددة (Multiple Comparisons):

إذا كانت نتيجة اختبار تحليل التباين معنوية؛ أي إذا وجدت فروق معنوية بين متوسطات المعالجات، فإن هناك العديد من الأساليب المقترحة لإجراء المقارنات المتعددة بين المتوسطات، وسنتناول في هذا الفصل بعضًا من هذه الأساليب.

مقارنة أزواج متوسطات المعالجات:

لنفرض أن المعالجات التي لدينا هي $(T_1, T_2, \dots, T_t)$، ومتوسطاتها هي على الترتيب $(\mu_1,\ \mu_2, \dots, \mu_t)$، ومتوسطات عيناتها هي على الترتيب $(\bar{Y}_1,\ \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_t)$، وحجوم عيناتها هي على الترتيب $(n_1,\ n_2, \dots, n_t)$.

إذا كانت نتيجة اختبار تحليل التباين معنوية، فإننا نرغب في أن نقارن بين متوسطات المعالجات لتحديد المتوسطات المختلفة. ونستطيع في الغالب تحديد المتوسطات المختلفة بعمل اختبارات حول الفروق بين جميع الأزواج الممكنة لمتوسطات المعالجات والتي عددها يساوي:

$$\binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}$$

أي أننا نكون مهتمين بجميع الاختبارات (المتضادات) التي على الشكل الآتي:

$$H_o: \mu_i = \mu_j$$
$$H_1:\ \mu_i \neq \mu_j$$

أو بشكل مكافئ:

$$H_o: \mu_i - \mu_j = 0$$
$$H_1:\ \mu_i - \mu_j \neq 0$$

لجميع أزواج المتوسطات (لجميع القيم $i \neq j$).

طريقة أقل فرق معنوي لفشر:

The Fisher Least Significant Difference Method

تعتبر هذه الطريقة من الطرق شائعة الاستخدام وذلك لسهولة إجرائها ولدقة نتائجها.

وتستخدم هذه الطريقة فقط عندما تكون نتيجة اختبار تحليل التباين معنوية.

وتعتمد هذ الطريقة على طريقة اختبار تي (t-test) لمقارنة متوسطي عينتين مستقلتين في حالة تساوي التباينات ($\sigma_i^2 = \sigma_j^2$).

إن إحصاءة اختبار تي (t-test) لمقارنة متوسطي العينتين المستخدمة لاختبار:

$$H_o: \mu_i - \mu_j = 0$$

$$H_1: \mu_i - \mu_j \neq 0$$

هي كما مر معنا سابقًا:

$$t^* = \frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} = \frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}} = \frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}} = \frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}}$$

ملاحظات:

(١) $S_p^2 = MSE$

(٢) الخطأ المعياري للفرق بين المتوسطين ($\bar{Y}_i - \bar{Y}_j$) هو:

$$S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

وهو يعتمد على تكرارات المعالجات وطريقة تصميم التجربة.

وبناءً على هذه الطريقة فإننا نرفض فرض العدم ($H_o: \mu_i - \mu_j = 0$) إذا كان:

$$t^* < -t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E) \quad \text{أو} \quad t^* > t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)$$

أي إذا كان:

$$|t^*| > t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)$$

أو إذا كان:

$$\left| \frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)$$

أو إذا كان:

$$| \bar{Y}_i - \bar{Y}_j | > t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)\ S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}$$

حيث أن $t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)$ هي القيمة الجدولية لتوزيع تي بدرجات حرية مساوية لدرجات حرية متوسط مربعات الخطأ (df_E) والتي تترك إلى يمينها مساحة مقدارها $(\alpha/2)$.

إن الطرف الأيمن في المترجحة الأخيرة يسمى "أقل فرق معنوي" (LSD)، أي أن:

$$LSD_{ij} = t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)\ S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j} = t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E) \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

ولذلك فإن القاعدة هي أن نرفض فرض العدم $(H_o: \mu_i - \mu_j = 0)$ إذا كان:

$$| \bar{Y}_i - \bar{Y}_j | > LSD_{ij}$$

وعند تساوي حجوم عينات المعالجات $(n_1 = n_2 = \ldots = n_t = n)$، فإن أقل فرق معنوي يعطى بالصيغة:

$$LSD_{ij} = LSD = t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E) \sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

طريقة إجراء المقارنات باستخدام طريقة (LSD):

(١) نرتب متوسطات العينات $(\bar{Y}_1,\ \bar{Y}_2, \ldots, \bar{Y}_t)$ تصاعديًا (من الأصغر إلى الأكبر).
(٢) نحسب القيمة المطلقة للفرق بين كل متوسطين $(| \bar{Y}_i - \bar{Y}_j |)$.
(٣) نوجد أقل فرق معنوي (LSD_{ij}) لكل زوجين من المتوسطات.
(٤) نقارن كل قيمة مطلقة للفرق بين متوسطين $(| \bar{Y}_i - \bar{Y}_j |)$ مع أقل فرق معنوي مقابل لها (LSD_{ij}).
(٥) نحدد المتوسطات المختلفة معنويًا عندما يكون $(| \bar{Y}_i - \bar{Y}_j | > LSD_{ij})$، ونحدد المتوسطات غير المختلفة معنويًا عندما يكون $(| \bar{Y}_i - \bar{Y}_j | \leq LSD_{ij})$.

ملاحظة:

في بعض الحالات نجد أن اختبار تحليل التباين (اختبار إف) يكون معنويًا؛ أي نرفض فرض العدم $(H_o: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_t)$، بينما قد لا نجد أي فروق معنوية بين أزواج المتوسطات عندما نطبق طريقة "أقل فرق معنوي لفشر" أو غيرها من طرق مقارنة أزواج المتوسطات. وبالرغم من أن هذه الحالة قد توحي بوجود تناقض في النتائج، إلا أنها قد تحدث لكون اختبار تحليل التباين (اختبار إف) يختبر جميع المقارنات الممكنة بشكل آني (معًا) للتجربة ككل (Experimentwise Comparisons) وليس فقط لمقارنات أزواج المتوسطات، بينما طريقة "أقل فرق معنوي لفشر" تختبر المقارنات الثنائية الممكنة كل على حده (Pairwise

Comparisons). وعند رفض فرضية تساوي المتوسطات عند تطبيق أسلوب تحليل التباين فقد يكون سبب الرفض هو وجود مقارنات (متضادات) معنوية ليست على الصورة ($\mu_i = \mu_j$).

مثال:

لتوضيح طريقة "أقل فرق معنوي لفشر" سنعتبر أحد الأمثلة السابقة. وهو مثال مقارنة أصناف العدس الخمسة.

حيث كانت التجربة متعلقة بمقارنة خمسة أصناف من العدس تحت الظروف الطبيعية، وتم استخدام التصميم تام العشوائية بخمس تكرارات ($n = 5$) لكل معالجة (صنف العدس). ولكن أثناء إجراء التجربة حصل تلف في بعض الوحدات التجريبية، ولذلك تم إلغاء بيانات الوحدات التالفة. وكانت بيانات الدراسة مع بعض الحسابات كما في الجدول الآتي:

المشاهدات	المعالجات (أصناف العدس)					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
1	770	540	320	730	550	
2	630	390	310	890	660	
⋮	750	440	355	750	510	
⋮	670	475		725	460	
n_i	790					
n_i	5	4	3	4	4	N=20
$Y_{i\bullet}$	3610	1845	985	3095	2180	$Y_{\bullet\bullet}$=11715
$\bar{Y}_{i\bullet}$	722	461.25	328.33	773.75	545	$\bar{Y}_{\bullet\bullet} = 585.75$

وقد رفضنا في هذا المثال فرض العدم القائل بأن متوسطات كميات المحصول لأصناف العدس الخمسة متساوية ($H_o: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$) عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$) وكذلك عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.01$)، واستنتجنا بأن هناك فروقًا معنوية بين المتوسطات.

كما وجدنا في ذلك المثال أن:

$$MSE = 4798.94$$

$$df_E = 15$$

وأما القيمة الجدولية فهي:

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E) = t_{0.025}(15) = 2.131$$

والآن نريد أن نعمل مقارنات متعددة بين أزواج المتوسطات باستخدام طريقة "أقل فرق معنوي لفشر" (LSD_{ij}) في محاولة لاكتشاف المتوسطات المختلفة عن بعضها البعض، والمتوسطات المتساوية مع بعضها البعض.

نوجد أقل فرق معنوي (LSD_{ij}) لكل زوجين من المتوسطات عند مستوى المعنوية ($\alpha =$ 0.05)، باستخدام الصيغة:

$$LSD_{ij} = t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$

$$LSD_{ij} = 2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$

والجدول الآتي يوضح قيم أقل فرق معنوي (LSD_{ij}) لكل زوجين والقيم المطلقة للفروق بينها:

$\lvert \bar{Y}_i - \bar{Y}_j \rvert$	LSD_{ij}
$\lvert\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2\rvert = \lvert 722 - 461.25\rvert = 260.75^*$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)} = 99.029$
$\lvert\bar{Y}_1 - \bar{Y}_3\rvert = \lvert 722 - 328.33\rvert = 393.67^*$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)} = 107.809$
$\lvert\bar{Y}_1 - \bar{Y}_4\rvert = \lvert 722 - 773.75\rvert = 51.75$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)} = 99.029$
$\lvert\bar{Y}_1 - \bar{Y}_5\rvert = \lvert 722 - 545\rvert = 177^*$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)} = 99.029$
$\lvert\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3\rvert = \lvert 461.25 - 328.33\rvert = 132.92^*$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)} = 112.749$
$\lvert\bar{Y}_2 - \bar{Y}_4\rvert = \lvert 461.25 - 773.75\rvert = 312.5^*$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = 104.386$
$\lvert\bar{Y}_2 - \bar{Y}_5\rvert = \lvert 461.25 - 545\rvert = 83.75$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = 104.386$
$\lvert\bar{Y}_3 - \bar{Y}_4\rvert = \lvert 328.33 - 773.75\rvert = 445.42^*$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} = 112.749$
$\lvert\bar{Y}_3 - \bar{Y}_5\rvert = \lvert 328.33 - 545\rvert = 216.67^*$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} = 112.749$
$\lvert\bar{Y}_4 - \bar{Y}_5\rvert = \lvert 773.75 - 545\rvert = 228.75^*$	$2.131\ \sqrt{4798.94\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = 104.386$

ملاحظات:

(١) إن القيمة المنجمة (*) للقيمة المطلقة للفرق بين متوسطي عينتين يدل على وجود فرق معنوي بين متوسطي المعالجتين المقابلتين؛ أي عندما يكون:

$$\lvert \bar{Y}_i - \bar{Y}_j \rvert > LSD_{ij}$$

(٢) لاحظ أن قيم أقل فرق معنوي (LSD_{ij}) تعتمد على حجم العينات.

ومن الجدول أعلاه، نلاحظ أن متوسطات المعالجات مختلفة معنويًا، فيما عدا متوسطي المعالجة الأولى والرابعة ومتوسطي المعالجة الثانية والخامسة.

ولتوضيح أماكن الاختلافات، نقوم بترتيب المتوسطات تصاعديًا من الأصغر إلى الأكبر، ثم نضع خطوط مشتركة تحت المتوسطات التي لم تكن فروقها معنوية، كما يأتي:

$$\bar{Y}_3 = 328.33 \quad \underline{\bar{Y}_2 = 461.25 \quad \bar{Y}_5 = 545} \quad \underline{\bar{Y}_1 = 722 \quad \bar{Y}_4 = 773.75}$$

كما يمكن تلخيص القيم المطلقة للفروق بين المتوسطات ونتائج المقارنات في الجدول الآتي:

	الترتيب	1	2	3	4
الترتيب	المتوسطات	$\bar{Y}_3 = 328.33$	$\bar{Y}_2 = 461.25$	$\bar{Y}_5 = 545$	$\bar{Y}_1 = 722$
5	$\bar{Y}_4 = 773.75$	445.42*	312.5*	228.75*	51.75
4	$\bar{Y}_1 = 722$	393.67*	260.75*	177*	
3	$\bar{Y}_5 = 545$	216.67*	83.75		
2	$\bar{Y}_2 = 461.25$	132.92*			

مقارنة متوسطات المعالجات مع متوسط المعالجة الضابطة (معالجة المراقبة):

(Comparing Treatment Means with a Control)

في بعض التجارب يتم وضع إحدى المعالجات كمعالجة ضابطة (Control / Placebo)، ويكون الهدف هو مقارنة متوسطات المعالجات الأخرى مع متوسط هذه المعالجة الضابطة.

لنفرض أن المعالجات التي لدينا هي $(T_1, T_2, \dots, T_t)$، ولنفرض أن المعالجة الأخيرة (T_t) هي المعالجة الضابطة.

ففي هذه الحالة، يكون الباحث مهتمًا بإجراء مقارنات متعددة، يتم فيها مقارنة متوسط كل معالجة مع متوسط المعالجة الأخيرة (الضابطة).

ولذلك سيكون لدينا $(t-1)$ مقارنة من النوع:

$$\begin{array}{l} H_o: \mu_i = \mu_t \\ H_1: \ \mu_i \neq \mu_t \end{array} \quad ; i = 1, 2, \dots, t-1$$

في هذا النوع من المقارنات نستخدم أسلوب دانيت (Dunnett's procedure)، وهو تعديل لأسلوب إختبار تي المعروف (t-test).

ولمقارنة (μ_i) متوسط المعالجة رقم (i) مع (μ_t) متوسط المعالجة الضابطة (المعالجة الأخيرة)، فإنه وفق هذا الأسلوب فإننا نرفض فرض العدم $(H_o: \mu_i = \mu_t)$ عند مستوى الدلالة (α)، إذا كان:

$$|\,\bar{Y}_i - \bar{Y}_t| > d_\alpha(t-1, df_E)\; S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_t}$$

أي إذا كان:

$$|\,\bar{Y}_i - \bar{Y}_t| > d_\alpha(t-1, df_E)\; \underbrace{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_t}\right)}}_{S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_t}}$$

أو إذا كان:

$$|\,\bar{Y}_i - \bar{Y}_t| > \; D_i$$

حيث أن:

$$D_i = d_\alpha(t-1, df_E)\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_t}\right)}$$

$$i = 1, 2, \dots, t-1$$

علمًا بان القيمة:

$$d_\alpha(t-1, df_E)$$

هي القيمة الجدولية (ذات الاتجاهين) لاختبار دانيت عند مستوى المعنوية (α). ودرجات الحرية $(\nu = df_E)$ هي درجات الحرية للخطأ التجريبي. (أنظر جدول القيمة الجدولية لاختبار دانيت).

مع ملاحظة أن الخطأ المعياري للفرق بين المتوسطين $(\bar{Y}_i - \bar{Y}_t)$ هو:

$$S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_t} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_t}\right)}$$

وأما القيمة الجدولية $(d_\alpha(t-1, df_E))$ فيتم إيجادها من جدول خاص بالقيم الجدولية (ذات الاتجاهين) لاختبار دانيت. (انظر الكتاب).

ملاحظات:

(١) يمكن استخدام اختبار دانيت حتى لو كانت نتيجة اختبار تحليل التباين (اختبار إف) غير معنوية. وذلك لأن المقارنات التي يتم اختبارها باستخدام هذا الأسلوب تكون دائما محددة سلفًا قبل تنفيذ التجربة وليست مقترحة من خلال نتيجة تحليل البيانات.

(٢) عند تطبيق اختبار دانيت ينبغي مراعاة تحقق النسبة الآتية قدر الإمكان:

$$\frac{n_t}{n_i} \cong \sqrt{t-1}$$

فهذه النسبة تحدد العلاقة بين تكرار المعالجة الضابطة وتكرارات المعالجات الأخرى.
فعلى سبيل المثال، لو كان لدينا أربع معالجات نرغب بمقارنتها مع المعالجة الضابطة (المعالجة الخامسة)، فمن الأفضل أن يكون:

$$\frac{n_t}{n_i} \cong 2 \quad \Leftrightarrow \quad n_t \cong 2\, n_i$$

أي أن يكون تكرار المعالجة الضابطة ضعف تكرار أي معالجة أخرى ($n_t \cong 2n_i$).

(٣) عند تطبيق اختبار دانيت ينبغي التأكد من أن تباين متوسط عينة المعالجة الضابطة مساوٍ لتباين متوسط عينة المعالجة التي نرغب بمقارنتها ($\sigma^2_{\bar{Y}_i} = \sigma^2_{\bar{Y}_t}$).

فترات الثقة للفرق بين متوسط المعالجة الضابطة ومتوسطات المعالجات الأخرباستخدام أسلوب دانيت:

يمكن استخدام أسلوب دانيت لإيجاد فترات الثقة للفرق بين متوسط المعالجة الضابطة ومتوسط المعالجة التي نرغب بمقارنتها. وتعطى فترة الثقة بمستوى الثقة ($(1-\alpha)100\%$) بالصيغة الآتية:

$$(\bar{Y}_i - \bar{Y}_t) \pm d_\alpha(t-1, df_E)\, S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_t}$$

أو بالصيغة:

$$(\bar{Y}_i - \bar{Y}_t) \pm d_\alpha(t-1, df_E) \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_t}\right)}$$

أو بالصيغة:

$$(\bar{Y}_i - \bar{Y}_t) \pm D_i$$

حيث أن القيمة ($d_\alpha(t-1, df_E)$) هي القيمة الجدولية (ذات الاتجاهين) لاختبار دانيت عند مستوى المعنوية (α).

مثال:

في هذا المثال سنستخدم بيانات أحد الأمثلة السابقة. وهو المثال الذي تم فيه مقارنة تأثير أربعة أنواع من الأسمدة (A و B و C و D) على كمية محصول الذرة. حيث قام الباحث بتقسيم أحد الحقول الزراعية ذات التربة المتجانسة إلى ٢٠ قطعة زراعية، ووزعت المعالجات الأربع عشوائيًا؛ بحيث تم تطبيق كل نوع من أنواع الأسمدة على ٥ قطع أختيرت بشكل عشوائي. وكانت بيانات الدراسة (طن/هكتار) قد وضعت في الجدول الآتي:

المشاهدات	المعالجات (الأسمدة)				
	$T_1 = A$	$T_2 = B$	$T_3 = C$	$T_4 = D$	
1	3.96	3.84	2.52	3.16	
2	1.70	3.36	2.28	3.68	
3	2.52	3.28	3.24	3.50	
4	2.92	4.16	2.36	3.47	
5	3.04	3.95	2.56	3.12	
المجموع	$Y_{1\bullet}$ 14.14	$Y_{2\bullet}$ 18.59	$Y_{3\bullet}$ 12.96	$Y_{4\bullet}$ 16.93	$Y_{\bullet\bullet}$ 62.62
المتوسط	$\bar{Y}_{1\bullet}$ 2.828	$\bar{Y}_{2\bullet}$ 3.718	$\bar{Y}_{3\bullet}$ 2.592	$\bar{Y}_{4\bullet}$ 3.386	$\bar{Y}_{\bullet\bullet}$ 3.131

ولتوضيح طريقة دانيت لمقارنة متوسطات المعالجات مع متوسط المعالجة الضابطة، سنفرض أن المعالجة الأولى $(T_1 = A)$ هي المعالجة الضابطة التي نرغب بمقارنتها مع المعالجات الثلاث الأخرى.

وجدنا في ذلك المثال أن:

$$MSE = 0.2557$$

$$df_E = 16$$

ونظرًا لأن حجوم العينات متساوية $(n_i = 5)$، فإن:

$$S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_1} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_1}\right)} = \sqrt{\frac{2MSE}{5}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.2557}{5}} = 0.3198$$

لاحظ أن القيمة $(S_{\bar{Y}_i - \bar{Y}_1} = 0.3198)$ ثابتة لجميع الحالات نظرًا لأن حجوم العينات متساوٍ $(n_i = 5)$.

ومن جدول القيم الجدولية (ذات الاتجاهين) لاختبار دانيت عند مستوى المعنوية $(\alpha = 0.05)$، نجد أن:

$$d_\alpha(t-1, df_E) = d_{0.05}(3, 16) = 2.59$$

ولذلك فإن:

$$D_i = d_\alpha(t-1, df_E)\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_1}\right)} = 2.59 \times 0.3198 = 0.8283$$

لاحظ أن قيمة (D_i) ثابتة لجميع الحالات نظرًا لأن حجوم العينات متساوٍ $(n_i = 5)$.

نوجد القيم المطلقة للفروق بين متوسط عينة المعالجة الضابطة ومتوسطات عينات المعالجات الأخرى ($|\bar{Y}_i - \bar{Y}_1|$) ثم نقارنها مع القيمة ($D_i = 0.8283$). وتكون قراراتنا كما يأتي:

إذا كان:

$$|\bar{Y}_i - \bar{Y}_1| > D_i = 0.8283$$

فإننا نرفض فرض العدم ($H_o: \mu_i = \mu_1$) القائل بأن متوسط المعالجة الضابطة مساوٍ لمتوسط المعالجة رقم (i) مقابل الفرض البديل ($H_1: \mu_i \neq \mu_t$) عند مستوى المعنوية ($\alpha = 0.05$).

والجدول الآتي يلخص الحسابات والاستنتاجات:

$\lvert\bar{Y}_i - \bar{Y}_1\rvert$	D_i
$\lvert\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1\rvert = \lvert 3.718 - 2.828\rvert = 0.89^*$	0.8283
$\lvert\bar{Y}_3 - \bar{Y}_1\rvert = \lvert 2.592 - 2.828\rvert = 0.236$	0.8283
$\lvert\bar{Y}_4 - \bar{Y}_1\rvert = \lvert 3.386 - 2.828\rvert = 0.558$	0.8283

ملاحظة: إن القيمة المنجمة (*) للقيمة المطلقة للفرق بين متوسطي العينتين ($|\bar{Y}_i - \bar{Y}_1|$) يدل على وجود فرق معنوي بين متوسط المعالجة رقم (i) ومتوسط المعالجة الضابطة؛ أي عندما يكون:

$$|\bar{Y}_i - \bar{Y}_1| > D_i$$

ومن الجدول أعلاه، نستنتج ما يأتي:

نظرًا لأن ($|\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1| > D_2$)، فإنا نرفض فرض العدم ($H_o: \mu_2 = \mu_1$)، ونستنتج أن هناك فرقًا معنويًا بين متوسط المعالجة الثانية (μ_2) ومتوسط المعالجة الضابطة (μ_1).

فيما عدا ذلك، لا يوجد اختلافات معنوية بين متوسطات المعالجات الأخرى ومتوسط المعالجة الضابطة.

كما يمكن عمل فترة ثقة، بثقة مقدارها 95%، للفرق بين متوسط المعالجة الثانية (مثلاً) ومتوسط المعالجة الضابطة ($\mu_2 - \mu_1$) بأسلوب دانيت كما يأتي:

$$(\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1) \pm D_2$$

$$(3.718 - 2.828) \pm 0.8283$$

$$0.89 \pm 0.8283$$

$$0.0617 < \mu_2 - \mu_1 < 1.7183$$

لاحظ أن هذه الفترة لا تحتوي على الصفر، مما يدل على أن هناك فرقـًا معنويًا بين متوسط المعالجة الثانية (μ_2) ومتوسط المعالجة الضابطة (μ_1)، وهذا يؤيد استنتاجنا السابق.

المتضادات (المقارنات المصممة): Contrasts

عندما تكون نتيجة اختبار تحليل التباين (اختبار إف) معنوية، فإننا أقصى ما نستطيع استنتاجه هو أن هناك فروق معنوية بين المتوسطات، وأن هناك واحد من المتوسطات على الأقل مختلف عن بقية المتوسطات.

وفي النماذج الثابتة، يكون الباحث في الغالب مهتماً ببعض المقارنات المحددة مسبقًا بين متوسطات المعالجات، حيث يتم تحديد هذه المقارنات سلفـًا قبل تنفيذ التجربة، ويكون من أهداف التجربة اختبار هذه المقارنات.

فعلى سبيل المثال، قد يكون الباحث مهتمًا بمقارنة المعالجة الأولى مع بقية المعالجات؛ أي مقارنة متوسط المعالجة الأولى مع متوسط متوسطات المعالجات الأخرى من خلال اختبار الفروض الآتية:

$$H_o:\ \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_t}{t-1}$$
$$H_1: \mu_1 \neq \frac{\mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_t}{t-1}$$

ولتوضيح مفهوم المتضادات (أو المقارنات المصممة)، لنفرض لدينا خمس معالجات $(t = 5)$ لها نفس التكرار، ونرغب بمقارنة متوسط المعالجتين الأولى والثانية مع متوسط المعالجتين الثالثة والرابعة من خلال اختبار الفروض الآتية:

$$H_o: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$
$$H_1: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \neq \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

لاحظ أنه يمكن إعادة صياغة المعادلة في فرض العدم على الصيغ المتكافئة الآتية:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} &\Leftrightarrow \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\mu_1 + \mu_2) - (\mu_3 + \mu_4) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 + \lambda_4\mu_4 + \lambda_5\mu_5 = 0 \\
&\Leftrightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{5} \lambda_i\mu_i = 0
\end{aligned}$$

حيث أن:

$$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = -1,\ \ \lambda_4 = -1,\ \ \lambda_5 = 0$$

لاحظ أن مجموع المعاملات (λ_i) يساوي الصفر:

$$\sum_{i=1}^{5} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 + 1 + (-1) + (-1) + 0 = 0$$

لذلك، يمكن إعادة كتابة الفروض السابقة المطلوب اختبارها على الصيغة الآتية:

$$H_o : \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \mu_i = 0$$
$$H_1 : \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \mu_i \neq 0$$

وتسمى العلاقة الخطية:

$$Q = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \mu_i$$

بالتركيب الخطي لمتوسطات المعالجات، وهي دالة خطية في المتوسطات.

وإذا كان مجموع المعاملات (λ_i) يساوي الصفر؛ أي يحقق الشرط الآتي:

$$\sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 0$$

فإن الدالة الخطية $(Q = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \mu_i)$ تسمى متضادة (أو مقارنة مصممة).

تعريف:

إذا كان لدينا (t) معالجة لها نفس التكرار(n)، فإن الدالة الخطية في المتوسطات $(\mu_1,\ \mu_2, \dots ,\mu_t)$ الآتية:

$$Q = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mu_i$$

تسمى متضادة (أو مقارنة مصممة) في المتوسطات إذا كان تحقق الشرط:

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 0$$

على ألا تكون جميع المعاملات (λ_i) صفرية.

ملاحظة:

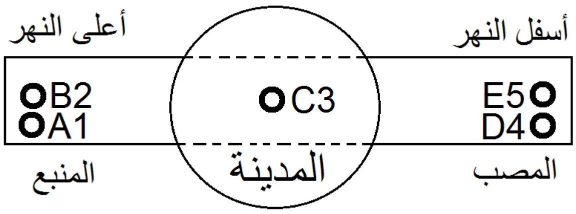
في حالة عدم تساوي التكرارات، بحيث أن تكرار المعالجة (T_i) هو (n_i)، يكون الشرط هو:

$$\sum_{i=1}^{t} n_i \lambda_i = 0$$

ولتوضيح مفهوم المتضادات نسوق المثال الآتي.

مثال:

يمر أحد الأنهار بإحدى المدن. ولدراسة تأثير المدينة على تلوث النهر، أخذت عينات من مياه النهر من خمسة مواقع مختلفة لتحديد فيما إذا كانت كمية الأكسجين المذابة، كمقياس للتلوث (درجة التلوث تزداد بنقص كمية الأكسجين المذابة)، تختلف من موقع لأخر في النهر. اختير الموقع الأول والموقع الثاني في أعلى النهر (قرب المنبع) قبل إحدى المدن حيث كان الموقع الأول (A) قرب الضفة والموقع الثاني (B) في الوسط بين الضفتين، واختير الموقع الثالث (C) من وسط المدينة في الوسط بين الضفتين، واختير الموقع الرابع (D) أسفل النهر (قرب المصب) بعد المدينة عند الضفة، وأختير الموقع الخامس (E) أسفل النهر (قرب المصب) بعد المدينة في الوسط بين الضفتين. وتم بشكل عشوائي جمع خمس عينات متساوية من المياه من كل موقع من المواقع الخمسة كما في الشكل أدناه:



وقيست كمية الأكسجين المذابة في كل عينة من عينات المياه بواسطة نفس الخبير وفي نفس المعمل وبنفس التجهيزات وبترتيب عشوائي ولخصت في الجدول أدناه.

المتوسط $\bar{Y}_{i\bullet}$	كمية الأكسجين المذابة					الموقع
6.08	5.9	6.1	6.3	6.1	6.0	أعلى النهر عند الضفة (A)
6.44	6.3	6.6	6.4	6.4	6.5	أعلى النهر في الوسط بين الضفتين (B)
4.78	4.8	4.3	5.0	4.7	5.1	وسط المدينة في الوسط بين الضفتين (C)
5.52	5.4	5.6	5.5	5.7	5.4	أسفل النهر عند الضفة (D)
5.84	5.8	6.0	5.9	5.7	5.8	أسفل النهر في الوسط بين الضفتين (E)

هذا المثال يعرض تصميم تام العشوائية لتجربة أحادية العامل أو تصنيف أحادي الاتجاه. العامل هنا هو الموقع وهو متغير نوعي (qualitative variable). عدد مستويات العامل (عدد المعالجات) يساوي ($t=5$) ومستوياته هي المواقع الخمسة: A, B, C, D, E. عدد تكرارات هذه التجربة هو ($n=5$). متغير الاستجابة في هذه التجربة هو كمية الأكسجين المذابة وهو متغير متصل (continuous variable). تم قياس كميات الأكسجين المذابة لجميع عينات المياه بواسطة نفس الخبير وفي نفس المعمل وبنفس التجهيزات وبترتيب عشوائي حتى نزيل تأثير أي

عوامل دخيلة غير معروفة (عوامل مزعجة غير مرغوب في قياس تأثيرها) من نتائج مقارنات المعالجات.

والجدول الآتي يمثل جدول تحليل التباين:

(يُترك حساب مكونات الجدول كواجب منزلي على الطلبة)

مصدر الاختلاف	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	النسبة (F^*)
المعالجات	7.9264	٤	1.9816	61.1605
الخطأ	0.648	٢٠	0.0324	
المجموع	8.5744	٢٤		

ونظرًا لأن:

$$F^* = 61.1605 > F_{0.05}(4,20) = 2.87$$

فإننا نرفض فرض العدم $(H_o: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5)$ القائل بتساوي متوسطات كميات الأكسجين المذابة للمواقع الخمسة عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.05)$. ولذلك فإن الموقع (العامل) له تأثير على كمية الأكسجين المذابة (متغيرالاستجابة).

ولذلك فإننا نعلم الآن بأن المواقع الخمسة للنهر تختلف من حيث كميات الأكسجين المذابة، ولكننا لا نعرف تحديدًا المواقع التي يكمن فيها الاختلاف.

لذا، فقد نرغب، مثلاً، في معرفة ما يلي:

(أ) هل كمية الأكسجين المذابة قرب أعلى النهر (قبل المدينة) تختلف عنها في قرب أسفل النهر (بعد المدينة)؟ ويجاب على هذا التساؤل من خلال اختبار الفروض:

$$H_o: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_4 + \mu_5}{2}$$
$$H_1: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \neq \frac{\mu_4 + \mu_5}{2}$$

لاحظ أن فرض العدم ممكن أن يصاغ كما يأتي:

$$H_o: \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 - \mu_5 = 0$$

(ب) هل كمية الأكسجين المذابة عند الضفة تختلف عنها في الوسط بين الضفتين (وسط النهر)؟ ويجاب على هذا التساؤل من خلال اختبار الفروض:

$$H_o: \frac{\mu_1 + \mu_4}{2} = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_5}{3}$$
$$H_1: \frac{\mu_1 + \mu_4}{2} \neq \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_5}{3}$$

لاحظ أن فرض العدم ممكن أن يصاغ كما يأتي:

$$H_o: \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_4 - \frac{1}{3}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_3 - \frac{1}{3}\mu_5 = 0$$

(ج) هل كمية الأكسجين المذابة قرب مصب النهر تختلف عنها في المواقع الأخرى؟ ويجاب على على هذا التساؤل من خلال اختبار الفروض:

$$H_o: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_3 + \mu_4 + \mu_5}{3}$$
$$H_1: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \neq \frac{\mu_3 + \mu_4 + \mu_5}{3}$$

لاحظ أن فرض العدم ممكن أن يصاغ كما يأتي:

$$H_o: \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_3 - \frac{1}{3}\mu_4 - \frac{1}{3}\mu_5 = 0$$

(د) هل كمية الأكسجين المذابة في وسط أعلى النهر تختلف عنها في وسط أسفل النهر. ويجاب على هذا التساؤل من خلال اختبار الفروض:

$$H_o: \mu_2 = \mu_5$$
$$H_1: \mu_2 \neq \mu_5$$

لاحظ أن فرض العدم ممكن أن يصاغ كما يأتي:

$$H_o: \mu_2 - \mu_5 = 0$$

نلاحظ أن الجهة اليسرى من المساواة في فروض العدم المذكورة آنفًا عبارة عن دالة خطية (تركيب خطي) في متوسطات المعالجات على الشكل:

$$Q = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mu_i$$

حيث أن:

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 0$$

وبشكل عام فإننا نواجه بعض المسائل التي نحتاج فيها إلى اختبار الفروض حول القيمة:

$$Q = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mu_i$$
$$= \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ \dots + \lambda_t\mu_t$$

عندما يكون: $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 0$.

والفروض التي عادةً نرغب في اختبارها هي من النوع الآتي:

$$H_o: Q = 0$$
$$H_1: Q \neq 0$$

نتائج:

بافتراض بعض الشروط اللازمة والتي ذكرناها سابقًا، يمكن إثبات ما يأتي:

(١) يتم تقدير الكمية:

$$Q = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mu_i = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ \dots + \lambda_t \mu_t$$

بالمقِّدر المنصف (غير المتحيز) الآتي:

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \bar{Y}_i = \lambda_1 \bar{Y}_1 + \lambda_2 \bar{Y}_2 + \ \dots + \lambda_t \bar{Y}_t$$

حيث أن $(\bar{Y}_i)$ هو متوسط عينة المعالجة (T_i).

(٢) الخطأ المعياري للمقدر $(\hat{Q} = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \bar{Y}_i)$ هو:

$$S_{\hat{Q}} = \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{t} \frac{\lambda_i^2}{n_i}}$$

حيث أن (n_i) هو حجم عينة المعالجة (T_i)، و (MSE) هو متوسط مربعات الخطأ التجريبي في جدول تحليل التباين.

اختبارالفروض حول المتضادة:

إن إحصاءة اختبار الفروض:

$$\mathrm{H_o}: \mathrm{Q} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}} \lambda_{\mathrm{i}} \mu_{\mathrm{i}} = 0$$
$$\mathrm{H_1}: \mathrm{Q} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}} \lambda_{\mathrm{i}} \mu_{\mathrm{i}} \neq 0$$

تعطى بالصيغة الآتية:

$$t^* = \frac{\hat{Q}}{S_{\hat{Q}}} = \frac{\hat{Q}}{\sqrt{MSE \sum_{i=1}^{t} \frac{\lambda_i^2}{n_i}}}$$

وإذا كان فرض العدم صحيحًا فإن الإحصاءة (t^*) تتوزع وفق توزيع تي بدرجات حرية مساوية لدرجات حرية مجموع مربعات الخطأ التجريبي (df_E)؛ أي أن:

$$t^* \sim t(df_E)$$

لذلك، فنحن نرفض فرض العدم $(\mathrm{H_o}: \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}} \lambda_{\mathrm{i}} \mu_{\mathrm{i}} = 0)$ عند مستوى الدلالة (α)، إذا كان:

$$t^* < -t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E) \quad \text{أو} \quad t^* > t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)$$

أي إذا كان:

$$|t^*| > t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)$$

ملاحظة:

إذا كان فرض العدم $(H_o: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_t)$ صحيحًا، فإن أي متضادة في المتوسطات تساوي الصفر، أي أن

$$Q = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mu_i = 0$$

فترة الثقة للمتضادة:

فترة الثقة، بمستوى ثقة $(1-\alpha)100\%$، للمتضادة $(Q = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \mu_i)$ هي:

$$\hat{Q} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{Q}}$$

أو

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \bar{Y}_i \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{t} \frac{\lambda_i^2}{n_i}}$$

أي أن:

$$\hat{Q} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{Q}} < Q < \hat{Q} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{Q}}$$

مثال:

في المثال السابق، نريد أن نتحقق من أن كمية الأكسجين المذابة عند أعلى النهر (قبل المدينة) تختلف عنها في أسفل النهر (بعد المدينة)؟ أي نريد أن نختبر الفروض الآتية عند مستوى الدلالة $(\alpha = 0.05)$:

$$H_o: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_4 + \mu_5}{2}$$
$$H_1: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \neq \frac{\mu_4 + \mu_5}{2}$$

لاحظ أن فرض العدم ممكن أن يصاغ كما يأتي:

$$H_o: \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 - \mu_5 = 0$$
$$H_1: \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 - \mu_5 \neq 0$$

أو بالصيغة:

$$\mathrm{H_o}: \mathrm{Q} = 0$$
$$\mathrm{H_1}: \mathrm{Q} \neq 0$$

حيث أن:

$$\mathrm{Q} = \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 - \mu_5$$
$$= \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \mu_i$$

والمعاملات (λ_i) هي:

$$\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = 1, \;\; \lambda_3 = 0, \;\; \lambda_4 = -1, \;\; \lambda_5 = -1$$

لاحظ أن:

$$\sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 0$$

لذلك فإن الكمية $(\mathrm{Q} = \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 - \mu_5)$ عبارة عن متضادة في متوسطات المعالجات.

نقوم بتقدير الكمية (Q) بالمقدر المنصف الآتي:

$$\hat{Q} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 - \bar{Y}_4 - \bar{Y}_5$$
$$= 6.08 + 6.44 - 5.52 - 4.84$$
$$= 2.16$$

ثم نوجد الخطأ المعياري للكمية $(\hat{Q})$:

$$S_{\hat{Q}} = \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{5} \frac{\lambda_i^2}{n_i}}$$
$$= \sqrt{0.0324(\frac{1^2}{5} + \frac{1^2}{5} + \frac{(-1)^2}{5} + \frac{(-1)^2}{5})}$$
$$= 0.161$$

ثم نحسب إحصاءة الاختبار:

$$t^* = \frac{\hat{Q}}{S_{\hat{Q}}} = \frac{2.16}{0.161} = 13.416$$

ثم نوجد القيمة الجدولية:

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E) = t_{0.025}(20) = 2.086$$

وبمقارنة قيمة إحصاءة الاختبار (t^*) مع القيمة الجدولية ($t_{\frac{\alpha}{2}}(df_E)$)، نجد أن:

$$t^* = 13.416 > t_{0.025}(20) = 2.086$$

لذلك، فإننا نرفض فرض العدم ($H_o: \frac{\mu_1+\mu_2}{2} = \frac{\mu_4+\mu_5}{2}$) عند مستوى الدلالة ($\alpha = 0.05$)، ونستنتج أن كمية الأكسجين المذابة عند أعلى النهر (قبل المدينة) غير مساوية لكمية الأكسجين المذابة في أسفل النهر (بعد المدينة).

كما يمكن إيجاد فترة ثقة (بثقة ٩٥%) للمتضادة ($\mathrm{Q} = \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 - \mu_5$) كما يأتي:

$$\hat{Q} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\hat{Q}}$$

$$2.16 \pm t_{0.025} \times 0.161$$

$$2.16 \pm 2.086 \times 0.161$$

$$2.16 \pm 0.3358$$

$$1.824 < Q < 2.496$$

لاحظ أن فترة الثقة هذه لا تحتوي على الصفر، مما يدل على أن هناك فرقًا معنويًا بين قيمة (Q) و (الصفر)؛ وهذا يؤيد استنتاجنا السابق عندما رفضنا فرض العدم ($\mathrm{H_o}: \mathrm{Q} = 0$).