القيم القصوى

تعريف: لتكن f دالة في متغيرين x , y
ولتكن $(a,b)\in D_f$.

(1) $f(a,b)$ هي قيمة صغرى (عظمى) محلية للدالة f
عند النقطة (a,b) إذا كان يوجد $U\subseteq D_f$, لكل $(x,y)\in U$
حيث $(a,b)\in U$ و U قرص: $f(x,y)\geq f(a,b)$ $\left(f(x,y)\leq f(a,b)\right)$

(2) $f(a,b)$ هي قيمة صغرى (عظمى) مطلقة للدالة f
عند النقطة (a,b) إذا كان لكل $(x,y)\in D_f$
$f(x,y)\geq f(a,b)$ $\left(f(x,y)\leq f(a,b)\right)$

(3) $f(a,b)$ هي قيمة قصوى محلية (مطلقة) إذا
كان $f(a,b)$ هي قيمة صغرى محلية (مطلقة) أو
$f(a,b)$ هي قيمة عظمى محلية (مطلقة).

مثال 1: لتكن $f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+7$

أوجد القيم القصوى للدالة f إن وجدت.

الحل: لدينا $D_f=\mathbb{R}^2$, لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+7=(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+2$$

$$=(x-1)^2+(y+2)^2+2$$

نعلم أنه لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ لدينا

$(y+2)^2\geq 0$, $(x-1)^2\geq 0$

إذن $f(x,y)=(x-1)^2+(y+2)^2+2\geq 2=f(a,b)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

وبما أن $2=f(1,-2)$

فإن 2 هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند النقطة $(1,-2)$

مثال 2 : لتكن : $f(x,y) = |x-1| + |y+2| - 4$

أوجد القيم القصوى للدالة f إن وجدت .

الحل : لدينا $D_f = \mathbb{R}^2$

ولكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = |x-1| + |y+2| - 4 \geq -4$

ولدينا $f(1,-2) = -4$

بأن $f(1,-2) = -4$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f

عند النقطة $(1,-2)$.

تعريف: لتكن f دالة في متغيرين و $(a,b)\in D_f$

(1) النقطة (a,b) هي نقطة حرجة للدالة f إذا كان

$\leftarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ أو $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ غير موجود

أو

$\leftarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

(2) لتكن f دالة في متغيرين x و y ولها مشتقات جزئية أولى متصلة عند كل نقطة من D_f .

(a,b) هي نقطة سرجية للدالة f إذا كان

(a,b) نقطة حرجة للدالة f $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0\right)$

$f(a,b)$ ليست قيمة قصوى للدالة f عند (a,b)

مبرهنة ١: لتكن f دالة في متغيرين x و y و $(a,b) \in D_f$

(١) إذا كان $f(a,b)$ قيمة قصوى محلية للدالة f عند النقطة (a,b) فإن (a,b) هي نقطة حرجة للدالة f

(٢) لتكن f دالة لها مشتقات من الرتبة الأولى عند كل نقطة من D_f إذا كان $f(a,b)$ قيمة قصوى محلية للدالة f عند النقطة (a,b) فإن $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

مثال 1 : أوجد النقاط الحرجة للدالة f حيث

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 7$$

ولاحظ أن f لها نهاية صغرى مطلقة عند النقطة الحرجة.

الحل: f هي دالة لها مشتقات من أي رتبة عند كل نقطة من D_f (f دالة متعددة الحدود).

بأن f لها مشتقات جزئية من الرتبة الأولى وبالتالي (a,b) نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$$

لدينا:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

فإن $(1,-2)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

اثبات أن $f(1,-2)$ هي قيمة قصوى مطلقة للدالة f.

لتكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ لدينا

$$f(x,y)-f(1,-2)= x^2-2x+y^2+4y+7-2$$
$$= x^2-2x+y^2+4y+5=(x-1)^2+(y+2)^2$$

ولدينا: $f(x,y)-f(1,-2)=(x-1)^2+(y+2)^2\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

إذن $f(x,y)\geq f(1,-2)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

فإن $f(1,-2)=2$ هي القيمة الصغرى المطلقة للدالة f

عند النقطة $(1,-2)$.

مثال 2: أوجد النقاط الحرجة للدالة f حيث

$$f(x,y)= x^3-2x^2+y^2+4y+3$$

الحل: بما أن f لها مشتقات جزئية أولى عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ فإن (x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا كان

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x=0 \\ 2y+4=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x(3x-4)=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ أو } x=\frac{4}{3} \\ y=-2 \end{cases}$$

فإن $(0,-2)$ و $(\frac{4}{3},-2)$ كل منهما نقطة حرجة للدالة f وهما النقطتين الوحيدتين الحرجة.

ملاحظة: لدينا $f(x,y)=x^3-2x^2+y^2+4y+3$

فإن: $f(0,-2)=(-2)^2+4(-2)+3=-1$

$$f\left(\frac{4}{3},-2\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3-2\left(\frac{4}{3}\right)^2+(-2)^2+4(-2)+3=\frac{64}{27}-\frac{32}{9}-1$$

$$=\frac{64-96-27}{27}=-\frac{59}{27}$$

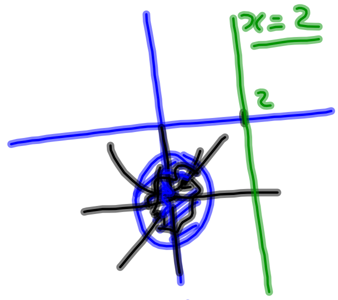
عند النقطة $(0,-2)$

$$f(x,y)-f(0,-2)=x^3-2x^2+y^2+4y+3-(-1)=x^2(x-2)+(y+2)^2$$

لدينا $(y+2)^2\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$x^2\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$x-2\begin{cases} >0; & x>2 \\ <0, & x<2\end{cases}$$



بما أن $(y+2)^2\geq 0$, $x^2\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$y\in\mathbb{R}$ لكل, $x<2$ لكل $x-2<0$

ولدينا

$f(\alpha,-2+\beta)=\alpha^3-2\alpha^2+\beta^2$

(٢) دراسة $f(x,y)-f\left(\frac{4}{3},-2\right)$ هل هي موجبة أو سالبة قريبا من النقطة $\left(\frac{4}{3},-2\right)$ تكون دراسة صعبة.

مبرهنة: لتكن f دالة في متغيرين x و y و f لها مشتقات جزئية من الرتبة الثانية متصلة $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right)$

ولتكن (a,b) نقطة حرجة للدالة f $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0\right)$

ولتكن

$$g(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

فإن

(1) إذا كان $g(a,b)>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$ فإن $f(a,b)$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة (a,b)

(2) إذا كان $g(a,b)>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$ فإن $f(a,b)$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f عند النقطة (a,b)

(3) إذا كان $g(a,b)<0$ فإن النقطة (a,b) هي نقطة سرجية للدالة f.

(4) إذا كان $g(a,b)=0$ لا يمكن أن نستنتج النتيجة بهذه الطريقة.

مثال: أوجد القيم القصوى والنقاط السرجية، إن وجدت، للدالة

$$f(x,y)=x^3-2x^2+y^2+4y+3$$

الحل: **الخطوة الأولى:** (النقاط الحرجة)

بما أن f لها مشتقات جزئية من كل رتبة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$

بأن f لها مشتقات جزئية أولى.

بأن (x,y) هي نقطة حرجة إذا، فقط إذا كان

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}$$

حسب المثال السابق بأن $(0,-2)$ و $(\frac{4}{3},-2)$ هي النقاط الحرجة الوحيدة للدالة f.

الخطوة الثانية: (القيم القصوى والنقاط السرجية)

لدينا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x-4 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$$

بأن

$$g(x,y)=2(6x-4)=4(3x-2)$$

عند النقطة $(0,-2)$:

لدينا: $g(0,-2)=4(3(0)-2)=-8<0$

بأن $(0,-2)$ هي نقطة سرجية للدالة f.

عند النقطة $(\frac{4}{3},-2)$:

$g(\frac{4}{3},-2)=4(3(\frac{4}{3})-2)=8>0$

بأن $f(\frac{4}{3},-2)=-\frac{59}{27}$ هي قيمة قصوى محلية.

وبما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{4}{3},-2)=4>0$

بأن $f(\frac{4}{3},-2)=-\frac{59}{27}$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة $(\frac{4}{3},-2)$

ملاحظة : لتكن f دالة لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة ، عند كل نقطة من مجالها

اذا كان $g(x,y)=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\right](x,y)>0$

فإن :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ لهما نفس العلامة.

مثال أوجد القيم القصوى، إن وجدت، للدالة f حيث:

$$f(x,y) = x^4 + y^2 - 2y + 3$$

الحل: f لها مشتقات جزئية من كل رتبة متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$

بان f " " من الرتبة الثانية متصلة "

الخطوة الأولى (النقاط الحرجة)

(x,y) هي نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 \\ 2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

بان $(0,1)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

القيم القصوى إن وجدت: لدينا

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

بان

$$g(x,y) = 24x^2$$

عند النقطة $(0,1)$: لدينا

$$g(0,1) = 0$$

لا يمكن أن نستنتج حسب المبرهنة.

الحل بدون استعمال المبرهنة الثانية

نعلم أن $(0,1)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f.

لدينا:

$$f(x,y)-f(0,1) = x^4+y^2-2y+3-2$$

$$= x^4+(y^2-2y+1) = x^4+(y-1)^2$$

إذن $f(x,y)-f(0,1) \geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

أي أن $f(x,y) \geq f(0,1)=2$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

وبالتالي $f(0,1)=2$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند النقطة $(0,1)$.

مثال (7 ص 120):

$$z = f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x + xy^2$$

(1) أوجد النقاط الحرجة

(2) أوجد القيم العظمى والصغرى والسرجية إن وجدت.

الحل:

الدالة f لها مشتقات جزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$

(1) (x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \text{ أو } y=-1 \quad x=1, x=-1 \\ x=0, \text{ أو } y=0 \end{cases}$$

إذن $(-1,0)$ ، $(1,0)$ ، $(0,-1)$ ، $(0,1)$ هي الأربع نقاط الحرجة للدالة f الوحيدة.

(2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2x \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x$$

إذن

$$g(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2)$$

عند النقطة $(0,1)$ و $(0,-1)$

بما أن $g(0,1) = g(0,-1) = -4 < 0$

إذن $(0,1)$ و $(0,-1)$ كل منهما نقطة سرجية للدالة f.

عند النقطة $(1,0)$ و $(-1,0)$

لدينا $g(1,0) = g(-1,0) = 4 > 0$

إذن $f(-1,0) = \frac{2}{3}$ ، $f(1,0) = -\frac{2}{3}$

كل منهما قيمة قصوى محلية للدالة f.

بما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2 > 0$ إذن $f(1,0) = -\frac{2}{3}$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة $(1,0)$

وبما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = -2 < 0$ إذن $f(-1,0) = \frac{2}{3}$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f عند النقطة $(-1,0)$

هل أن القيم القصوى المحلية هي مطلقة؟

لدينا $f(-3,0) = -6 < -\frac{2}{3} = f(-1,0)$ إذن $f(-1,0) = -\frac{2}{3}$ ليست قيمة صغرى مطلقة للدالة f

إذن $f(3,0) = 6 > \frac{2}{3} = f(1,0)$ إذن $f(1,0) = \frac{2}{3}$ ليست قيمة عظمى مطلقة للدالة f

مثال: أوجد النقاط الحرجة، نوع القيم الصغرى والعظمى والنقاط السرجية إن وجدت للدالة f في الحالتين التاليتين:

$$(1)\quad f(x,y) = x^4+y^2 \qquad (2)\quad f(x,y) = x^4+y^3$$

الحل: في كلتا الحالتين f هي دالة لها مشتقات جزئية من الرتبة الثانية متصلة.

(1) النقاط الحرجة: نقطة (x,y) نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3=0 \\ 2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

(2) النقاط الحرجة:

$$\iff \begin{cases} 4x^3=0 \\ 3y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

إذن $(0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f في الحالتين (1)، (2)

القيم القصوى والنقاط السرجية:

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$.

إذن $g(x,y)=24x^2$

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y$.

إذن $g(x,y)=72x^2y$

عند النقطة $(0,0)$ لدينا $g(0,0)=0$ فإنه لا يمكن استنتاج القيم القصوى والنقاط السرجية.

نقارن بين $f(x,y)$ و $f(0,0)$:

(1) لدينا $f(x,y)-f(0,0)=x^4+y^2\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

فإن $f(x,y)\geq f(0,0)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

بالتالي $f(0,0)=0$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f .

(2) $f(x,y)-f(0,0)=x^4+y^3$

لدينا: $f(0,y)=y^3\begin{cases} >0 ; y>0 \\ <0 ; y<0 \end{cases}$

فإن $f(0,0)=0$ هي ليست قيمة صغرى محلية لأن $f(0,y)<f(0,0)$; $y<0$

و $f(0,0)=0$ هي ليست قيمة عظمى محلية

لأن ...

مثال 10 ص 122: أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية إن وجدت للدالة f حيث

$$f(x,y)=2x^4+y^2-x^2-2y$$

الحل: f لها مشتقات جزئية من الرتبة 2 ومتصلة عند كل نقطة من $\mathbb{R}^2$.

النقاط الحرجة: (x,y) هي نقطة حرجة للدالة f إذا وفقط إذا

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}8x^3-2x=0\\ 2y-2=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x(4x^2-1)=0\\ y=1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0 \text{ أو } x=\frac{1}{2} \text{ أو } x=-\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$$

بالتالي $(0,1)$ و $(\frac{1}{2},1)$ و $(-\frac{1}{2},1)$ هي النقاط الحرجة الثلاثة الوحيدة للدالة f

القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=24x^2-2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$$

بالتالي $g(x,y)=4(12x^2-1)$

عند النقطة $(0,1)$

لدينا $g(0,1)=-4<0$

بالتالي $(0,1)$ هي نقطة سرجية للدالة f

عند النقطة $(\frac{1}{2},1)$

لدينا $g(\frac{1}{2},1)=8>0$

ولدينا $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2},1)=4>0$

بالتالي $f(\frac{1}{2},1)=-\frac{9}{8}$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة $(\frac{1}{2},1)$

عند النقطة $(-\frac{1}{2},1)$

لدينا: $g(-\frac{1}{2},1)=8>0$

ولدينا: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{2},1)=4>0$

بالتالي $f(-\frac{1}{2},1)=-\frac{9}{8}$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة $(-\frac{1}{2},1)$