تمارين الباب الأول

التمرين 1 :

أوجد قيم النهايات التالية

1. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k^2}$
3. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$
4. $\lim_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

التمرين 2 :

أُحسب التكاملات التالية:

1. $\int_1^x \dfrac{dt}{(t+1)\sqrt{t}}$
2. $\int_0^{\pi} \dfrac{dx}{1+\sin x}$
3. $\int_0^{\pi} \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$
4. $\int_0^{\pi} \dfrac{dx}{3+\cos(2x)}$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$
6. $\int_1^3 \dfrac{dx}{x(1+x^4)}$
7. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

التمرين 3 :

لتكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة قابلة للتفاضل باتصال من الدرجة 2، (C^2). أثبت أنّ

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx.$$

التمرين 4 :

أثبت أنّ التكامل $I_n=\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{n+1}\sqrt{x-1}}$ متقارب ثم أوجد قيمته باستعمال الإستقراء الرياضي

التمرين 5 :

1. أثبت أنّ التكامل $J=\int_a^b\dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ متقارب.

2. أُحسب التكامل باستعمال التعويض $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$.

التمرين 6 :

ادرس تقارب التكاملات المعتلة التالية.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{(1+x^2)}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^{\alpha})}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+e^x}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\tan^{-1} x - \pi}{\sqrt{x}}dx$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\tan^{-1} x}{x} - \frac{\pi}{2(1+x)}\right)dx$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}\right)dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\cos^{-1} x}$