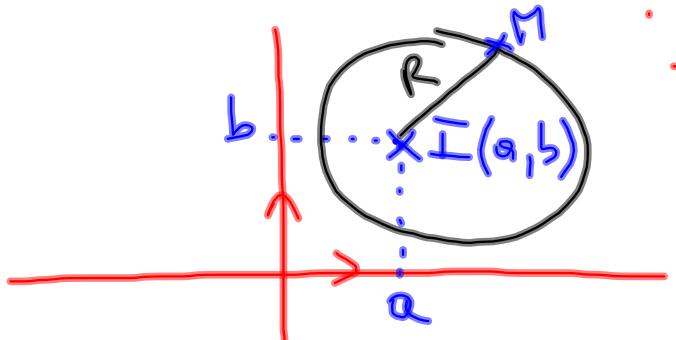
الدوال في متغيرين

تعريف :

تعريف (١) المستقيم

(٣) الدائرة:



$$M \in \mathcal{C}_{(I,R)} \iff (d(I,M))^2 = R^2$$

$$\iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

ملاحظة:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$\iff (x^2 + \alpha x) + (y^2 + \beta y) + \gamma = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma$$

← إذا كان $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0$ فإن

$\mathcal{C}$ هي دائرة مركزها $I\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$، نصف قطرها هو $R = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$

← إذا كان $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma < 0$ فإن $\mathcal{C} = \emptyset$

← إذا كان $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma = 0$ فإن $\mathcal{C} = \left\{I\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)\right\}$

مثال: أوجد مجال الدالة f في الحالات التالية

(١) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y}{x+y-2}$

(٢) $f(x,y)=\sqrt{x-y+3}$

(٣) $f(x,y)=\dfrac{x+y^2}{x+y-3}+\sqrt{2x+y-3}$

(٤) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(٥) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2x+4y-5}$

(٦) $f(x,y)=\dfrac{x^2y+3xy+5}{x^2+y^2-2x+4y+5}$

(٧) $f(x,y)=\dfrac{x+y^2}{\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+4}}$

(٨) $f(x,y)=\dfrac{3x^2y-2x+4}{\sqrt{4-4y+2x-x^2-y^2}}$

(٩) $f(x,y)=\sqrt{x^2-2x-y^2-2y-2}$

(١٠) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2+2x-3y+2\right)$

(١١) $f(x,y)=\dfrac{x^3y-4xy^2}{\ln\left(x^2+y^2-2x+2y+4\right)}$

تذكير:

(١)
$$f(x,y)=\frac{u(x,y)}{v(x,y)}$$

حيث $D_u=D_v=\mathbb{R}^2$ (u, v معرفة على $\mathbb{R}^2$)

$f(x,y)$ معرفة إذا، فقط إذا كان $v(x,y)\neq 0$

(٢)
$$f(x,y)=\sqrt{u(x,y)}$$

حيث $D_u=\mathbb{R}^2$

$f(x,y)$ معرفة إذا، فقط إذا كان $u(x,y)\geq 0$

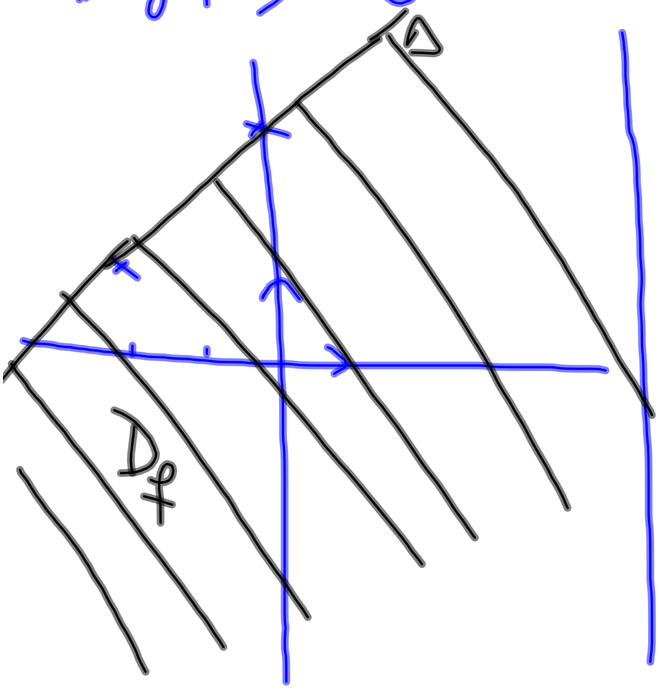
(٣)
$$f(x,y)=\ln(u(x,y))$$

حيث $D_u=\mathbb{R}^2$

$f(x,y)$ معرفة إذا، فقط إذا كان $u(x,y)>0$

$$f(x,y)=\sqrt{x-y+3}$$ (1)

$f(x,y)$ موجودة إذا ونقط إذا كان $x-y+3\geq 0$



$\Delta:\ x-y+3=0$

x	-2	0
y	1	3

النقطة $(0,0)$ تحقق

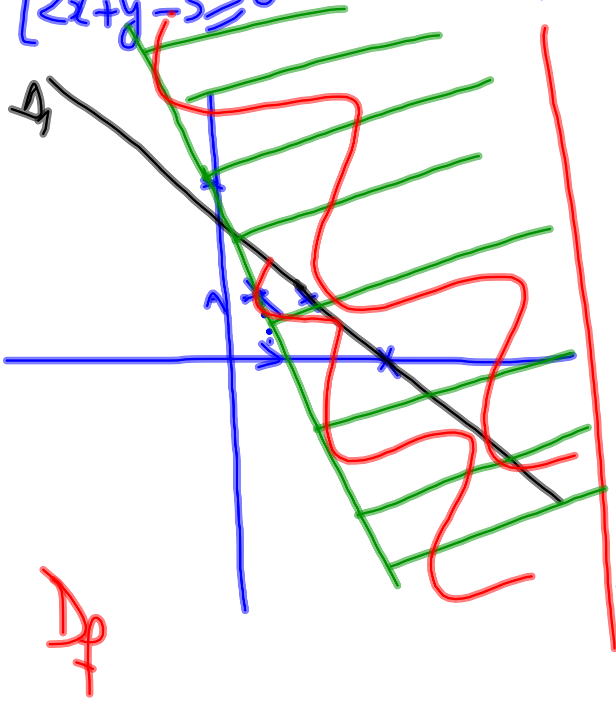
اللامعادلة $x-y+3\geq 0$

لأن $(0-0+3\geq 0)$

$$f(x,y)=\frac{x+y^2}{x+y-3}+\sqrt{2x+y-3}$$ (٣)

$\begin{cases} x+y-3\neq 0 \\ 2x+y-3\geq 0 \end{cases}$

$f(x,y)$ موجودة إذا وفقط إذا كان



$\Delta_1 : x+y-3=0$

x	3	2
y	0	1

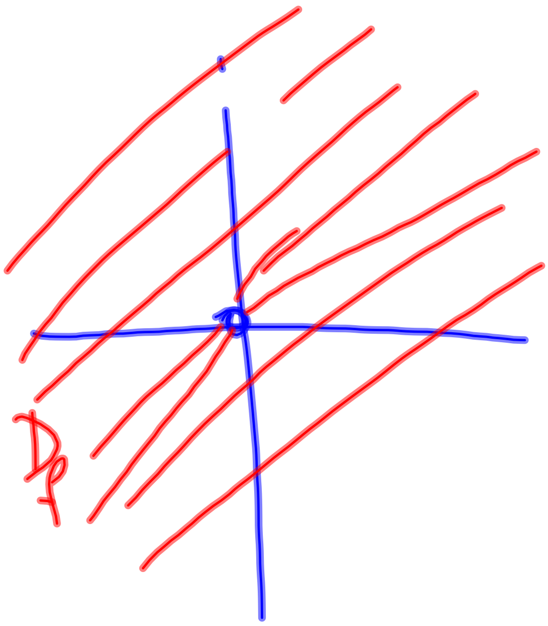
$\Delta_2 : 2x+y-3=0$

x	1	0
y	1	3

النقطة $(0,0)$ لا تحقق اللامعادلة

$(2(0)+0-3 \ngeq 0$ لأن$)$ $2x+y-3\geq 0$

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$ (٤)



$f(x,y)$ موجودة إذا و فقط

إذا كان $x^2+y^2 \neq 0$

$$x^2+y^2=0$$

$$\Longleftrightarrow x^2=0,\ y^2=0$$

$$\Longleftrightarrow x=0,\ y=0$$

$$D_f=\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2x+4y-5} \qquad (٥)$$

$f(x,y)$ موجودة إذا وفقط إذا كان

$$x^2+y^2-2x+4y-5 \geq 0$$

$$x^2+y^2-2x+4y-5=0 \qquad \text{يمثل}$$

تذكير:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 - b^2 = a^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 - b^2 = a^2 - 2ab$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

ملاحظة:

$$x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2x+4y-5} \qquad (0)$$

$$\mathcal{C}: \quad x^2+y^2-2x+4y-5=0$$

$$\iff (x^2-2x)+(y^2+4y)-5=0$$

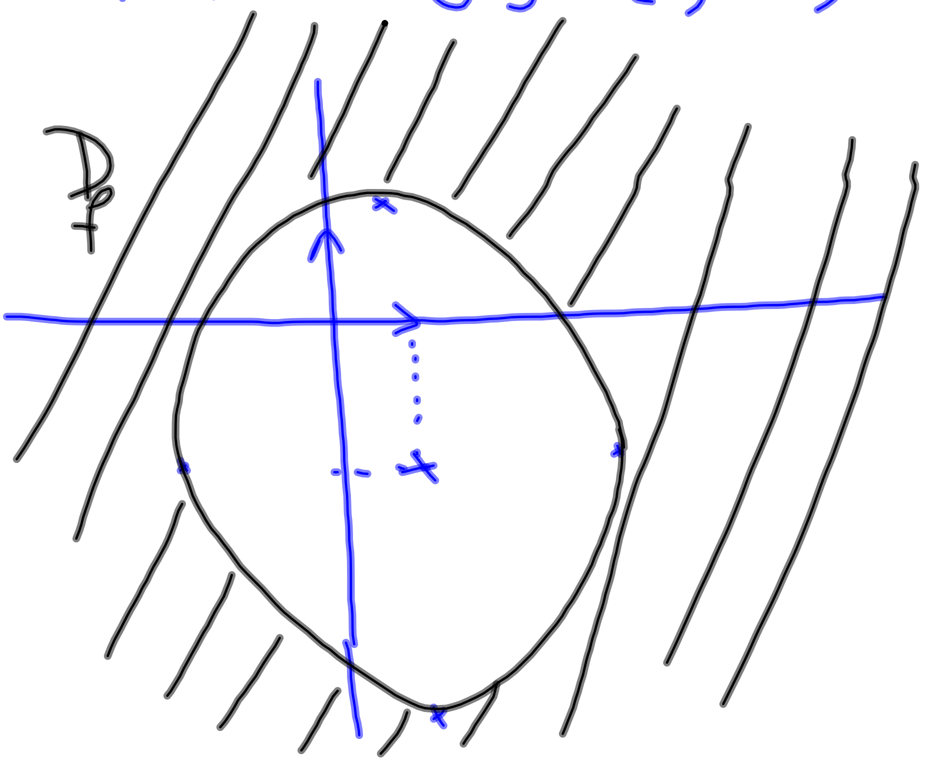
$$\iff (x-1)^2+(y+2)^2-5-1^2-2^2=0$$

$$\iff (x-1)^2+(y+2)^2=\sqrt{10}^{\,2}$$

بأن $\mathcal{C}$ هي الدائرة مركزها $I(1,-2)$ ونصف

قطرها $R=\sqrt{10}$

بأن D_f هو خارج القرص المحدود بالدائرة $\mathcal{C}$



$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5} \qquad (7)$$

$f(x,y)$ معرّفة إذا، فقط إذا كان: $x^2+y^2-2x+4y+5\geq 0$

$$\mathcal{C}: x^2+y^2-2x+4y+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+4y)+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+5-1^2-2^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=0$$

إذن $\mathcal{C}=\{I(1,-2)\}$

ولدينا: $x^2+y^2-2x+4y+5\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\geq 0$

إذن: $D_f=\mathbb{R}^2$

مثال (7)

$$f(x,y)=\frac{xy^2-3x^2}{\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}}$$

معرّفة $f(x,y)$ إذا, فقط إذا كان $x^2+y^2-2x+4y+5>0$

$$\left(\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+5\geq 0 & ;1 \\ x^2+y^2-2x+4y+5\neq 0 & ;2 \end{cases}\right)$$

لدينا: $x^2+y^2-2x+4y+5>0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2>0$

ولدينا: $x^2+y^2-2x+4y+5=0 \Leftrightarrow x=1\,,\ y=-2 \Leftrightarrow (x,y)=(1,-2)$

$$D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(1,-2)\}$$

(٧)

$$f(x,y)=\frac{x+y^2}{\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+4}}$$

$f(x,y)$ موجودة إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2-2x+4y+4>0$

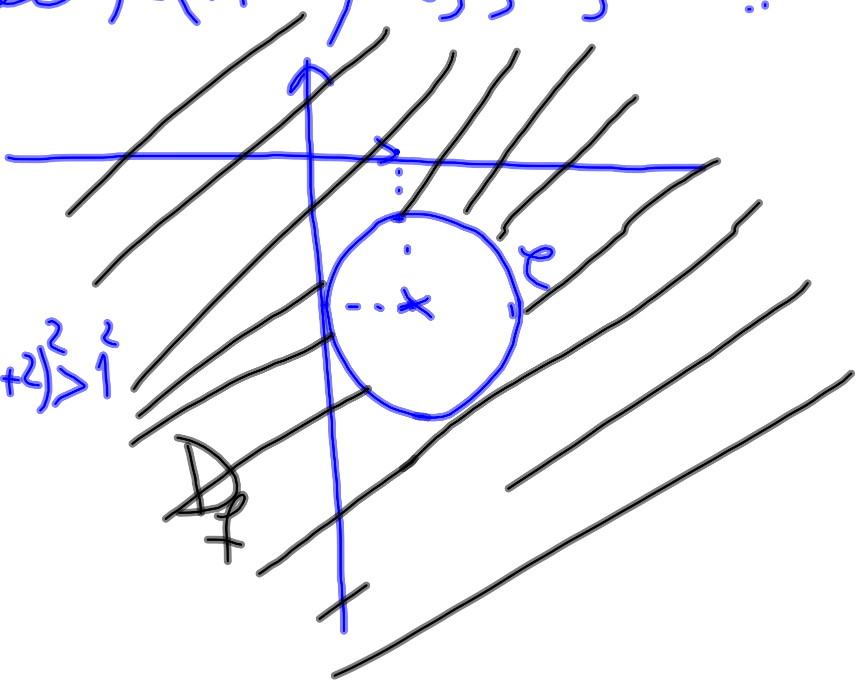
$$\mathcal{C}: x^2+y^2-2x+4y+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+4y)+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+4-1^2-2^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=1^2$$

إذن $\mathcal{C}$ هي الدائرة مركزها $I(1,-2)$ ونصف قطرها 1



$$(x-1)^2+(y+2)^2>1^2$$

$$f(x,y)=\frac{3x^2y-2x+4}{\sqrt{4-4y+2x-x^2-y^2}}$$ (٩)

$f(x,y)$ موجودة إذا وفقط إذا كان $4-4y+2x-x^2-y^2>0$

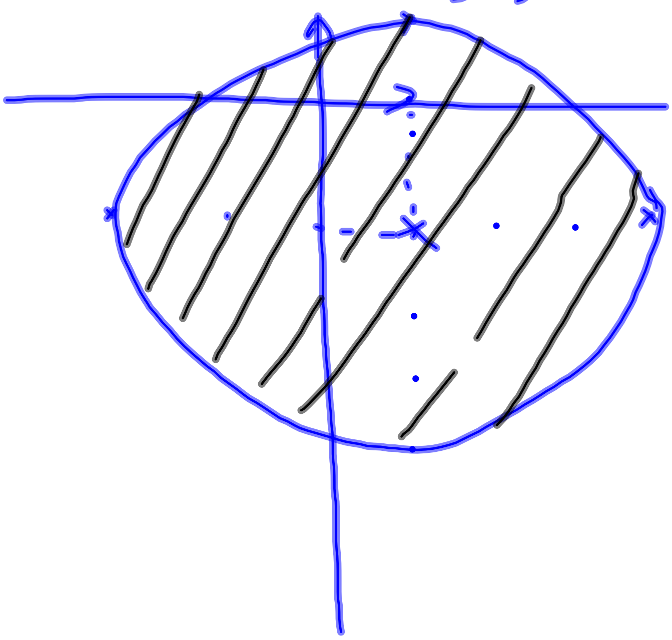
$\Leftrightarrow -4+4y-2x+x^2+y^2<0$

$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+4y)-4<0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2-4-1^2-2^2<0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2<3^2$

مجال الدالة f هو القرص المفتوح مركزه $I(1,-2)$ ونصف قطره $R=3$



$$f(x,y)=\sqrt{x^2-2x-y^2-2y} \qquad (9)$$

$f(x,y)$ موجودة إذا وفقط إذا $x^2-2x-y^2-2y \geq 0$

$$D:\ x^2-2x-y^2-2y \geq 0$$

$$\left(-(y^2+2y)=-\left[(y+1)^2-1^2\right]\right)$$

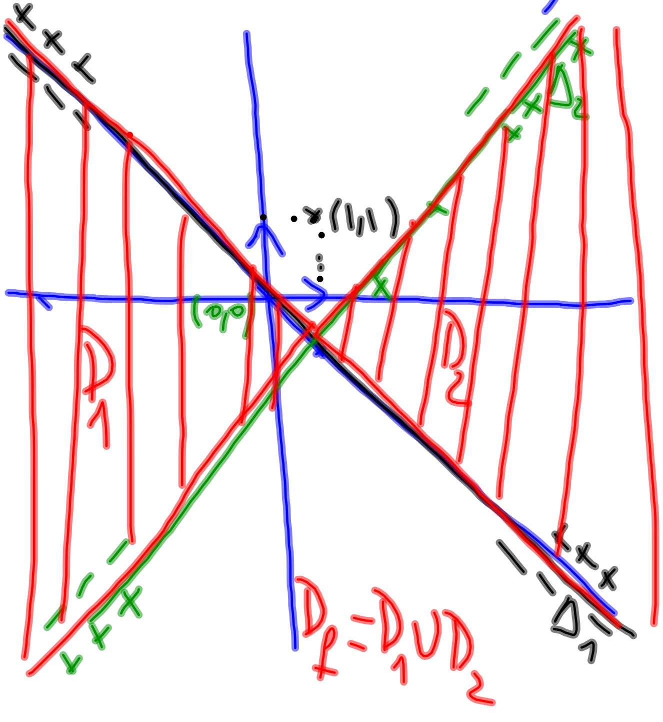
$$\Leftrightarrow (x^2-2x)-(y^2+2y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-(y+1)^2 -1^2+1^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-(y+1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1)-(y+1)\right]\left[(x-1)+(y+1)\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)(x+y) \geq 0$$



$\Delta_1:\ x+y=0$

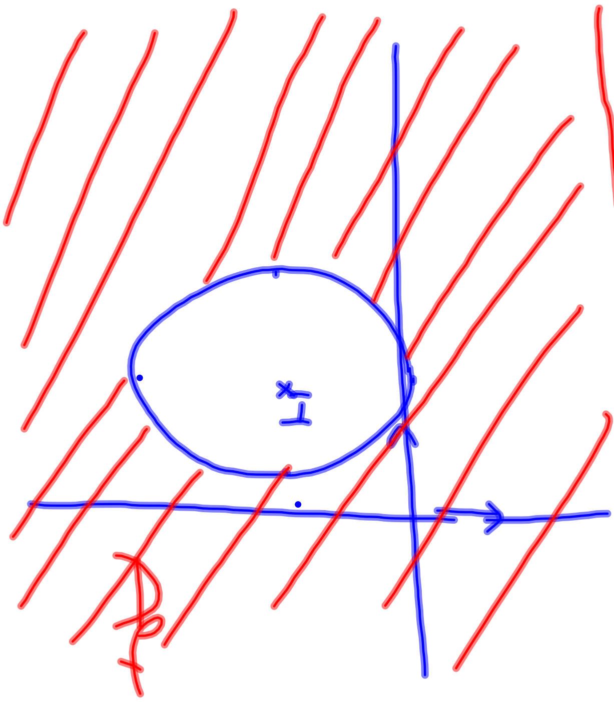
x	0	1
y	0	-1

$\Delta_2:\ x-y-2=0$

x	2	3
y	0	1

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2+2x-3y+2) \qquad (١٠)$$

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+2x-3y+2>0$



لدينا

$$x^2+y^2+2x-3y+2>0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)+(y^2-3y)+2>0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-1^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2>0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 > 1+\frac{9}{4}-2=\frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

مجال الدالة f هو خارج القرص المفتوح حيث المركز $I\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ ونصف القطر $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$f(x,y)=\frac{x^3y-4xy^2}{\ln(x^2+y^2-2x+2y+4)} \qquad (11)$$

$$\begin{cases}\ln(x^2+y^2-2x+2y+4)\neq 0\\ x^2+y^2-2x+2y+4>0\end{cases}$$

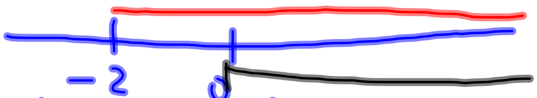
f(x,y) موجودة إذا، فقط إذا كان

$$\ln(x^2+y^2-2x+2y+4)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+2y+4=1$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+2y)=-3$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1^2+(y+1)^2-1^2=-3$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=-1$$

غير ممكن لأن

$$\ln(x^2+y^2-2x+2y+4)\neq 0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$x^2+y^2-2x+2y+4>0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2>-2$$



لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

الخلاصة:

$$D_f=\mathbb{R}^2$$

$$f(x,y)=\frac{x^3y-4xy^2}{\ln(x^2+y^2-2x+2y+3)}\quad (1)$$ **ملاحظة :**

$f(x,y)$ موجودة إذا, نقط إذا كان

$$\begin{cases}\ln(x^2+y^2-2x+2y+3)\neq 0\\ x^2+y^2-2x+2y+3>0\end{cases}$$

$$x^2+y^2-2x+2y+3>0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2>-1$$

أي $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\ln(x^2+y^2-2x+2y+3)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+2y+3=1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=1,\ y=-1 \Leftrightarrow (x,y)=(1,-1)$$

وبالتالي مجال الدالة هو $D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(1,-1)\}$

ملاحظة: (2)

$$f(x,y)=\frac{x^3y-4x^2y}{\ln(x^2+y^2-2x+2y-1)}$$

$f(x,y)$ معرّفة إذا، فقط إذا كان

$$\begin{cases}\ln(x^2+y^2-2x+2y-1)\neq 0\\ x^2+y^2-2x+2y-1>0\end{cases}$$

$x^2+y^2-2x+2y-1>0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2>\sqrt{3}^2$

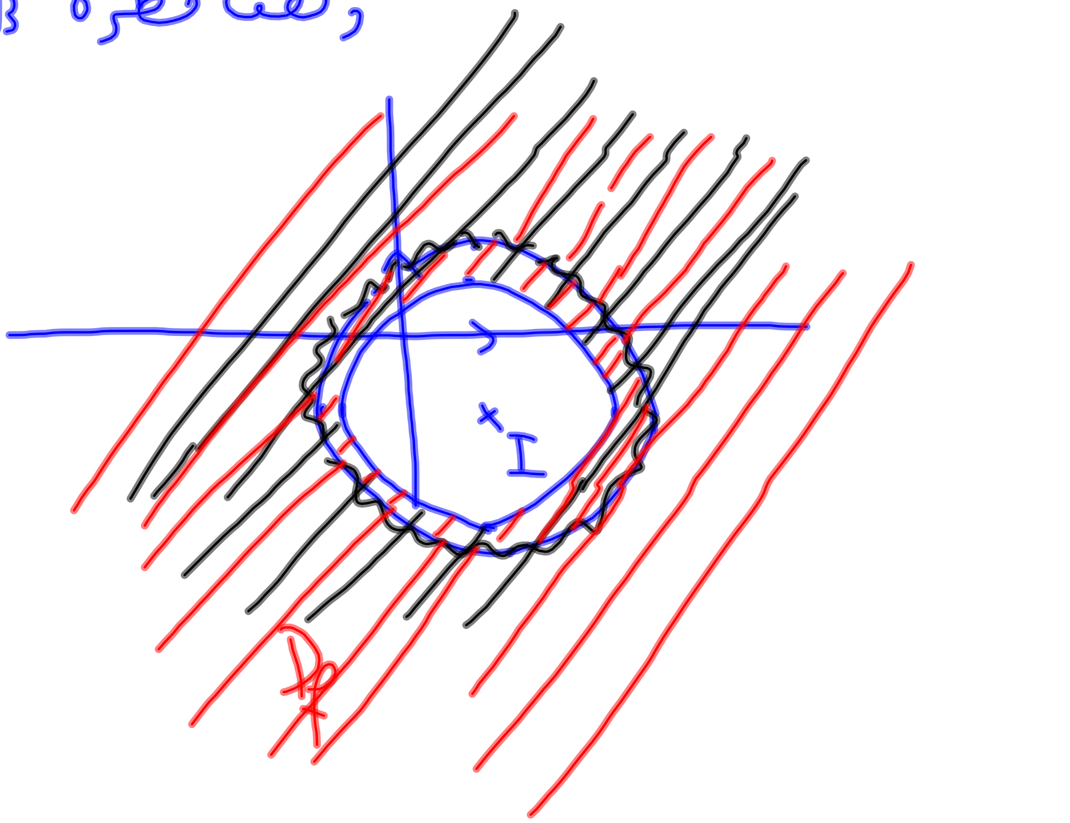
(x,y) نقطة خارج القرص المفتوح مركزه $I(1,-1)$ ونصف قطره $R_1=\sqrt{3}$

$\ln(x^2+y^2-2x+2y-1)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+2y-1=1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=2^2$

$\Leftrightarrow (x,y)\in \mathcal{C}(I(1,-1),R=2)$

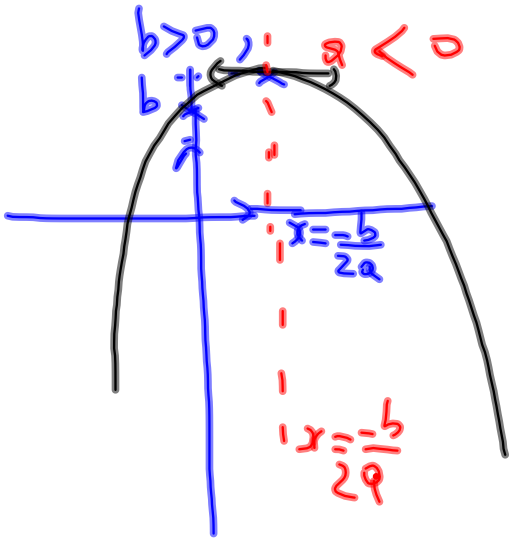


تذكير : المنحنى الرأسي (Parabola)

$\left(\alpha x^2 + \beta y + \gamma = 0\right.$, أ $\left.\right)$
حيث $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

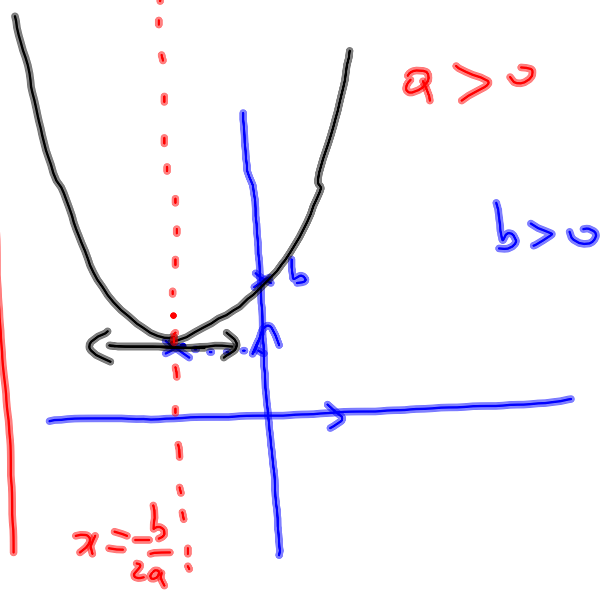
$y = ax^2 + b \; ; \; a \neq 0$ (1)

$b > 0 \; ; \; a < 0$



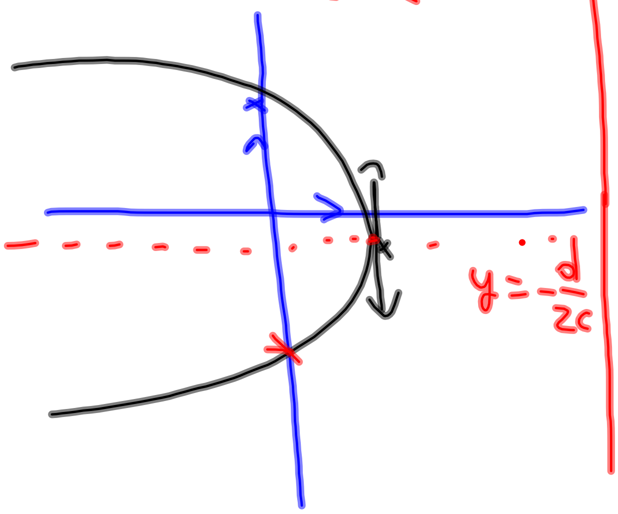
$a > 0$

$b > 0$

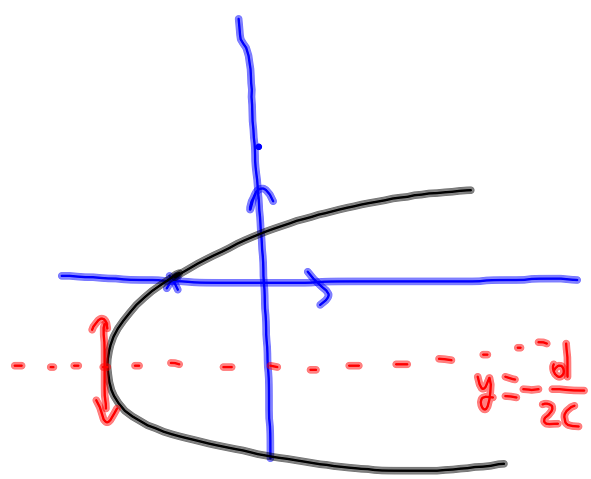


$x = cy^2 + d$ (2)

$c < 0$



$c > 0$



مثال: أوجد مجال الدالة التالية:

(١) $f(x,y) = \ln(x^2+y-2)$

(٢) $f(x,y) = \sqrt{y^2-x+1}$

(٣) $f(x,y) = \dfrac{xy^2-3x+5}{\ln(x-y^2+1)}$