د. برهان

\

جامعة الملك سعود	الاختبار الفصلي الاول	الفصل الثاني 1430/1429
كلية العلوم	المقرر 151 ريض	الزمن : ساعة ونصف

الاسم : الرقم : الشعبة:

	الجزء الاول				
رقم السؤال	1	2	3	4	5
رمز الاجابة	ج	ج	ب	ب	د

الجزء الاول : اختر الا جابة الصحيحة.

1\ العبارة $p \rightarrow (q \wedge r)$ تكافئ العبارة:

أ) $(p \wedge q) \rightarrow r$ ب) $(p \wedge r) \rightarrow q$

ج) $(\neg q \vee \neg r) \rightarrow \neg p$ د) $\neg p \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$.

2\ العبارة $(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

أ) مصدوقة ب) تناقض

ج) مخلوطة د)لا شيء مما ذكر.

3\ المكافىء العكسي للعبارة" اذا كان a+b عددا سالبا فان احد العددين a و b (على الاقل) سالب".

أ)اذا كان a+b عددا موجبا فان كل من a و b عدد موجب.

ب)اذا كان a عددا موجبا و b عددا موجبا فان a+b عدد موجب.

ج)اذا كان a عددا موجبا او b عددا موجبا فان a+b عدد موجب.

د)اذا كان a+b عددا موجبا و a عددا سالبا فان b عدد موجب.

4\ الشكل الحجي الباطل هو:

أ) $\neg p, q \therefore p \vee q$ ب) $\neg p, \neg q \therefore p \vee q$

ج) $p, \neg q \therefore p \vee q$ د) $p, q \therefore p \vee q$

5\ اذا كانت S وR علاقتين على $A=\{1,2,3\}$ حيث $R=\{(1,3),(2,2),(3,2)\}$ و $S=\{(1,2),(1,3),(2,1)\}$. فان العلاقة $R \circ S^{-1}$ تساوي :

أ) $\{(1,2),(2,2),(2,3)\}$ ب) $\{(2,2),(3,2)\}$

ج) $\{(1,3),(2,3),(3,3)\}$ د) $\{(1,2),(2,3),(3,3)\}$

الجزء الثاني : اجب عن الاسئلة التالية:

4

س1) استخدم الاستقراء الرياضي لاثبات ان n^2-3n+5 عدد فردي لكل عدد صحيح $n \geq 0$.

P_n : " $a_n = n^2-3n+5$ عدد فردي " لكل $n \geq 0$.

• الخطوة الأساسية $n=0$ ، $a_0 = 5$ وهو فردي ، إذن P_0 صائب. (1)

• الخطوة الاستقراء. نفترض أن P_k صائب لكل $k \geq 0$ فلنثبت أن P_{k+1} صائب.

لدينا $a_k = k^2-3k+5 = 2m+1$ حيث $m \in \mathbb{N}$ و نريد أن نثبت أن $a_{k+1} = (k+1)^2 - 3(k+1)+5$ هو عدد فردي. (1)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+1)^2 - 3(k+1)+5 \\ &= k^2 + 2k + 1 - 3k - 3 + 5 \\ &= (k^2-3k+5) + 2k - 2 \\ &= 2m+1 + 2(k-1) = 2(\underbrace{m+k-1}_{L \in \mathbb{N}}) + 1 \end{aligned}$$ (1)

إذن $(k+1)^2 - 3(k+1)+5$ هو عدد فردي (1)

س2) استخدم المكافئ العكسي لإثبات انه إذا كان العدد الصحيح m لا يقبل القسمة على 3 فان العدد $(m+1)^2+2m^2+5$ لا يقبل القسمة على 3 .

3

$$\underbrace{3 \nmid (m+1)^2+2m^2+5}_{q} \Leftarrow \underbrace{3 \nmid m}_{p}$$

البرهان بالمكافئ العكسي: يعني $p \Rightarrow q$ يعني $\neg q \Rightarrow \neg p$

(1) يعني لدينا $3 / (m+1)^2+2m^2+5$ فلنثبت أن $3/m$

بما أن $3 / (m+1)^2+2m^2+5$ إذن يوجد عدد $k \in \mathbb{N}$ بحيث

$$(m+1)^2 + 2m^2+5 = 3k$$
(1)
$$m^2+2m+1+2m^2+5 = 3k$$
$$3m^2+2m+6 = 3k$$
إذن
$$2m = 3k - 3m^2 - 6$$
$$= 3(\underbrace{k-m^2-2}_{L})$$

(1)

$3/2m$ إذن $3/m$

و بما أن $\gcd(3,2)=1$

3

س3) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية معرفة استقرائيا كما يلي:

$a_1=2, a_2=3, a_3=4$ و $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}}{3}$ لكل $n\geq 3$.

اثبت أن $2\leq a_n \leq 4$ لكل $n\geq 1$.

نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي:

نضع

$P_n:\ 2\leq a_n \leq 4$

• الخطوة الأساسية:

$a_1=2$ إذن $2\leq a_1\leq 4$

$a_2=3$ إذن $2\leq a_2\leq 4$

$a_3=4$ إذن $2\leq a_3\leq 4$

P_1, P_2, P_3 صائبة

1

• الخطوة الاستقرائية: نفترض أن $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ صائبة

1 ولنثبت أن P_{k+1} صائب.

$$a_{k+1} = \frac{a_{k-1}+a_{k-2}+a_{k-3}}{3}$$

بما أن $P_{k-1}, P_{k-2}, P_{k-3}$ صائبة إذن لدينا

(1) $2\leq a_{k-3}\leq 4$

(2) $2\leq a_{k-2}\leq 4$

(3) $2\leq a_{k-1}\leq 4$

بجمع هذه المتباينات (1)+(2)+(3) نحصل

$6\leq a_{k-1}+a_{k-2}+a_{k-3}\leq 12$ إذن $2\leq \underbrace{\frac{a_{k-1}+a_{k-2}+a_{k-3}}{3}}_{a_{k+1}}\leq 4$ 1

يعني P_{k+1} صائب.

النتيجة: لكل $n\geq 1$ ، $2\leq a_n\leq 4$