جامعة الملك سعود

كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار النهائي

الفصل الصيفي 1438 – 1439 هـ 244 ريض الزمن ثلاث ساعات

الإختبار يحتوي على صفحتين

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

السؤال الأول (6 درجات)

(١). لتكن $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

أوجد محدد المصفوفة AB و محدد المصفوفة BA.

(٢). لتكن المصفوفة $E = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ا. أوجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث $E^2 + aE + bI = 0$

ب. إستنتج المصفوفة E^{-1}.

(٣). إذا كانت مصفوفة A مربعة من الدرجة 3 حيث $|A| = 2$.

أوجد $|\text{adj}A + 2A^{-1}|$.

السؤال الثاني (6 درجات)

إستخدم طريقة جاوس لإيجاد حلول النظام التالي حسب قيمة m

$$\begin{cases} (m-1)x + y + 2z &= 5 \\ (m-2)x + 2y + 3z &= 7 \\ (1-m)x - y + (m-3)z &= m^2 - m - 5 \end{cases}$$

السؤال الثالث (5 درجات)

لتكن المصفوفة $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(١). أوجد صفرية و رتبة المصفوفة A.

(٢). أوجد أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة A.

(٣). أوجد أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة A.

Scanned by CamScanner

السؤال الرابع (6 درجات)

ليكن $T:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ التحويل الخطي المعرف بالقاعدة

$$T(x,y,z,t) = (x-y+2z-t,\ -x+y-2z+t,\ y+z+4t,\ x+3z+3t)$$

(١). اوجد مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^4$.

(٢). اوجد اساسا لنواة التحويل الخطي T

(٣). اوجد اساسا لصورة التحويل الخطي T

السؤال الخامس (4 درجات)

ليكن الضرب الداخلي التالي

$$\langle (x,y),(x',y') \rangle = 2xx' + 2xy' + 2yx' + 3yy'$$

على الفضاء $\mathbb{R}^2$.

اوجد $a,b \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $\{u_1=(1,-1),\ u_2=(a,b)\}$ اساسا متعامدا في الفضاء $\mathbb{R}^2$ بالنسبة للضرب الداخلي المعطى أعلاه.

السؤال السادس (7 درجات)

لتكن بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

(١). اوجد اساسا للفضاء المميز بالنسبة للقيمة المميزة 2.

(٢). اوجد اساسا للفضاء المميز بالنسبة للقيمة المميزة -1.

(٣). إستنتج مما سبق مصفوفة قطرية D و مصفوفة لها معكوس P بحيث $D = P^{-1}AP$.

(٤). إستنتج مما سبق معكوس المصفوفة A.

السؤال السابع (6 درجات)

ليكن $B = \{v_1=(1,-1), v_2=(-1,2)\}$ اساسا للفضاء $\mathbb{R}^2$ و C الأساس المعتاد في $\mathbb{R}^2$.

ليكن $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ التحويل الخطي المعرف بما يلي:

$T(v_1)=(3,4)$ و $T(v_2)=(1,2)$

(١). اوجد $T(x,y)$

(٢). اوجد مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس B

(٣). اوجد متجه v بحيث $T(v)=(2,3)$.

Scanned by CamScanner

إصلاح الإختبار النهائي للفصل الصيفي 1438 - 1439 هـ (244 ريض)

السؤال الأول 6

(١) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ و $BA = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

$|AB| = 0$ و $|BA| = 15$

(٢) أ. $E^2 = I$ $a=0, b=-1$

ب. $E^{-1} = E$

(٣) $\text{adj}A = 2A^{-1}$

$|\text{adj}A + 2A^{-1}| = |4A^{-1}| = \frac{4^3}{|A|} = 32$

السؤال الثاني 5

$$\left[\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 2 & 5 \\ m-2 & 2 & 3 & 7 \\ 1-m & -1 & m-3 & m^2-m-5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & m & m+1 & 2m+3 \\ 0 & 0 & m-1 & m(m-1) \end{array}\right]$$

إذا كان $m = 0$ النظام ليس له حل

إذا كان $m = 1$ النظام له عدد لا نهائي من الحلول

$$S = \{(1+y, y, 3) : y \in \mathbb{R}\}$$

إذا كان $m \neq 0, m \neq 1$ النظام له حل وحيد.

$$S\left(\frac{3-m}{m}, \frac{3+m-m^2}{m}, m\right)$$

السؤال الثالث 5

(١) الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة هي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

صفرية المصفوفة هي 3

رتبة المصفوفة هي 3

(٢) $x, t, v \in \mathbb{R}, AX = 0 \iff X = y(-2, 1, 0, 0, 0, 0) + t(-1, 0, 1, 1, 0, 0) + v(-1, 0, 1, 0, -1, 1)$

Scanned by CamScanner

(٣) $\{(1,2,0,1,0,1),(0,0,1,-1,0,-1),(0,0,0,0,1,1)\}$ هي أساس للفضاء الصفي للمصفوفة A.

السؤال الرابع

(١) مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^4$ هي

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&-2&1\\0&1&1&4\\1&0&3&3\end{pmatrix}$$

(٢) $\ker(T)=\{x(-3,-1,1,0)+y(-3,4,0,1);\ x,y\in\mathbb{R}\}$
$\{(-3,-1,1,0),(-3,4,0,1)\}$ هو أساس لنواة التحويل الخطي T.

(٣) $\{(1,-1,0,1),(-1,1,1,0)\}$
هو أساس لصورة التحويل الخطي T.

السؤال الخامس

$\langle u_1,u_2\rangle=-b=0$، و بالتالي $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\|u_1\|^2=1$
$\|u_2\|^2=1$
$\langle u_1,u_2\rangle=0$
$a=\cdots,\ b=\cdots$

السؤال السادس

لتكن بالمصفوفة $A=\begin{pmatrix}5&-3&-3\\3&-1&-3\\3&-3&-1\end{pmatrix}$

(١) $\{u_1=(1,0,1),u_2=(1,1,0)\}$ هو أساس للفضاء المميز بالنسبة للقيمة المميزة 2.

(٢) $\{u_1=(1,1,1)\}$ هو أساس للفضاء المميز بالنسبة للقيمة المميزة -1.

(٣) $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$

(٤) $A=PDP^{-1}$، $A^{-1}=PD^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\1&-1&-\frac{3}{2}\\1&-\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}$

السؤال السابع

(١) $T(x,y)=(2x+y)(3,4)+(x+y)(1,2)$
$T(x,y)=(7x+4y,10x+6y)$

(٢) مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس C هي $A=\begin{pmatrix}7&4\\10&6\end{pmatrix}$

$[T]_B=\begin{pmatrix}10&4\\7&3\end{pmatrix}$

(٣) $T(v)=(2,3)\iff v=(0,\frac{1}{2})$

Scanned by CamScanner