التصحيح (44)

جامعة الملك سعود –كلية العلوم . قسم الرياضيات .	الامتحان النهائي للمقرر (209) ريض . الاثنين 1437/3/24 هـ.	الفصل الأول .1437/1436هـ. الزمن : ثلاث ساعات.

السؤال الأول (13) أ اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية :

$$\left\{\frac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ، \quad \left\{n\sin(\frac{1}{n})\right\}_{n=1}^{\infty} .$$

ب) برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة ثم احسب مجموعها : $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$.

ج) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{4n+5} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+2} \quad ، \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty}n e^{-n^2} .$$

السؤال الثاني (8) أ) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة $f(x)=\frac{2x}{4+x^2}$ ثم استنتج متسلسلة القوى في x للدالة $h(x)=\ln(4+x^2)$ وما هي فترة تقاربها؟.

ب) أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتسلسلة القوى في $(x-1)$ للدالة التالية $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

ج) أوجد فترة ونصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى التالية : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$.

السؤال الثالث (8) أ) أوجد متسلسلة فوريه للدالة $f(x)=|x|$ على الفترة $(-1,1)$ ، حيث $f(x+2)=f(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$ ثم استنتج صحة العلاقة التالية : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

ب) أوجد تكامل فوريه للدالة $\begin{cases} 0 \;; x<\pi \\ 4 \;; \pi\le x<2\pi \\ 0 \;; x\ge 2\pi \end{cases}$ ثم استنتج من تكامل فوريه وعند $x=\pi$ صحة العلاقة التالية $\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha\pi)\,d\alpha}{\alpha}=\frac{\pi}{2}$

(استفد من العلاقة المثلثية $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$)

السؤال الرابع (15) أ) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية : $(x^2 - xy + y^2)dx - xy\,dy = 0$

،حيث $x > 0$ و $y \neq x$.

ب) برهن أن $\mu(y) = y^3$ عامل التكميل للمعادلة التفاضلية : $xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 1)dy = 0$ ثم أوجد حلها.

ج) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية : $x^2\dfrac{dy}{dx} + x(x+2)y = e^{2x}$ ، حيث $x > 0$.

السؤال الأول: (13)

أ)

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x+1}}$ ، $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}$

$= \lim_{x\to\infty} 2x(x+1) = \infty$

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\ln(n+1)} = \infty$ إذاً $\left\{\frac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$ متباعدة

---

(1) 2) $\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right| \le \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

إذاً $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$

---

(1) 3) $\lim_{x\to\infty} x\sin(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x}$ ، $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

$= \lim \frac{-1/x^2\cos(1/x)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \cos(1/x) = 1$

إذاً $\lim_{n\to\infty} n\sin(\frac{1}{n}) = 1$

ب) ، $a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

(2) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}) + (\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}) + \cdots + (\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}}) + (\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2})$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \to \frac{1}{2}$

إذاً $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$ متقارب

ج) $\sum_1^\infty n e^{-n^2}$ ، $f(x) = xe^{-x^2}$ ، الدالة f موجبة ومتصلة ومتناقصة على $[1,\infty)$ (1

$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2) < 0$

(2) لأن $2x^2 > x^2 \ge 1$

$\int_1^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{\ell\to\infty}\int_1^\ell xe^{-x^2}dx = \lim_{\ell\to\infty}[-\frac{1}{2}e^{-\ell^2} + \frac{1}{2}e^{-1}] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-1}$ متقارب

إذاً $\sum_1^\infty n e^{-n^2}$ متقارب

---

2)

$\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ ، $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, x\ge 1$ ، نضع

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \; ; \; x\ge 2 \Rightarrow$ إذاً (a_n) متناقصة

وحسب الاختبار المتناوب فإن المتسلسلة متقاربة

---

3) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+2} < \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة

(2)

$p = \frac{3}{2} > 1$ متقاربة ، p

---

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{4n+5} = \frac{1}{2} \neq 0$ باختبار ، $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n-3}{4n+5}$

إذن المتسلسلة متباعدة.

السؤال الثاني: أ) 2

(8)

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n}$$

(1) $$\frac{1}{4+x^2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^{n+1}} \qquad x^2 < 4 \iff |x| < 2$$

$$f(x) = \frac{2x}{4+x^2} = 2x\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^{n+1}} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{2\,x^{2n+1}}{4^{n+1}} \qquad |x|<2$$

---

(1) $$\int_0^x \frac{2t}{4+t^2}\,dt = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{4^{n+1}} \int_0^x t^{2n+1}\,dt$$

$$\ln(x^2+4) - \ln 4 = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{4^{n+1}}\,\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$\boxed{\ln(x^2+4) = \ln 4 + \sum_{0}^{\infty} \frac{2(-1)^n\,x^{2n+2}}{2(n+1)4^{n+1}}} \qquad |x|<2$$

ب) 2

$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f(1) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -(x+1)^{-2}, \quad f'(1) = \frac{-1}{4}$

$f''(x) = +2(x+1)^{-3} \quad f''(1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$f'''(x) = -6(x+1)^{-4} \quad f'''(1) = \frac{-6}{16} = \frac{-3}{8}$

(1) $f(x) = \frac{1}{x+1} = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots$

(1) $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}(x-1)^3 + \cdots$

$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + \cdots$

ج) 4 $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$

$x \neq -2 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x+2|^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}}{\frac{|x+2|^n}{(n+1)2^n}}$

$= \lim_{n\to\infty} |x+2|\cdot\frac{(n+1)}{2(n+2)} = \frac{|x+2|}{2}$

(2) إذا المتسلسلة متقاربة لكل قيم x حقيقة $|x+2| < 2$ ($r = 2$ ، نصف قطر التقارب)

$x \in (-4, 0) \iff -4 < x < 0 \iff -2 < x+2 < 2$

① عندما $x=0$ لدينا $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (متباعدة، حسب اختبار التقارب)

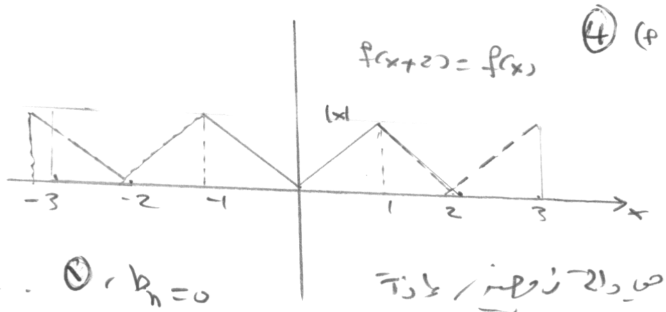
② عندما $x=-4$ لدينا $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ متقاربة، حسب اختبار المتناوبة)

اذاً فترة التقارب هي $I_1 = [-4, 0)$

السؤال الثالث: ⑧

أ) ④ $f(x+2)=f(x)$

$T=1$



الدالة f هي دالة زوجية، اذاً $b_n = 0$ ، ① $(n=1,2,\dots)$

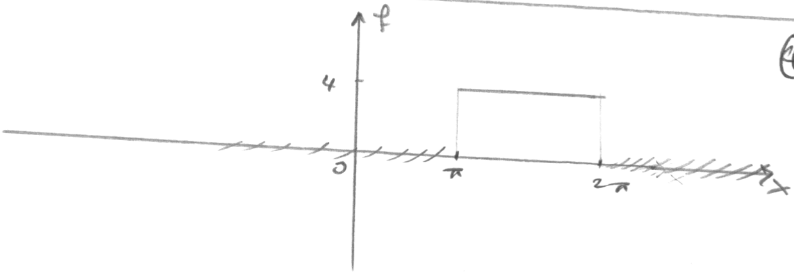
½ $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$

①
$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x|\cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx$$
$$= 2\left[x\,\cancel{\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\,dx$$
0
$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi x)\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right]}$$

½
$$\boxed{\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = f(x) = |x| = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos(n\pi x) \qquad -1<x<1}$$

ب) عندما $x=0$ لدينا
$$f(0) = 0 = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$
$$0 = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 (2n-1)^2}(-2)$$
$$\frac{4}{\pi^2}\sum \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}$$

ب) ④



1 $A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = 4\int_{\pi}^{2\pi}\cos\alpha x\,dx = \frac{4}{\alpha}(\sin 2\pi\alpha - \sin\pi\alpha)$

1 $B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = 4\int_{\pi}^{2\pi}\sin\alpha x\,dx = -\frac{4}{\alpha}[\cos 2\pi\alpha - \cos\pi\alpha]$

2 $$\boxed{\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin 2\pi\alpha - \sin\pi\alpha}{\alpha}\cos\alpha x + \frac{\cos\alpha\pi - \cos 2\pi\alpha}{\alpha}\sin\alpha x\right] d\alpha}$$

عوض $\alpha=\pi$ لنجد

$$\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(\sin 2\pi\alpha - \sin\pi\alpha)\cos\alpha\pi + (\cos\alpha\pi - \cos 2\pi\alpha)\sin\alpha\pi}{\alpha}\,d\alpha$$

1 $$2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin 2\pi\alpha\cos\alpha\pi - \cos 2\pi\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha}\,d\alpha$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi\alpha - \pi\alpha)\,d\alpha}{\alpha} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\,d\alpha}$$

ومنه

السؤال الرابع: (15)

أ) 5 $(x^2 - xy + y^2)dx - xy\,dy = 0$; $x>0$, $y\neq x$ المعادلة متجانسة ←

1 $(1 - \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2)dx - \frac{y}{x}dy = 0$

نفرض ان $\frac{y}{x} = u \Leftarrow y = ux$ ، $dy = x\,du + u\,dx$

2 $(1 + u^2 - u)dx - u(x\,du + u\,dx) = 0$

$(1 + u^2 - u - \cancel{u^2})dx - ux\,du = 0$

$(1-u)dx - ux\,du = 0$

$\frac{dx}{x} - \frac{u}{1-u}du = 0$

$\frac{dx}{x} + \frac{u}{u-1}du = \frac{dx}{x} + (\frac{u-1+1}{u-1})du = 0$

2 $\frac{dx}{x} + (1 + \frac{1}{u-1})du = 0 \Rightarrow \ln x + u + \ln|u-1| = c$

او $\boxed{\ln x + \frac{y}{x} + \ln|\frac{y}{x} - 1| = c}$

ج) 5 $xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 1)dy = 0$ ، ان $\mu(y) = y^3$ عامل تكامل للمعادلة

اي $\underbrace{xy^4}_{M}dx + (\underbrace{2x^2y^3 + 3y^5 - y^3}_{N})dy = 0$

1 $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3$ ، $\frac{\partial N}{\partial x} = 4xy^3$ اذا المعادلة أصبحت تامة

لذا نوجد دالة F في x و y دقيقة

(1) $\frac{\partial F}{\partial x} = x y^4, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y^3 + 3y^5 - y^3$

(1) $F(x,y) = \int x y^4 dx = \frac{1}{2} x^2 y^4 + \phi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{2x^2y^3} + \phi'(y) = 3y^5 - y^3 + \cancel{2x^2y^3}$

(1) $\phi(y) = \frac{1}{2}y^6 - \frac{1}{4}y^4 + c$

اذن حل المعادلة هو مجموعة المنحنيات التالية

(1) $\boxed{F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - \frac{1}{4}y^4 + c = 0}$

ج) المعادلة $x^2y' + x(x+2)y = e^{2x}$ خطية

لذا (1) $y' + \left(\frac{x+2}{x}\right)y = \frac{1}{x^2}e^{2x}$

(2) $y' + \left(1 + \frac{2}{x}\right)y = \frac{1}{x^2}e^{2x}, \quad P(x) = 1 + \frac{2}{x}$

$\mu(x) = e^{\int (1+\frac{2}{x})dx} = e^{x + \ln x^2} = e^x \cdot e^{\ln x^2}$

$= e^x x^2$

لذا $y\mu(x) = \int \frac{1}{\cancel{x^2}} e^{2x} \cdot \cancel{x^2} e^x dx$

(2) $y x^2 e^x = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

اي ان حل المعادلة هو

$\boxed{y x^2 e^x - \frac{1}{3}e^{3x} = c}$