جامعة الملك سعود
كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار النهائي

الفصل الثاني 1437 – 1436 هـ 244 ريض الزمن ثلاث ساعات

الإختبار يحتوي على صفحتين

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

السؤال الاول (8 درجات)

لتكن كل من $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ مصفوفة مربعة من الدرجة 4 و تحقق

$$\mathbf{2AC - AB^2 + 9I = 0}$$

حيث $\mathbf{B = 6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{C = 9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(١). أوجد المصفوفة $\mathbf{A^{-1}}$.

(٢). أوجد محدد المصفوفة $\mathbf{A}$.

(٣). أوجد $\mathrm{adj}\mathbf{A}$.

السؤال الثاني (6 درجات)

(١). عين كل من $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ التي من أجلها يكون $(1, -1, 2)$ حلا للنظام الخطي

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}.$$

(٢). أثبت أن $\mathbf{(1, -1, 2)}$ هو حلا وحيدا للنظام الخطي في الفقرة (١).

السؤال الثالث (6 درجات)

عين أساس لصورة ونواة التحويل الخطي $\mathbf{T}: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$$\mathbf{T(x, y, z, t) = (x - y, 2z + 3t, y + 4z + 3t, x + 6z + 6t)}.$$

السؤال الرابع (6 درجات)

ليكن $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي والذي مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد S لـــ $\mathbb{R}^3$ هي

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي $[\mathbf{T}]_{\mathbf{B}}$ بالنسبة للأساس $\mathbf{B}$ التالي

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{u} = (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}),\ \mathbf{v} = (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0}),\ \mathbf{w} = (\mathbf{0},\mathbf{1},-\mathbf{1})\}.$$

السؤال الخامس (14 درجات)

(١). أثبت أن 1 و -1 هي قيم مميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(٢). أوجد التعدد الجبري لكل من القيم مميزة 1 و -1.

(٣). أوجد أساسا الفضاء المميز $\mathbf{E_1} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{AX} = \mathbf{X}\}$ و استنتج قيم m بحيث تكون المصفوفة $\mathbf{A}$ قابلة للاستقطار.

(٤). أ) إذا كانت $\mathbf{m = 0}$ أوجد مصفوفة $\mathbf{P}$ لها معكوس ومصفوفة $\mathbf{D}$ قطرية حيث $\mathbf{D = P^{-1}AP}$.

ب) إذا كانت $\mathbf{m = 0}$ احسب $\mathbf{A^{1437}}$.